

## 離散型パウルベ方程式とその周辺

同志社大学工学部  
広島大学工学部  
東京大学大学院数理科学研究科

梶原 健司 (Kenji Kajiwara)  
太田 泰広 (Yasuhiro Ohta)  
薩摩 順吉 (Junkichi Satsuma)

### 1 緒言

非線形可積分系の「可積分性を保存した」離散化、という問題は既に 1970 年代から議論され、特に微分方程式の数値解析という観点や、離散化された方程式それ自身の構造の単純さから興味を持たれてきた。しかし、最近、数理工学 [1]-[3] と数理物理学という二つの全く異なる分野から離散型可積分系が現れることが明らかにされた。そこでは連続系の離散化としてではなく、差分方程式そのものが本質的な役割を果たす状況が現れていることが興味深い。従って、差分方程式それ自身の解や背後の構造の解析が重要な研究対象となるであろう。

最近、2次元量子重力の理論において、matrix model の手法が適用され、分配函数の振舞いを導く上で

$$x_{N+1} + x_N + x_{N-1} = \frac{aN + b}{x_N} + c, \quad (1)$$

という差分方程式が現れ、適当な連続極限で第 1 種のパウルベ方程式 (P<sub>I</sub>) に帰着することが指摘された。また、別のモデルから同様の議論により

$$x_{N+1} + x_{N-1} = \frac{(aN + b)x_N + c}{1 - x_N^2}, \quad (2)$$

という差分方程式が導かれ、連続極限で第 2 種のパウルベ方程式 (P<sub>II</sub>) に帰着することが明らかにされた [4]-[6]。(1) を第 1 種の離散型パウルベ方程式 (dP<sub>I</sub>)、(2) を第 2 種の離散型パウルベ方程式 (dP<sub>II</sub>) と呼ぶ。さらに、Grammaticos らは Quispel らによる可積分な 2 階常差分方程式のクラス [7] から抽出された “singularity confinement” (SC) と呼ばれる性質 [8] を可積分性の判定条件として用いて dP<sub>I</sub>、dP<sub>II</sub> が SC に通ることを示し、さらに新しい離散型パウルベ方程式を導いた [9]。パウルベ超越函数は線形系における特殊函数と同様の役割を連続系の非線形可積分系で果たしている。従って、離散型パウルベ方程式は離散系において基本的な対象であると考えられる。

しかし、ここで重要な問題がある。Grammaticos らは SC に通る方程式を「可積分」としたが、果たしてそれは妥当であろうか？ SC は強力かつ有用な criterion であるが、Quispel の差分方程式に対しては SC に通ることを確かめられるとしても、その根拠や汎用性については今のところ全く不明である。従って、その criterion を用いて離散化された離散型パウルベ方程式は本当に「良い」方程式であるかは別の観点から確かめられなければならない。

離散型パウルベ方程式には Lax pair の存在などいくつかの性質が知られているが、今のところまだ「形式的」であるように思える。それらの性質から何が得られるか、突っ込んだ結果がないからである。

では、現状ではどのような性質をもって「可積分」と称すべきであろうか？我々は次のような立場をとることにする。佐藤理論 [10]-[13] など明らかにされたように、連続系において可積分性の根源は背後の豊かな代数構造にある。その一つの現れが、 $\tau$  関数の存在であり、さらにそれが行列式や Pfaffian で表現できることである。従って、我々は与えられた差分方程式に行列式や Pfaffian で表される解があるかどうかで「可積分な」あるいは「よい」方程式であると判断する。特に離散型パウルベ方程式の場合、パウルベ方程式が特殊函数を要素とする行列式で表される解をもつことから、離散型パウルベ方程式においては「離散型特殊函数」が現れることが予想され、一体どのような函数が導かれるのかも興味あるところである。

さて、このような考えに基づき、我々はまず離散型パウルベ方程式の研究の手始めとして、厳密解の構成を試みた。その結果、次のようなことが明らかにされた [14, 15]。

1.  $dP_{II}$  と  $dP_{III}$  に対しては、連続極限で連続系の特殊函数解に帰着するような、「離散型特殊函数」で表される厳密解が存在する。また、離散化によって行列式構造は保存されているが、連続系の場合の解が持つ対称行列式の構造は保存されていない。
2.  $dP_{III}$  の場合、解は本質的に  $q$ -Bessel 函数で表され、従って通常の離散系というよりむしろ  $q$ -差分系であることが明らかになった。

さて、本稿では離散型パウルベ方程式には“molecule type”と呼ぶもう一つのクラスの行列式で表される厳密解があることを述べる。上で述べた解はそれに対して“lattice type”と呼ぶことにする。molecule type は離散系特有の解であり、連続極限では少なくともその行列式構造は潰れてしまう。それに対して、lattice type の解は大体において連続極限を持つ。また、本稿では molecule type の厳密解が直交多項式の理論と密接な関わりがあることを述べる。直交多項式は物理だけでなく広い意味での数理科学全般で使われており、molecule type の解を足掛かりにして他の分野とのつながりが見えてくるように思われる。

## 2 “Lattice” Type と “Molecule Type”

離散型の可積分系では行列式構造を持つ解として“lattice type”と“molecule type”と呼ばれる二つの解が存在するようである。本節ではこの命名の元となっている二つの Toda 方程式を例に挙げてこの二つの解の性質を解説する。

1次元 Toda 方程式

$$u_{n,tt} = e^{u_{n-1}-u_n} - e^{u_n-u_{n+1}} \quad (3)$$

は境界条件により解の挙動が全くことなる場合が知られている。一つは、

$$n \in \mathbb{Z} \quad (4)$$

という場合で、Toda lattice と呼ばれる。もう一つは

$$u_{-1} = -\infty, u_M = \infty \quad (5)$$

という境界条件を課す場合である。このときは Toda molecule と呼ばれる。前者を無限 Toda lattice、後者を有限非周期 Toda lattice、また (5) の第 2 式を課さないものを半無限 (semi-infinite) Toda lattice と呼ぶ場合もある。Toda 方程式は非線形 LC 梯子回路の方程式としての表示がある。Toda lattice の場合は

$$\frac{d^2}{dt^2} \log(1 + V_n) = V_{n+1} - 2V_n + V_{n-1}, \quad n \in \mathbf{Z}, \quad (6)$$

であり、このとき  $e^{u_{n-1}-u_n} = 1 + V_n$  である。また、Toda molecule の場合は

$$\frac{d^2}{dt^2} \log V_n = V_{n+1} - 2V_n + V_{n-1}, \quad V_0 (= V_{M+1}) = 0, \quad (7)$$

である。このとき、 $e^{u_{n-1}-u_n} = V_n$  である。

さて、Toda lattice 方程式 (6) に対して

$$1 + V_n = \frac{\tau_{n+1}\tau_{n-1}}{\tau_n^2} \quad (8)$$

という変数変換を行なうと、

$$\tau_{n,tt}\tau_n - \tau_{n,t}^2 = \tau_{n+1}\tau_{n-1} - \tau_n^2 \quad (9)$$

という双線形形式が得られ、この解の一つとして

$$\tau_n = \begin{vmatrix} f_n^{(1)} & f_{n+1}^{(1)} & \cdots & f_{n+N-1}^{(1)} \\ f_n^{(2)} & f_{n+1}^{(2)} & \cdots & f_{n+N-1}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_n^{(N)} & f_{n+1}^{(N)} & \cdots & f_{n+N-1}^{(N)} \end{vmatrix}, \quad (10)$$

$$f_n^{(k)} = p_k^n \exp(p_k x) + \left(\frac{1}{p_k}\right)^n \exp\left(\frac{1}{p_k} x\right), \quad p_k: \text{arbitrary constants} \quad (11)$$

が得られる。また、Toda molecule 方程式 (7) の場合、従属変数変換

$$V_n = \frac{\tau_{n+1}\tau_{n-1}}{\tau_n^2} \quad (12)$$

とおくことにより、

$$\tau_{n,tt}\tau_n - \tau_{n,t}^2 = \tau_{n+1}\tau_{n-1}, \quad (13)$$

という双線形形式が得られ、その解は

$$\tau_n = \begin{vmatrix} f & \frac{d}{dx} f & \cdots & \left(\frac{d}{dx}\right)^{n-1} f \\ \frac{d}{dx} f & \left(\frac{d}{dx}\right)^2 f & \cdots & \left(\frac{d}{dx}\right)^n f \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \left(\frac{d}{dx}\right)^{n-1} f & \left(\frac{d}{dx}\right)^n f & \cdots & \left(\frac{d}{dx}\right)^{2n-2} f \end{vmatrix}, \quad (14)$$

で与えられる。semi-infinite の場合は

$$f: \text{arbitrary function}, \quad (15)$$

で、有限の ( $V_0 = V_{M+1} = 0$ ) 場合は、

$$f = \sum_{k=1}^{M+1} \exp(p_k x + \delta_k), \quad p_k, \delta_k: \text{arbitrary constants}, \quad (16)$$

であれば、境界条件は満足される。

さて、これらの解には顕著な違いがある。

1. Toda lattice の解では格子番号=行列式の要素の添字で、行列式のサイズ=ソリトンの数。それに対して、Toda molecule の解では格子番号=行列式のサイズ となっている。
2. Toda lattice では行列式で表される解はソリトン解を与えるが、Toda molecule の場合にはそもそも「ソリトン」の概念がない。実際、直観的には明らかであるが、回路方程式としての表示においては、どんな初期値から出発しても  $t \rightarrow \infty$  で  $V_n \rightarrow 0$  となる。
3. Toda lattice の場合には解の変換群など、背後の代数構造がかなりはっきりしているが、Toda molecule の場合にはもう一つよくわかっていない。

ここでは、

格子番号=行列式のサイズ

となるような行列式解を molecule type、そうでないものを lattice type と呼ぶことにする。

### 3 Molecule Type Solution for $dP_I$

さて、本節では  $dP_I$

$$x_{N+1} + x_N + x_{N-1} = \frac{aN + b}{x_N} + c \quad (17)$$

の解について議論する。この方程式は連続極限で  $P_I$  に帰着する。 $P_I$  の解は線形微分方程式の解では表せないことがわかっているから、連続極限でも構造が保存されるような行列式解 (lattice type) はないのではないと思われる。しかし、それでも  $dP_I$  には molecule type の解として行列式解が存在する。

### 3.1 dP<sub>I</sub>の Molecule Type Solution

まず、結果を挙げておく。次の $\tau$ 函数

$$\tau_N^n = \begin{vmatrix} a_n & a_{n+1} & \cdots & a_{n+N-1} \\ a_{n+1} & a_{n+2} & \cdots & a_{n+N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n+N-1} & a_{n+N} & \cdots & a_{n+2N-2} \end{vmatrix} \quad (18)$$

を考える。ただし、 $a_n$ は次の漸化式

$$a_{n+2} = p a_{n+1} + (2n+1)q a_n, \quad (19)$$

を満たすものとする。今、

$$\begin{cases} x_{2N} &= \frac{\tau_{N+1}^0 \tau_{N-1}^1}{\tau_N^0 \tau_N^1} \\ x_{2N+1} &= \frac{\tau_N^0 \tau_{N+1}^1}{\tau_{N+1}^0 \tau_N^1} \end{cases} \quad (20)$$

という変数変換を行なうと、 $x_N$ は dP<sub>I</sub>

$$x_{N+1} + x_N + x_{N-1} = \frac{qN}{x_n} + p, \quad N \geq 1, \quad x_0 = 0, \quad (21)$$

の解を与える。

dP<sub>I</sub>(17)において、

$$a = -\frac{1}{2}\epsilon^5, \quad b = -\frac{3}{4}, \quad c = -3, \quad x = -\frac{1}{2} + \epsilon^2 w, \quad n = \frac{t}{\epsilon} \quad (22)$$

のようにとり、 $\epsilon \rightarrow 1$ の極限を取ることににより、P<sub>I</sub>

$$\frac{d^2}{dt^2} w = 6w^2 + t \quad (23)$$

が得られる。しかし、この極限ではもはや解の構造は保存されない。実際、P<sub>I</sub>の解は超越的であることが知られている。従って、上の解は離散系に特有の解である、ということが言えよう。

### 3.2 導出1 : Bilinear Formalism

さて、この結果の導出は次のように行なわれる。まず、[14]での方法と全く同様にして、 $\tau$ 函数(18)の満たす恒等式として以下の双線形差分方程式

$$\tau_{N+1}^{n-1} \tau_{N-1}^{n+1} = \tau_N^{n-1} \tau_N^{n+1} - \tau_N^n \tau_N^n, \quad N \geq 0, \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \tau_{N+1}^n \tau_{N-1}^n &= (2(n+N-1)+1) q \tau_N^n \tau_N^n \\ &\quad - (2(n-1)+1) q \tau_N^{n+1} \tau_N^{n-1}, \quad N \geq 0, \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \tau_{N+1}^{n+1} \tau_{N-1}^{n-1} &- \tau_{N+2}^{n-1} \tau_{N-1}^{n+1} \\ &= p \tau_{N+1}^n \tau_N^n + (2(n-1)+1) q \tau_{N+1}^{n-1} \tau_N^{n+1}, \quad N \geq 0. \end{aligned} \quad (26)$$

を導くことができる。そこで、

$$u_N^n = \frac{\tau_{N+1}^n \tau_{N-1}^{n+1}}{\tau_N^{n+1} \tau_N^n}, \quad N \geq 0, \quad (27)$$

$$v_N^n = \frac{\tau_{N+1}^{n+1} \tau_N^n}{\tau_{N+1}^n \tau_N^{n+1}}, \quad N \geq 0. \quad (28)$$

とおくと、双線形差分方程式から

$$v_N^n + u_N^n + v_{N-1}^n = p + \frac{2qN}{u_N^n}, \quad N \geq 1, \quad (29)$$

$$u_{N+1}^n + v_N^n + u_N^n = p + \frac{2q(n+N)+q}{v_N^n}, \quad N \geq 0, \quad (30)$$

$$u_0^n = 0. \quad (31)$$

が得られる。さらに、

$$x_{2N} = u_N^0, \quad x_{2N+1} = v_N^0, \quad N \geq 0. \quad (32)$$

とおくと、dP<sub>I</sub>(21) が得られる。ここで、(24) は離散型 Toda molecule 方程式 [16] そのものであることを注意しておく。

### 3.3 導出 2 : 直交多項式の理論

元来、dP<sub>I</sub>(17) は 2 次元量子重力の理論において分配函数の振舞いを議論する際、直交多項式の理論を用いて導出された。ここでは [4, 5] の議論を簡単に解説する。

区間  $(-\infty, \infty)$  上で weight function が<sup>s</sup>

$$\rho(t) = e^{-g_1 t^2 - g_2 t^4} \quad (33)$$

で与えられる monic の直交多項式

$$P_n(t) = t^n + c_1 t^{n-1} + \cdots + c_{n-1} t + c_n \quad (34)$$

を考えよう。直交関係式は

$$\langle P_n(t), P_m(t) \rangle \equiv \int_{-\infty}^{\infty} P_n(t) P_m(t) \rho(t) dt = h_n \delta_{n,m} \quad (35)$$

で与えられる。または、 $\{P_n(t)\}$  は  $\{1, t, t^2, \dots, t^n\}$  から上の内積に関する Gram-Schmidt の直交化で与えられる多項式、といってもよい。すると、 $P_n(t)$  は次のような表示を持つ。

$$P_n(t) = \frac{\begin{vmatrix} b_0 & b_1 & \cdots & b_n \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n-1} & b_n & \cdots & b_{2n-1} \\ 1 & t & \cdots & t^n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} b_0 & b_1 & \cdots & b_{n-1} \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n-1} & b_n & \cdots & b_{2n-2} \end{vmatrix}} \quad (36)$$

ただし、 $b_k$ は  $k$  次のモーメント、すなわち、

$$b_k = \int_{-\infty}^{\infty} t^k \rho(t) dt \quad (37)$$

である。(36) が確かに成立することは、次のようにしてすぐにわかる。両辺に  $t^k$ ,  $k = 0, \dots, n-1$  をかけて積分すれば分子の第  $(n+1)$  行は第  $(k+1)$  列と等しくなる。従って  $P_n(t)$  は  $n-1$  次以下の多項式と直交する。今、

$$\begin{vmatrix} b_0 & b_1 & \cdots & b_{n-1} \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n-1} & b_n & \cdots & b_{2n-2} \end{vmatrix} = \tau_n \quad (38)$$

とおくと、(36) に  $t^n$  をかけて積分することで正規化定数  $h_n$  が

$$h_n = \frac{\tau_{n+1}}{\tau_n} \quad (39)$$

であることもすぐにわかる。この  $\tau_n$  はいわゆる Hankel 行列式、従って discrete Toda molecule 方程式の  $\tau$  函数であることを注意しておく。このことから直交多項式と可積分系の理論の間に密接な関係があることがわかる。

さて、よく知られているように、 $P_n(t)$  が monic であることと、直交性ことから  $P_n(t)$  は次の 3 項間漸化式

$$tP_n(t) = P_{n+1}(t) + \frac{h_n}{h_{n-1}} P_{n-1}(t) \quad (40)$$

を満たす。また、正規化定数  $h_n$  については (35) で  $m = n$  として部分積分することにより

$$(1+2n)h_n = \int_{-\infty}^{\infty} tP_n^2(t)(2g_1t + 4g_2t^3)e^{-g_1t^2 - g_2t^4} dt \quad (41)$$

が成り立つことがわかる。(40) と (41) から  $x_n = \frac{h_n}{h_{n-1}}$  が  $dP_1$

$$x_{n+1} + x_n + x_{n-1} = \frac{n}{4g_2} + \frac{g_1}{2g_2} \quad (42)$$

を満たすことが導かれる。 $x_n$  と  $\tau_n$  の関係は (39) から

$$x_n = \frac{h_n}{h_{n-1}} = \frac{\tau_{n+1}\tau_{n-1}}{\tau_n^2} \quad (43)$$

で与えられ、つまりこれが厳密解の表示となる。これは一見 3.1 節の結果と違うように見えるが、それは次のようにして説明される。 $\tau_n$  の要素  $b_k$  は

$$b_k = \int_{-\infty}^{\infty} t^k e^{-g_1t^2 - g_2t^4} dt \quad (44)$$

であり、奇数  $k$  に対して  $b_k = 0$  となる。また、(44) を部分積分することにより

$$4g_2b_{k+4} + 2g_1b_{k+2} - (k+1)b_k = 0 \quad (45)$$

という漸化式が得られるが、 $b_{2n} = a_n$ とおくと、

$$4g_2 a_{n+2} + 2g_1 a_{n+1} - (2n+1)a_n = 0 \quad (46)$$

となり、(19)と一致する。また、 $\tau_n$ が「市松模様」になることから $\tau_n$ は因数分解され、

$$\tau_{2n} = \tau_n^0 \tau_n^1, \quad \tau_{2n+1} = \tau_{n+1}^0 \tau_n^1, \quad (47)$$

となる。これらを考慮すると本節の結果は3.1節の結果と一致する。

以上の議論から、 $P_I$ の解は本質的に超越的であるのに対して、 $dP_I$ は連続極限で構造は潰れてしまうが、行列式で表される厳密解が存在することになる。

## 4 $dP_{II}$ の厳密解

さて、 $dP_{II}$

$$x_{n+1} + x_{n-1} = \frac{(an+b)x_n + c}{1-x_n^2} \quad (48)$$

の場合、lattice type と molecule type の両方の解が存在する。

### 4.1 Lattice Type Solutions

Lattice Type の厳密解は [14],[15] でも述べてあるので詳しくはそちらを参照されたい。ここでは結果のみを述べることにする。

次の $\tau$ 関数

$$\tau_N^n = \begin{vmatrix} A_n & A_{n+2} & \cdots & A_{n+2N-2} \\ A_{n+1} & A_{n+3} & \cdots & A_{n+2N-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n+N-1} & A_{n+N+1} & \cdots & A_{n+3N-3} \end{vmatrix}, \quad (49)$$

を考える。ただし、 $A_n$ は漸化式

$$A_{n+2} = 2A_{n+1} - (pn+q)A_n \quad (50)$$

を満たすものとする。このとき、

$$x_n = \frac{\tau_{N+1}^{n+1} \tau_N^n}{\tau_{N+1}^n \tau_N^{n+1}} - 1 \quad (51)$$

は  $dP_{II}(48)$  の

$$a = 2p, \quad b = (2N-1)p + 2q, \quad c = -(2N+1)p, \quad (52)$$

の場合の解を与える。連続極限は

$$p = -\epsilon^3, \quad q = 1, \quad x_n = \epsilon w, \quad n = \frac{t}{\epsilon} \quad (53)$$



として  $\epsilon \rightarrow 0$  とすることで得られ、(48)-(51) はそれぞれ  $P_{II}$

$$\frac{d^2}{dt^2} w = 2w^3 - 2tw + (2N + 1) \quad (54)$$

とその Airy 函数解

$$\tau_N = \begin{vmatrix} Ai & \frac{d}{dx} Ai & \cdots & \left(\frac{d}{dt}\right)^{N-1} Ai \\ \frac{d}{dt} Ai & \frac{d^2}{dx^2} Ai & \cdots & \left(\frac{d}{dt}\right)^N Ai \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \left(\frac{d}{dt}\right)^{N-1} Ai & \left(\frac{d}{dx}\right)^N Ai & \cdots & \left(\frac{d}{dt}\right)^{2N-2} Ai \end{vmatrix}, \quad (55)$$

$$w = \frac{d}{dt} \log \frac{\tau_{N+1}}{\tau_N}, \quad (56)$$

に帰着する。

## 4.2 Molecule Type Solution for $dP_{II}$

Molecule type solution は次のように与えられる。まず、次の  $\tau$  函数

$$\tau_N^n = \begin{vmatrix} a_n & a_{n+1} & \cdots & a_{n+N-1} \\ a_{n-1} & a_n & \cdots & a_{n+N-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-N+1} & a_{n-N} & \cdots & a_n \end{vmatrix} \quad (57)$$

を考える。ここで、 $a_n$  は漸化式

$$a_{n+1} - a_{n-1} = pn a_n \quad (58)$$

を満たすものとする。すると、

$$x_N = \frac{\tau_N^1}{\tau_N^0} \quad (59)$$

は  $dP_{II}$

$$x_{N+1} + x_{N-1} = \frac{pN x_N}{1 - x_N^2} \quad (60)$$

を満足する。

まず、bilinear formalism の立場からは、この結果は次のようにして導かれる。 $\tau$  函数 (57) は次の双線形差分方程式を満足する。

$$\tau_N^n \tau_N^n - \tau_N^{n-1} \tau_N^{n+1} = \tau_{N+1}^n \tau_{N-1}^n, \quad (61)$$

$$\tau_{N+1}^n \tau_{N-1}^{n-1} + \tau_{N+1}^{n-1} = -pN \tau_N^n \tau_N^{n-1}, \quad (62)$$

$$\tau_{N+1}^{n+1} \tau_N^{n-1} - \tau_{N+1}^{n-1} \tau_N^{n+1} = pn \tau_{N+1}^n \tau_N^n. \quad (63)$$

これらは全て Plücker 関係式から得られることを注意しておく。ここで、 $x_N^n = \frac{T_N^{n+1}}{T_N^n}$  で定義し、 $n=0$  とおくと (63) より

$$x_N^0 x_N^{-1} = x_{N-1}^0 x_{N-1}^{-1} = x_0^0 x_0^{-1} = 1 \quad (64)$$

が得られる。これを用いると、(59) で定義される  $x_N$  について  $dP_{II}$ (60) が導かれる。

次に、直交多項式の理論からの導出 [6] であるが、 $dP_{II}$  の場合、次の measure

$$d\mu = e^{-(z+1/z)} \frac{dz}{2\pi iz} \quad (65)$$

で特徴付けられる、「単位円周上の」直交多項式

$$P_n(z) = z^n + c_{n-1,n} z^{n-1} + \cdots + c_{1,n} z + c_{0,n} \quad (66)$$

を考える ( $z = e^{i\theta}$ )。直交関係は

$$\langle P_n(z), P_m(z) \rangle \equiv \oint_{|z|=1} P_n(z) P_m(1/z) d\mu = h_n \delta_{n,m} \quad (67)$$

で定義される。この場合、 $P_n(z)$  は

$$P_n(z) = \frac{\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_n \\ a_{-1} & a_0 & \cdots & a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{-n+1} & a_{-n+2} & \cdots & a_1 \\ 1 & z & \cdots & z^n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{-1} & a_0 & \cdots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{-n+1} & a_{-n+2} & \cdots & a_0 \end{vmatrix}} \quad (68)$$

という Toeplitz 型の行列式による表示を持つ。ここで、

$$a_k = \oint z^k e^{-(z+1/z)} \frac{dz}{2\pi iz} \quad (69)$$

である。さて、 $dP_I$  の場合と同様に、

$$P_{n+1}(z) = z P_n(z) + c_{0,n+1} z^n P_n(1/z), \quad (70)$$

$$(n+1)(h_{n+1} - h_n) = - \oint \left(1 - \frac{1}{z^2}\right) p_{n+1}(z) p_n(1/z) d\mu \quad (71)$$

という漸化式を導くことができる。また、

$$\frac{h_{n+1}}{h_n} = 1 - c_{0,n+1}^2 \quad (72)$$

という関係がある。これから  $x_n = c_{0,n+1}$  に関する漸化式

$$x_{n+1} + x_{n-1} = \frac{nx_n}{1 - x_n^2} \quad (73)$$

が得られる。

以上の議論から、 $dP_{II}$  は連続極限で構造が生き残る lattice type の解と構造が潰れてしまう molecule type の解両方が存在することになる。

## 5 Remarks

以上で離散型パルベ方程式が連続極限で連続系のパルベ方程式の特殊函数解に帰着する lattice type の解と連続極限で構造が壊れてしまうような molecule type の解が存在し得ることを述べた。ここでは離散型パルベ方程式に限っていくつかの注意をしておく。

1. まず、lattice type の解は  $dP_{III}$  の場合もそうであったように、 $\tau$  函数の構造に非対称性がある。つまり、1 方向には添字が 2 ずつ飛び、別の方向には添字が 1 ずつずれていく。一方、molecule type の解の  $\tau$  函数の構造は対称的 (Hankel 行列式、または Toeplitz 行列式の形) である。直交多項式との関係から見ると molecule type の解の構造は自然であるが、lattice type の解の構造は謎めいている。このような解の構造は既知の離散型可積分系には見られない。唯一、著者の知る限りでは、KdV 方程式や modified KdV 方程式の有理解の行列式表示に同様の構造が見られるだけである [12]。これは離散型パルベ方程式共通の構造であろうか？
2. 最近の研究では、パルベ方程式の離散化が一通りではないことがわかってきている [17]-[20]。例えば、 $dP_I$ 、 $dP_{II}$ 、 $dP_{III}$  の離散化として、以下のものが知られている。  
 $dP_I$  のグループ

$$dP_I - 1: x_{n+1} + x_n + x_{n-1} = \frac{an + b}{x_n} + c, \quad (74)$$

$$dP_I - 2: \frac{an + b}{x_{n+1} + x_n} + \frac{a(n-1) + b}{x_n + x_{n-1}} = -2x_n^2 + z, \quad (75)$$

$$dP_I - 3: x_{n+1} + x_{n-1} = \frac{2z}{x_n^2} - \frac{an + b}{x_n}, \quad (76)$$

実際はもう一つの離散化が存在するが、形が複雑なので省略する。

$dP_{II}$  のグループ

$$dP_{II} - 1: x_{n+1} + x_{n-1} = \frac{(an + b)x_n + c}{1 - x_n^2}, \quad (77)$$

$$dP_{II} - 2: \frac{a(n+1) + b}{x_{n+1}x_n - 1} + \frac{an + b}{x_nx_{n-1} - 1} = c \left( x_n + \frac{1}{x_n} \right) - an + d, \quad (78)$$

dP<sub>III</sub>のグループ

$$dP_{III} - 1: \quad x_{n+1}x_{n-1} = \frac{ax_n^2 + bq^{2n}x_n + cq^{4n}}{x_n^2 + dx_n + a}, \quad (79)$$

$$dP_{II} - 2: \quad \begin{cases} x_{n+1} + x_n = \frac{(an+b)y_n + c}{y_n^2 - 1}, \\ y_n + y_{n-1} = \frac{(a(n-1/2) + b)x_n + d}{x_n^2 - 1}, \end{cases} \quad (80)$$

ここで、 $x_n$ 以外の文字はパラメータである。また、方程式の番号づけは単なる便宜上のもので、定まった名前があるわけではないことを注意しておく。dP<sub>IV</sub>、dP<sub>V</sub>と合わせて、dP<sub>I</sub>以外のものについては lattice type、molecule type 両者とも、また dP<sub>I</sub>については molecule type の解が存在することが期待される。特に molecule type の解を通じて、各方程式は直交多項式と密接に関連していることが予想される。果たして、なぜ直交多項式がパンルベ方程式と関係するのだろうか？

3. また、パンルベ方程式のもう一つのクラスの厳密解として、有理解が存在する。特殊関数解は岡本氏の研究 [21] によりその行列式表示も含めてわかっているが、有理解も行列式で記述できるようである。従って、離散型パンルベ方程式に対しても行列式表示を許す有理解のクラスが存在することが期待されている。

## 6 結言

我々は離散型パンルベ方程式の molecule type の解を通じて、直交多項式が密接に関連していることを見た。直交多項式は極めて自然な、かつ応用される範囲の広い対象である。最後に、この事実から展望される「応用解析」の視点について議論したい。

ここで強調しておきたいことは molecule type の解の重要性である。もともと、「可積分性」という概念は数理物理に端を発している。そこで、必然的に可積分系の研究者は物理的により興味深い方程式、より興味深い解の振舞いを求めて研究することになる。実際、KdV 方程式の解としてソリトン解という物理的に極めて面白い解の発見から出発し、共鳴解、ブリーザー、内部構造を持つソリトン解、など興味深い発見が今でも相次いでいる。しかし、そこでは molecule type の解はあまり興味を持たれなかったのではないだろうか。その理由は第1章でも述べたように、molecule type の解は物理的には、どんな初期値から出発してもある値に収束してしまうような現象を記述し、そこにはソリトン解のような劇的な現象はないからである。しかし、視点を変えて、例えば工学からみると、molecule type の解は重要な意味をもつ。なぜなら、

1. molecule type の解は格子番号=行列式のサイズであるから、「出発点」が存在するような系を記述する。これは工学には自然な設定である。
2. また、「ある値に収束する」という振舞いも工学に現れる問題に対しては有効である。

実際、最近、ある種の数値解析アルゴリズムは離散型可積分系そのものであることが指摘されている。例えば固有値計算アルゴリズムのLR法は discrete Toda molecule 方程式であるし [1]、数列の加速法としてよく知られている  $\epsilon$ -アルゴリズムはそのものが discrete potential KdV 方程式であったが [3, 22]、そこに現れるのは lattice type の解ではなく、molecule type の解であった。また、中村氏によって数理工学のさまざまな分野で Toda 方程式が現れることが指摘されているが、全てが Toda molecule 方程式である [23]。このように、「応用解析」の視点からは molecule type の系の解析、従って molecule type の解が重要な役割を果たすであろう。

また、直交多項式は数理工学の広範な範囲でよく使われることから、そこには離散型パルベ方程式を通じて可積分系の理論と何らかのつながりがあることが予想される。従って、中村氏の指摘するように、「よいアルゴリズムの背後には可積分な構造がある」という例はますます増えていくことであろう。また、そこでは離散系におけるパルベ性とみなされている SC はどういう役割を果たすであろうか。実際、与えられた関数を連分数で近似する際、まさに SC を使っている例が [24] に見られる<sup>1</sup>。このように、積極的に SC を用いることが有効である例は他にもあるのではなからうか。緒言において「SC は強力だがその妥当性は不明である」と述べたが、やはり SC の本質を理解することは今後の重要な研究課題であるように思われる。

## 参考文献

- [1] R. Hirota, S. Tsujimoto and T. Imai, in *RIMS Kokyuroku* **822**(RIMS, Kyoto University, 1993), 144.
- [2] K. Sogo, *J. Phys. Soc. Jpn.*, **62**(1993), 1081
- [3] V. G. Papageorgiou, B. Grammaticos and A. Ramani, *Phys. Lett.*, **A179**(1993), 111.
- [4] E. Brezin and V.A. Kazakov, *Phys. Lett.* **B236**(1990), 144.
- [5] A.R. Its, A.V. Kitaev and A.S. Fokas, *Usp. Mat. Nauk*, **45,6**(1990), 135.
- [6] V. Periwai and D. Shevitz, *Phys. Rev. Lett.*, **64**, (1990), 135.
- [7] G.R.W. Quispel, J.A.G. Roberts and C.J. Thompson, *Physica* **D34**(1989), 183.
- [8] B. Grammaticos A. Ramani, and V. G. Papageorgiou, *Phys. Rev. Lett.*, **67**(1991), 1825.
- [9] A. Ramani, B. Grammaticos, and J. Hietarinta, *Phys. Rev. Lett.*, **67**(1991), 1829.

<sup>1</sup>中村佳正氏（同志社大学工学部）の御教示による

- [10] M. Sato and Y. Sato, in *Nonlinear Partial Differential Equations in Applied Science*, ed. by H. Fujita, P.D. Lax and G. Strang (Kinokuniya/North-Holland, Tokyo, 1983), 259.
- [11] E. Date, M. Kashiwara, M. Jimbo and T. Miwa, in *Nonlinear Integrable Systems—Classical Theory and Quantum Theory*, ed. by M. Jimbo and T. Miwa (World Scientific, Singapore, 1983), 39.
- [12] M. Jimbo and T. Miwa, Publ. RIMS, Kyoto Univ. **19** (1983), 943.
- [13] Y. Ohta, J. Satsuma, D. Takahashi and T. Tokihiro, Prog. Theor. Phys. Suppl. **94** (1988), 210.
- [14] K. Kajiwara, Y. Ohta, J. Satsuma, B. Grammaticos and A. Ramani, J. Phys. A **27**(1994), 915.
- [15] 梶原健司、薩摩順吉、太田泰広、京都大学数理解析研究所講究録 **868**(1994), 19
- [16] R. Hirota, J. Phys. Soc. Jpn. **56**(1987), 4285.
- [17] B. Grammaticos and A. Ramani, in *Applications of Analytic and Geometric Methods to Nonlinear Differential Equations* ed. by P. A. Clarkson (NATO ASI series Vol.C413, Kluwer, 1993), 299.
- [18] A S. Fokas, B. Grammaticos and A. Ramani, J. Math. An. Appl. **180** (1993) 342.
- [19] A. Ramani and B. Grammaticos, J. Math. A., **25**(1992), L633.
- [20] B. Grammaticos, F.W. Nijhoff, V. Papageorgiou, A. Ramani and J.Satsuma, Phys. Lett. A(1994),
- [21] K. Okamoto, Ann. Mat. Pura. Appl., **146**(1987),377; Japan J. Math. **13**(1987), 47; Math. Ann. **275**(1986), 211; Funk. Ekvac. **30**(1987), 305.
- [22] 伊理 正夫、数值計算、朝倉書店 (1984).
- [23] 中村佳正、京都大学数理解析研究所講究録 **868**(1994), 223.
- [24] 一松 信、近似式、竹内書店 (1963).