数理解析研究所講究録
第 889 巻 1994 年 113-123

ソリトンと、特殊関数

大阪外国語大学　言語情報　中村あきら　(Akira Nakamura)

１９９４．７．２６

１． はじめに

ソリトンは、はじめに、KdV 方程式や、Toda 方程式などの、空間１次元＋時間１次元のシステムで、おもに、研究され、そののち、ＫＰ（＝２次元 KdV）方程式や、２次元 Toda 方程式などの、空間２次元、３次元システムえと、研究が、すすんで、いった。
歴史的には、この（空間的）多次元ソリトンの研究に、おいて、ソリトンと、特殊関数との、つよい関係が、あきらかに、なったのであった。

すなわち、円筒（Cylindrical）KdV ソリトンは、Airy 関数で、あらわされることが（１９７８、Calogero and Degasperis)、また、円筒（Cylindrical）Toda ソリトンは、Bessel 関数で、あらわされることが（１９８３，Nakamura)、わかった。

もちろん、そのまえにも、ソリトンと、Painleve 方程式との、密接な関係が、みつけられていたし、その Painleve 方程式の、おおくの解が、特殊関数で、かかれることが、みつけられていたので、その面で、ソリトンと特殊関数は、間接的には、関係することは、しられていた、ともいえる。

さて、ここでは、ソリトンの、解析方法の Hirota bilinear method を、つかって、ソリトンと、特殊関数の、関係を、さらに、しらべたい。

２． 特殊関数は、かならず、Toda-like な、bilinear 関係式を、みたす

特殊関数は、linear な、関係式で、定義される、としてよい。　これらの、linear な、関係式を、くみあわせれば、bilinear な、関係式を、みちびける。　まずはじめに、一般論として、特殊関数は、かならず Toda-like な、bilinear relation を、みたすことを、しめす。

そのあと、それらの、個別論を、しらべる。　それについては、のちのちの、ために、できるだけ、おおくの、具体例のリストがあれば、べんりであるので、それを、こころ

みる。　普通に知られている、ほとんどの特殊関数 $S_n(x)$ は、次の linear な関係式を、満たすとしてよい。

$$a_1 S_n''(x) + b_1 S_n'(x) + c_1 S_n(x) = 0, \tag{1}$$

$$a_2 S_{n+1}(x) = b_2 S_n'(x) + c_2 S_n(x), \tag{2}$$

$$a_3 S_{n-1}(x) = b_3 S_n'(x) + c_3 S_n(x). \tag{3}$$

ここで $S_n'(x) \equiv (d/dx)S_n(x)$、$S_n''(x) \equiv (d/dx)^2 S_n(x)$ であり、係数 $a_1, a_2, a_3, ..., c_3$ は、$a_1 = a_1(n, x)$ のように、変数 n と x を、含むものである。 eq. (2) x eq. (3) より

$$a_2 a_3 S_{n+1}(x) S_{n-1}(x) - b_2 b_3 S_n'(x)^2 - c_2 c_3 S_n(x)^2 - (b_2 c_3 + b_3 c_2) S_n'(x) S_n(x) = 0. \tag{4}$$

また eq. (1) x $(b_2 b_3/a_1) S_n(x)$ より

$$b_2 b_3 S_n''(x) S_n(x) + (b_1 b_2 b_3/a_1) S_n' S_n(x) + (b_2 b_3 c_1/a_1) S_n(x)^2 = 0. \tag{5}$$

eq. (4) + eq. (5) より、つぎの式をえる

$$a_4[S_n''(x) S_n(x) - S_n'(x)^2] + b_4 S_n'(x) S_n(x) + c_4 S_{n+1}(x) S_{n-1}(x) + d_4 S_n(x)^2 = 0. \tag{6}$$

ただし a_4, b_4, c_4, d_4 は、変数 n と x を含む係数であり、$a_4 = b_2 b_3$、 $b_4 = b_1 b_2 b_3 / a_1 - b_2 c_3 - b_3 c_2$、$c_4 = a_2 a_3$、 $d_4 = b_2 b_3 c_1 / a_1 - c_2 a_3$ である。 eq. (6) が、特殊関数が満たす Toda-like な bilinear 関係式である。 少なくとも、ほとんど、すべての特殊関数が、このようにして Toda-like bilinear relation を満たすということは、たいへんに、おもしろい発見では、ないだろうか？

つぎには、うえの議論の具体形を、さまざまなケースで調べてリストを作る。その結果としてつぎの表が得られる。

ただし、以下で、つかわれる、記号、D_x は、Hirota bilinear derivatives であり、任意の関数 $a(x)$ と $b(x)$ にたいして、つぎで定義される、

$$D_x^n a(x) \cdot b(x) \equiv (\partial/\partial x - \partial/\partial x')^n a(x) b(x')_{x'=x}. \tag{7}$$

Airy function, $Ai(x)$
Linear relations $[(d/dx)^2 - x]Ai(x) = 0,$ Bilinear relations $[D_x^4 - 4xD_x^2 + 2(d/dx)]Ai(x) \cdot Ai(x) = 0,$
Bessel function, $J_n(x)$
Linear relations $[(d/dx)^2 + (1/x)(d/dx) + (1 - n^2/x^2)]J_n(x) = 0,$ $J_{n+1}(x) = -(d/dx)J_n(x) + (n/x)J_n(x),$ $J_{n-1}(x) = +(d/dx)J_n(x) + (n/x)J_n(x),$ Bilinear relations $[D_x^2 + (1/x)(d/dx)]J_n(x) \cdot J_n(x) + 2[-J_{n+1}(x) \cdot J_{n-1}(x) + J_n(x)^2] = 0,$
Legendre function, $P_n(x)$
Linear relations $[(x^2-1)(d/dx)^2 + 2x(d/dx) - n(n+1)]P_n(x) = 0,$ $(n+1)P_{n+1}(x) = (x^2-1)(d/dx)P_n(x) + (n+1)xP_n(x),$ $nP_{n-1}(x) = -(x^2-1)(d/dx)P_n(x) + nxP_n(x),$ Bilinear relations $[(x^2-1)^2D_x^2 + x(x^2-1)(d/dx)]P_n(x) \cdot P_n(x)$ $+2n(n+1)[-P_{n+1}(x)P_{n-1}(x) + P_n(x)^2] = 0,$
Associated Legendre function, $P_N^n(x)$
Linear relations $[(x^2-1)(d/dx)^2 + 2x(d/dx)$ $+[-N(N+1) + n^2/(1-x^2)]]P_N^n(x) = 0,$ $\sqrt{x^2-1}P_N^{n+1}(x) = (x^2-1)(d/dx)P_N^n(x) - nxP_N^n(x),$ $(N+n)(N-n+1)\sqrt{x^2-1}P_N^{n-1}(x) =$ $(x^2-1)(d/dx)P_N^n(x) + nxP_N^n(x),$ Bilinear relations $[(1-x^2)D_x^2 - 2x(d/dx)]P_N^n(x) \cdot P_N^n(x)$ $-2(N+n)(N+1-n)P_N^{n+1}(x)P_N^{n-1}(x) + 2(N^2+N-n^2)\ P_N^n(x)^2] = 0,$ 4

Hermite function, $H_n(x)$
Linear relations $[(d/dx)^2 - x(d/dx) + n]H_n(x) = 0,$ $nH_{n-1}(x) = (d/dx)H_n(x),$ $H_{n+1}(x) = xH_n(x) - (d/dx)H_n(x),$ Bilinear relations $D_x^2 H_n(x) \cdot H_n(x) + 2n[-H_{n+1}(x)H_{n-1}(x) + H_n(x)^2] = 0,$
Tchebycheff function, $T_n(x)$
Linear relations $[(1-x^2)(d/dx)^2 - x(d/dx) + n^2]T_n(x) = 0,$ $nT_{n-1}(x) = +(1-x^2)(d/dx)T_n(x) + nxT_n(x),$ $nT_{n+1}(x) = -(1-x^2)(d/dx)T_n(x) + nxT_n(x),$ Bilinear relations $[(x^2-1)^2 D_x^2 + x(x^2-1)(d/dx)]T_n(x) \cdot T_n(x) + 2n^2[-T_{n+1}(x)T_{n-1}(x) + T_n(x)^2] = 0,$
Gauss hyper geometric function, $F(a,b;c;x)$
Linear relations $[x(1-x)(d/dx)^2 + [c-(a+b+1)x](d/dx) - ab]F(a,b;c;x) = 0,$ $ax^{a-1}F(a+1,b;c;x) = (d/dx)[x^a F(a,b;c;x)],$ $(c-a)x^{c-a-1}(1-x)^{a+b-c-1}F(a-1,b;c;x) = (d/dx)[x^{c-a}(1-x)^{a+b-c}F(a,b;c;x)],$ Bilinear relations $[x^2(1-x)D_x^2 - x^2(d/dx)]F(a,b;c;x) \cdot F(a,b;c;x)$ $-a(a-c)[F(a+1,b;c;x)F(a-1,b;c;x) - F(a,b;c;x)^2] = 0,$
Generalixed Laguerre function, $L_N^n(x)$
Linear relations $[x(d/dx)^2 + (n+1-x)(d/dx) + N]L_N^n(x) = 0,$ $L_N^{n+1}(x) = -(d/dx)L_N^n(x) + L_N^n(x),$ $(N+n)L_N^{n-1}(x) = x(d/dx)L_N^n(x) + nL_N^n(x),$ Bilinear relation $[xD_x^2 + (d/dx)]L_N^n(x) \cdot L_N^n(x) - 2(N+n)[L_N^{n+1}(x)L_N^{n-1}(x) - L_N^n(x)^2] = 0.$

3. Toda 方程式の、もっとも一般的な、bilinear form

つぎのようなToda 方程式を、かんがえる。

$$\Delta log V(n,x,y,z) - V(n+1,x,y,z) + 2V(n,x,y,z) - V(n-1,x,y,z) = 0, \tag{8}$$

$$\Delta \equiv (\partial/\partial x)^2 + (\partial/\partial y)^2 + (\partial/\partial z)^2 \equiv (\partial/\partial \rho)^2 + (1/\rho)(\partial/\partial \rho) + (\partial/\partial z)^2, \tag{9}$$

$$\equiv (\partial/\partial r)^2 + (2/r)(\partial/\partial r) + (1/r^2)[(\partial/\partial \theta)^2 + cot\theta(\partial/\partial \theta) + (1/sin^2\theta)(\partial/\partial \phi)^2]. \tag{10}$$

ここで、x, y, z は、ふつうの直交座標、ρ, z は、円筒座標、r, θ, ϕ は、球座標の変数である。 Hirota の bilinear method を、つかうために、変数変換を、かんがえる、

$$V(n,x,y,z) = V^0(n,x,y,z) + \Delta log f(n,x,y,z). \tag{11}$$

ここで、$V^0(n,x,y,z)$ は、かんたんな、Toda 方程式の解、いわゆる、バキューム解（ vacuum solution ）であり、もとの Toda 方程式を、みたす、

$$\Delta log V^0(n,x,y,z) - V^0(n+1,x,y,z) + 2V^0(n,x,y,z) - V^0(n-1,x,y,z) = 0. \tag{12}$$

eq. (11) を eq. (8) に、代入し、eq. (12) をつかうと

$$\Delta log[V^0(n,x,y,z)+\Delta logf(n,x,y,z)]$$

$$-\Delta log[V^0(n,x,y,z)f(n+1,x,y,z)f(n-1,x,y,z)/f(n,x,y,z)^2]=0. \tag{13}$$

ここで

$$\Delta logc=0, \tag{14}$$

をみたす "integration constant" c を、導入すると、つぎを、える、

$$V^0(n,x,y,z)+\Delta logf(n,x,y,z)-cV^0(n,x,y,z)f(n+1,x,y,z)f(n-1,x,y,z)/f(n,x,y,z)^2=0, \tag{15}$$

$$f(n,x,y,z)\Delta f(n,x,y,z)-(\nabla f(n,x,y,z))^2-cV^0(n,x,y,z)f(n+1,x,y,z)f(n-1,x,y,z)$$

$$+V^0(n,x,y,z)f(n,x,y,z)^2=0, \tag{16}$$

$$(\nabla f)^2\equiv(\partial/\partial xf)^2+(\partial/\partial yf)^2+(\partial/\partial zf)^2. \tag{17}$$

この式 eq. (16) が、もっとも、一般的な bilinear Toda equation である。 ところで、いままでの、Toda Molecule 方程式についての、おおくの論文では、うえの式と、ちがうかたちの、bilinear form が、つかわれているので、その関係について、みておく。 いま、変数 $f^0(n,x,y,z)$、$f'(n,x,y,z)$ を、関係式 $V^0(n,x,y,z)=\Delta logf^0(n,x,y,z)$ と、

$f'(n,x,y,z) = f^0(n,x,y,z)f(n,x,y,z)$、によって、導入すると、いままでと、同様にして、つぎをえる、

$$f'(n,x,y,z)\Delta f'(n,x,y,z) - (\nabla f'(n,x,y,z))^2 - cf'(n+1,x,y,z)f'(n-1,x,y,z) = 0. \quad (18)$$

この式のほうが、いままで、よりおおく、つかわれてきた。 しかし、いまのように、特殊関数に、注目したいときは、まえのセクションで、もとめた、特殊関数の bilinear form のかたちに、よりよく、あうのは、eq. (16) のほう、であることが、わかる。 だから、われわれは、以下では、eq. (16) のほうを、つかうことにする。 もし、eq. (16) を、みたす $f(n,x,y,z)$ が、えられれば、eq. (11) と eq. (15) から、Toda 方程式 eq. (8) の、解 $V(n,x,y,z)$ は、つぎとなる

$$V(n,x,y,z) = cV^0(n,x,y,z)f(n+1,x,y,z)f(n-1,x,y,z)/f(n,x,y,z)^2. \quad (19)$$

さて、eq. (16) の、かんたんな、ばあいとして、つぎのケースを、かんがえよう、

$$f(n,x,y,z) = f(n,v(x,y,z)). \quad (20)$$

ここで $v(x,y,z)$ は、のちに、きめられる、 x,y,z の未知の関数である。 このような、ケースでは、eq. (16) は、つぎの、かたち、となる

$$[(\nabla v)^2 D_v^2 + (\Delta v)(\partial/\partial v)]f(n,v)\cdot f(n,v)$$

$$-2cV^0(n,x,y,z)f(n+1,v)f(n-1,v) + 2V^0(n,x,y,z)f(n,v)^2 = 0. \quad (21)$$

4． Toda 方程式の特殊関数でかかれる、solution

いままでで、われわれは、2つの bilinear relation [I] special function bilinear relation と [II] general Toda bilinear relation を、手に入れた。　ここで、もし、この2つが、おなじものに、なるならば、われわれは、Toda 方程式の特殊関数でかかれた、答を手にすることになる。　それは実際にできるのである。　[II] の general Toda bilinear relation の簡単化されたもの、eq.(21)、をとる。　この式には、未知の（あるいは、任意性を持つ）量 V^0, c, n が、含まれる。　これらを、適当にとること（matching）によって、eq.(21) を、[I] の special function bilinear relation のひとつと、おなじものと、できるのである。
てきとうな matching という、ことばは、すこしアイマイさがあるが、ここでは、この点についてのこれ以上の理論的な解析は、しない。　これからの研究テーマの、ひとつとして、おもしろいであろう。　以下に具体例で、この matching をみてみよう。

(i) ベッセル関数 $J_n(x)$ のケース：　eq.(21) において、

$$f(n) = J_n(\rho), c = 1, V^0 = 1, v = \rho = \sqrt{x^2+y^2}, (\nabla v)^2 = 1, \Delta v = 1/\rho, \tag{22}$$

ととると、eq.(21) は Bessel bilinear relation と、等しくなる。　よって、つぎの Toda $V(n)$ 解をえる。

$$V(n) = J_{n+1}(\rho) J_{n-1}(\rho) / J_n(\rho)^2. \tag{23}$$

(ii) エルミート関数 $H_n(x)$ のケース：　　eq.(21) において、

$$f(n) = H_n(x), c = 1, V^0 = n, v = x, (\nabla v)^2 = 1, \Delta v = 0, \tag{24}$$

ととると、eq.(21) は Hermite bilinear relation と、等しくなる。　よって、つぎの Toda $V(n)$　解をえる。

$$V(n) = nH_{n+1}(x)H_{n-1}(x)/H_n(x)^2. \tag{25}$$

(iii) Gauss 超幾何関数 $F(n, a; b; c; x)$ のケース：　　eq.(21) において、

$$f(n) = F(n-k", b; -k'-k"; 1+exp(k_1x+k_4)), v = 1+exp(k_1x+k_4), (\nabla v)^2 = k_1^2(v-1)^2,$$

$$\Delta v = k_1^2(v-1), V^0 = -k_1^2(n+k')(n-k")exp(k_1x+k_4)[1+exp(k_1x+k_4)]^{-2}$$

$$= -k_1^2(n+k')(n-k")(v-1)/v^2, c = 1, \tag{26}$$

ととる。　ここで、$b, k', k", k_1, k_4 \equiv$ arbitrary constants である。　すると、eq.(21) は Gauss hyper geometric function bilinear relation と、等しくなる。　よって、つぎの Toda $V(n)$　解をえる。

$$V(n) = -k_1^2(n+k')(n-k")exp(k_1x+k_4)[1+exp(k_1x+k_4)]^{-2}$$

$$\text{x}F(n+1-k", b; -k'-k"; 1+exp(k_1x+k_4))F(n-1-k", b; -k'-k"; 1+exp(k_1x+k_4))$$

$$/F(n-k",b;-k'-k";1+exp(k_1x+k_4))^2. \tag{27}$$

5. むすび

われわれは、ソリトン方程式の代表例のひとつである、Toda 方程式を例にとって、この方程式が、いろいろの特殊関数で、かかれる解をもつことを、しめした。 ここでの計算は、それぞれの特殊関数について、もっとも、簡単なもの (lowest order solution) が、みちびかれた、のであり、そのうえに、さらに、ふくざつな解 (higher order solution) がありうる。

Bessel タイプの higher order solution は、Toda lattice cylindrical soliton solution として、比較的よく、研究されている。 このケースでは、いわゆる、Toda cylindrical N-soliton solutions に、あたる、かなり、くわしい higher order solutions が、えられている。