

## 進行波解：渦なし流れと渦あり流れ

日本大学理工学部 東海林まゆみ (Mayumi Shoji)

### 1 はじめに

非粘性，非圧縮流体，2次元流れの進行波を考える。これは自由境界問題であり，支配方程式は下記のようなになる。

$$\begin{aligned} (1) \quad & -\Delta\psi = F(\psi) && \text{in } \Omega \\ (2) \quad & \psi = 0 && \text{on } y = h(x) \\ (3) \quad & \frac{1}{2}|\nabla\psi|^2 + G(\psi) + gy - \frac{T}{m}K = \text{constant} && \text{on } y = h(x) \\ (4) \quad & \frac{\partial\psi}{\partial x} = 0 && \text{on } x = \pm\frac{L}{2} \\ (5) \quad & \lim_{y \rightarrow -\infty} \left( \frac{\partial\psi}{\partial y}, -\frac{\partial\psi}{\partial x} \right) = (c, 0). \end{aligned}$$

ここで  $m, g, T, c$  は各々，密度，重力加速度，表面張力係数，波の伝播速度に対応する正定数である。また  $K$  は自由境界  $y = h(x)$  の曲率， $\psi$  は流れ関数である。 $F, G: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  は  $\psi$  の関数で， $G(\psi)$  は  $F(\psi)$  の原始関数，つまり  $G'(\psi) = F(\psi)$  である。

流体の深さは無限であるものとする。波形は  $y$  軸に関し対称で， $x$  方向に周期的（周期  $L$ ）なものを考えることにする。したがって  $h(x)$  は偶関数， $\psi(x, y) = \psi(-x, y)$  である。この対称性と周期性の条件により，流体域は

$$\Omega = \{(x, y); -\infty < y < h(x), -L/2 < x < L/2\}$$

で考えればよい。

更に関数  $F$  に対し，

$$\lim_{\eta \rightarrow -\infty} F(\eta) = 0$$

を仮定する。これは (5) 式が与えている，無限遠で一様流である，という条件に従うものである。

(1) 式は渦度方程式であり、したがって関数  $F \equiv 0$  の場合渦なし流れの問題になる。このとき問題 (1-5) は、重力と表面張力に対応する2つの分岐パラメータを持つ分岐問題になる。我々はこの渦なし流れの分岐問題に対し、種々の分岐解形状や分岐構造を数値シミュレーションによって調べてきた。([1], [2])

一方関数  $F \neq 0$  の場合は渦あり流れとなる。渦あり流れの問題に関しては、後述する Gerstner の研究が有名である。([3]) Gerstner は厳密解を与えたが、表面張力  $q$  を無視した場合のものである。

我々の今後の研究目標は、渦度に対応するもう一つの分岐パラメータを考え3つのパラメータ空間での大域的分岐構造を調べることである。そこでまずは Gerstner 波と我々が数値計算した渦なしの分岐解との関連を調べることから始めたい。

つまり例えば  $s = 0$  のとき渦なし  $s = 1$  のとき Gerstner 波に対応するような、あるもうひとつのパラメータ  $s$  ( $0 \leq s \leq 1$ ) を考える。  $s$  を変化させたときの分岐構造の変化を調べることは、水の波の分岐構造の理解をより深めることにつながるはずである。

ここでは、渦あり流れの問題に対する数値計算アルゴリズムと計算結果を紹介する。

この問題を計算する際に工夫すべき点は、自由境界をいかにして扱うかである。渦なし流れの場合は、正則関数を用いて固定境界領域での問題に定式化し直すことが出来たが、渦あり流れの場合には正則関数の理論を適用できない。しかし Zeidler ([4]) に従って、疑似ポテンシャルを導入することにより固定境界領域での問題に書き直すことができる。

以下に渦あり流れの場合の定式化を示す前に、比較の意味で渦なし流れの場合の概略も示しておく。

## 2 渦なし流れ

渦なし流れの場合は良く知られているように、流れ関数  $\psi$  に共役な調和関数である速度ベクトル  $\phi$  を定義することが出来る。つまり  $f = \phi + i\psi$  とおくと  $f(z)$ ,  $z = x + iy$  は正則関数である。  $(x, y)$  が領域  $\Omega = \{(x, y); -L/2 < x < L/2, -\infty < y < h(x)\}$  を動くとき、  $(\phi, \psi)$  は  $D^* = \{(\phi, \psi); -cL/2 < \phi < cL/2, -\infty < \psi < 0\}$  を動く。したがって (1-5) を  $f$  を用いて書き表すと、固定領域  $D^*$  での問題に帰着できる。

次に変換

$$\begin{cases} \zeta = \exp\left(-\frac{2\pi if}{cL}\right) \equiv \rho e^{i\sigma}, \\ \omega = \theta + i\tau \equiv i \log\left(\frac{1}{c} \frac{df}{dz}\right) \end{cases}$$

を施し  $(\rho, \zeta)$  によって書き表すと下記のように単位円盤  $D = \{(\rho, \sigma); |\zeta| < 1\}$  上での問題として記述できる。

"Find a function  $\omega = \omega(\zeta)$  which is continuous on  $\{|\zeta| \leq 1\}$ , is analytic in  $\{|\zeta| < 1\}$  and satisfies  $\omega(0) = 0$  and the following:

$$\frac{d}{d\sigma} \left( \frac{e^{2\tau}}{2} \right) - pe^{-\tau} \sin \theta + q \frac{d}{d\sigma} \left( e^{\tau} \frac{d\theta}{d\sigma} \right) = 0 \quad \text{on } \rho = 1 \quad (0 \leq \sigma < 2\pi),$$

$$\text{where } p = \frac{gL}{2\pi c^2}, \quad q = \frac{2\pi T}{mc^2 L}."$$

正則関数は境界での値が決まれば内部の値も一意に決定されるという事実を考慮すれば更に、単位円周上での問題に書き直すことが出来て

"Find a  $2\pi$  periodic function  $\theta$  such that

$$\frac{d}{d\sigma} \left( \frac{e^{2H\theta}}{2} \right) - pe^{-H\theta} \sin \theta + q \frac{d}{d\sigma} \left( e^{H\theta} \frac{d\theta}{d\sigma} \right) = 0, \quad (0 \leq \sigma < 2\pi)"$$

となる。ただしここで  $H$  は次のような Hilbert 変換である。

$$H \left( \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \sin n\sigma + b_n \cos n\sigma) \right) = \sum_{n=1}^{\infty} (-a_n \cos n\sigma + b_n \sin n\sigma)$$

結局渦なし流れの場合は、上記問題を解いて奇関数  $\theta(\sigma)$  を求めれば良いわけである。自由境界形状は次式から計算できる。

$$\begin{cases} \frac{dx}{d\sigma} = -\frac{L}{2\pi} e^{-H\theta(\sigma)} \cos \theta(\sigma) \\ \frac{dy}{d\sigma} = -\frac{L}{2\pi} e^{-H\theta(\sigma)} \sin \theta(\sigma) \end{cases}$$

### 3 渦あり流れ

流れ関数  $\psi$  に対して、疑似ポテンシャル  $\phi$  を次のように定義する。

$$\begin{cases} \frac{\partial \phi}{\partial x} = W \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} = -W \frac{\partial \psi}{\partial x} \end{cases}$$

ここで  $W \equiv 1$  とおくと, (6) は正則関数に対するコーシー・リーマンの関係式になる。つまり前節の渦なし流れの場合に帰着されることになる。関数  $W$  を適当に選べば 1 価関数  $\phi$  が定まるが, 一般に  $\phi$  が存在するための十分条件は

$$(6) \quad \frac{\partial W}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x} - WF(\psi) = 0$$

である。式 (6) を  $\lim_{y \rightarrow -\infty} W = 1$  の条件のもとで解くことにより  $\phi$  が得られる。

(1-5) をこの疑似ポテンシャル  $\phi$  と流れ関数  $\psi$  を用いて書き表すことを考えてみる。

まず  $\psi$  に対する対称性から  $\phi(x, y) = -\phi(-x, y)$  が言える。また (4)(6) 式により  $\phi$  は  $x = \pm L/2$  にそって一定値  $\pm cL/2$  になることがわかる。つまり  $\phi(\pm L/2, y) = \pm cL/2$  (複合同順) である。結局  $z$  が領域  $\Omega$  を動くとき  $\phi + i\psi$  は固定領域

$$D^* = \{(\phi, \psi); -cL/2 < \phi < cL/2, -\infty < \psi < 0\}$$

を動くことになる。このようにして渦ありの流れの場合も, 固定領域での問題に書きなおすことが出来る。ここでさらに変換  $(\phi, \psi) \rightarrow \frac{cL}{2\pi}(\phi, \psi)$ ,  $(u, v) \rightarrow c(u, v)$ ,  $F \rightarrow \frac{c}{L}F$  によって無次元化操作を行えば最終的に, 固定領域

$$D = \{(\phi, \psi); -\pi < \phi < \pi, -\infty < \psi < 0\}$$

での定式化が下記のように得られることになる。

[問題] 以下を満たすような関数  $u, v, W$  を求める。

$$(7) \quad W \frac{\partial u}{\partial \phi} + \frac{\partial v}{\partial \psi} = \frac{-vF(\psi)}{u^2 + v^2} \quad \text{in } D$$

$$(8) \quad W \frac{\partial v}{\partial \phi} - \frac{\partial u}{\partial \psi} = \frac{uF(\psi)}{u^2 + v^2} \quad \text{in } D$$

$$(9) \quad \frac{\partial}{\partial \phi} \left( \frac{u^2 + v^2}{2} \right) + p \frac{v}{(u^2 + v^2)W} - q \frac{\partial}{\partial \phi} \left[ \frac{W}{\sqrt{u^2 + v^2}} \left( u \frac{\partial v}{\partial \phi} - v \frac{\partial u}{\partial \phi} \right) \right] = 0 \quad \text{on } \psi = 0$$

$$(10) \quad v = 0 \quad \text{on } \phi = \pm \pi$$

$$(11) \quad \lim_{\psi \rightarrow -\infty} (u, v) = (1, 0)$$

$$(12) \quad (u^2 + v^2) \frac{\partial W}{\partial \psi} = WF(\psi)$$

$$\text{ただし } p = \frac{gL}{2\pi c^2}, \quad q = \frac{2\pi T}{mLc^2} \quad \text{である。}$$

ここで、式(7)(8)は渦度方程式(1)と非圧縮性の条件  $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$  から、式(12)は(6)式から得られる。自由境界形状は

$$\begin{cases} x = \int_{-\infty}^0 \frac{u}{W(u^2 + v^2)} d\phi \\ y = \int_{-\infty}^0 \frac{v}{W(u^2 + v^2)} d\phi \end{cases}$$

で得られる。

#### 4 Gerstner 波と数値計算

Gerstner は、深さ無限で  $q = 0$  かつ

$$(13) \quad F(\psi) = -2\nu^2 \frac{e^{2\beta(\psi)}}{1 - \nu^2 e^{2\beta(\psi)}} \\ \text{ただし } \psi = \beta - \frac{\nu^2}{2} (e^{2\beta} - 1)$$

のとき、厳密解が次式で与えられることを示した。

$$\begin{cases} x = \alpha + \nu e^\beta \sin \alpha, \\ y = \beta - \nu e^\beta \cos \alpha + \nu \end{cases}$$

ここで  $\nu \in [0, 1)$ ,  $\alpha \in (-\pi, \pi)$ ,  $\beta \in (-\infty, 0)$ 。これは等圧線がトロコイドをなす波である。(図1) この Gerstner の厳密解に対する疑似ポテンシャル  $\phi$  は具体的に求めることが出来ない。したがって Gerstner 波を  $(\phi, \psi)$  で表わすことはできない。

1節で述べたように、この Gerstner 波がパラメータ  $p, q$  の変化とともにどのように変化するかを調べるのが当面の目標であるが、ここでは  $q = 0$  の場合の数値結果のみを示す。しかしまず言えることは関数  $F(\psi)$  が(13)式で与えられるとき、任意の  $p, q$  に対して常に

$$(u, v, W) = \left( \sqrt{-2G(\psi)}, 0, 1/\sqrt{-2G(\psi)} \right), \quad \text{ただし } G'(\psi) = F(\psi) \\ = \left( \sqrt{2\nu e^{\beta(\psi)}}, 0, 1/(\sqrt{2\nu e^{\beta(\psi)}}) \right)$$

が自明解として存在することである。これは波形としては水平な波である。

以下は流体の深さが有限であるものとして、差分法を用いて数値計算した結果である。深さ有限の場合を扱うので、水底での境界条件として  $\psi = -a$  ( $a$  は正定数) を与える。したがって無次元化操作を行えば領域は長方形

$$D = \{(\phi, \psi); -\pi < \phi < \pi, -\psi_0 < \psi < 0\} \quad \text{ただし} \quad \psi_0 = \frac{2\pi a}{cL}$$

になる。条件式 (11) は次式でおき変える。

$$(11)' \quad (u, v) = (1, 0) \quad \text{on} \quad \psi = \psi_0$$

また  $F(\psi_0) = 0$  を仮定する。数値計算において、 $F(\psi_0)$  が計算機イプシロン以下になるように  $\psi_0$  をとっておく。

対称性の条件から、 $D$  の左半領域だけで計算すれば十分なので、 $x$  方向を  $m$  等分、 $y$  方向を  $n$  等分し、 $\phi_j = -\pi + jh_1$  ( $h_1 = \pi/m$ ),  $\psi_k = -\psi_0 + kh_2$  ( $h_2 = \psi_0/n$ ),  $u_{j,k} \equiv u(\phi_j, \psi_k)$ ,  $v_{j,k} \equiv v(\phi_j, \psi_k)$ ,  $W_{j,k} \equiv W(\phi_j, \psi_k)$  とおく。条件式 (10), (11)' より

$$\begin{aligned} v_{j,0} = 0, \quad v_{0,k} = v_{m,k} = 0 & \quad \text{for} \quad 0 \leq j \leq m, \quad 0 \leq k \leq n \\ u_{j,0} = 1, \quad W_{j,0} = 1 & \quad \text{for} \quad 0 \leq j \leq m \end{aligned}$$

が与えられる。よって未知数は

$$\begin{aligned} u_{j,k} \quad (0 \leq j \leq m, \quad 1 \leq k \leq n), \quad v_{j,k} \quad (0 < j < m, \quad 1 \leq k \leq n), \\ W_{j,k} \quad (0 \leq j \leq m, \quad 1 \leq k \leq n) \end{aligned}$$

の  $(3mn - n)$  個の節点値であり、これらを (7-9, 12) 式を解いて求めれば良い。まず (12) 式より

$$W(\phi, \psi) = \exp \left( \int_{-\psi_0}^{\psi} \frac{F(\xi)}{u(\phi, \xi)^2 + v(\phi, \xi)^2} d\xi \right)$$

であるから、 $u_{j,k}$ ,  $v_{j,k}$  が与えられているとき  $W_{j,k}$  はこれを台形則による数値積分をおこなった次式により計算する。

$$(14) \quad W_{j,k} = \exp \left( \sum_{i=0}^{k-1} \frac{h_2}{2} \left( \frac{F(\psi_i)}{u_{j,i}^2 + v_{j,i}^2} + \frac{F(\psi_{i+1})}{u_{j,i+1}^2 + v_{j,i+1}^2} \right) \right)$$

$$\text{for} \quad 0 \leq j \leq m, \quad 1 \leq k \leq n$$

$u_{j,k}$ ,  $v_{j,k}$  は以下の差分近似式を解いて求める。

領域内部の点 ( $1 \leq j < m$ ,  $1 \leq k < n$ ) に対して、

$$W_{j,k} \frac{u_{j+1,k} - u_{j-1,k}}{2h_1} + \frac{v_{j,k+1} - v_{j,k-1}}{2h_2} = -\frac{v_{j,k}}{u_{j,k}^2 + v_{j,k}^2} F(\psi_k)$$

$$W_{j,k} \frac{v_{j+1,k} - v_{j-1,k}}{2h_1} - \frac{u_{j,k+1} - u_{j,k-1}}{2h_2} = \frac{u_{j,k}}{u_{j,k}^2 + v_{j,k}^2} F(\psi_k)$$

自由境界上の点 ( $0 < j < m$ ) に対して,

$$\begin{aligned}
 W_{j,n} \frac{v_{j+1,n} - v_{j-1,n}}{2h_1} - \frac{3u_{j,n} - 4u_{j,n-1} + u_{j,n-2}}{2h_2} &= \frac{u_{j,n}}{u_{j,n}^2 + u_{j,n}^2} F(\psi_k) \\
 \frac{z_{j+1,n} - z_{j-1,n}}{4h_1} + p \frac{v_{j,k}}{W_{j,k} z_{j,k}} \\
 -q \left( \frac{W_{j+1,n}}{\sqrt{z_{j+1,n}}} - \frac{W_{j-1,n}}{\sqrt{z_{j-1,n}}} \right) (u_{j,n} (v_{j+1,n} - v_{j-1,n}) - v_{j,n} (u_{j+1,n} - u_{j-1,n})) &/ 4h_1^2 \\
 -q \frac{W_{j,n}}{\sqrt{z_{j,k}}} (u_{j,n} (v_{j+1,n} - 2v_{j,n} + v_{j-1,n}) - v_{j,n} (u_{j+1,n} - 2u_{j,n} + u_{j-1,n})) &/ h_1^2 \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

ただしここで  $z_{j,k} = u_{j,k}^2 + v_{j,k}^2$  とおいた。

境界  $\phi = -\pi, \phi = 0$  上の点 ( $1 \leq k < n$ ) に対して,

$$\begin{aligned}
 W_{0,k} \frac{v_{1,k}}{h_1} - \frac{u_{0,k+1} - u_{0,k-1}}{2h_2} &= \frac{u_{0,k}}{u_{0,k}^2 + u_{0,k}^2} F(\psi_k) \\
 -W_{m,k} \frac{v_{m-1,k}}{h_1} - \frac{u_{m,k+1} - u_{m,k-1}}{2h_2} &= \frac{u_{m,k}}{u_{m,k}^2 + u_{m,k}^2} F(\psi_k)
 \end{aligned}$$

自明解を初期値として、あとは (16) 式と上記差分近似式を収束するまで繰り返し計算する。

このようにして計算した結果を図 2 に示した。  $\psi_0 = 12$  にとっている。 分割は  $m = 32, n = 10$  で計算した。 ワークステーションでの計算のため分割数をあまり大きくとれず、 $\nu > 0.4$  ではやや分割不足の影響が見られる。 しかし  $\nu < 0.4$  付近の結果をみると、Gerstner 波に近い波形を得ることが出来ている。 今後スーパーコンピュータにより、 $\psi_0$  をもう少し大きくとり、分割数を増やして計算してみるつもりである。

今回の計算はまだ不十分なものではあるが、将来、渦度に対応するパラメーターを含めた分岐構造シミュレーションを行う際のアルゴリズムの第一歩を確認できたと思う。

## [謝辞]

本研究を含む水の波の分岐問題に関する一連の研究は、京都大学数理解析研究所の岡本久教授との共同研究によるものです。ここにそのおことわりと、岡本教授の多大なる御協力に対し深く感謝の意を表させていただきます。

## 参考文献

- [1] *H. Okamoto and M. Shōji*, The resonance of modes in the problem of capillary gravity waves, *submitted to Physica D*.
- [2] *H. Okamoto and M. Shōji*, Secondary and tertiary bifurcations of capillary-gravity waves, *to appear in Advances in Mathematical Sciences and Applications*.
- [3] *H. Lamb*, Hydrodynamics (*Sixth Edition, Dover, New York, 1945*).
- [4] *E. Zeidler*, Existenzbeweis für permanente Kapillar-Schwerewellen mit allgemeinen Wirbelverteilungen, *Arch. Rat. Mech. Anal.* 50, 1973, 34–72.



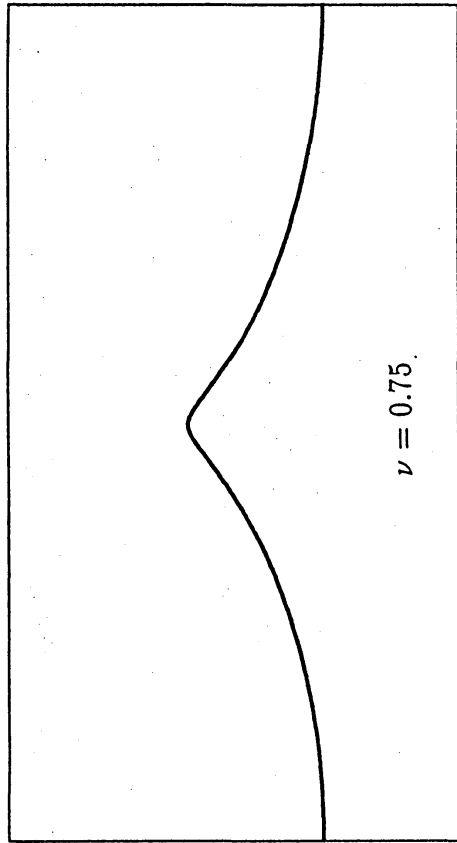
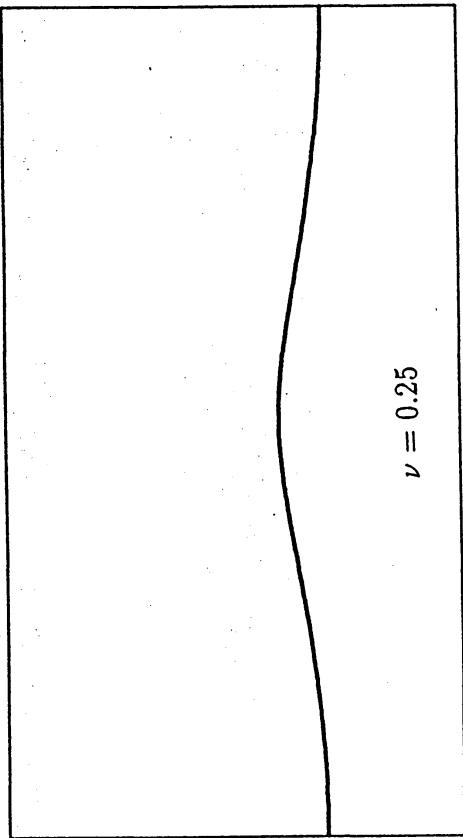
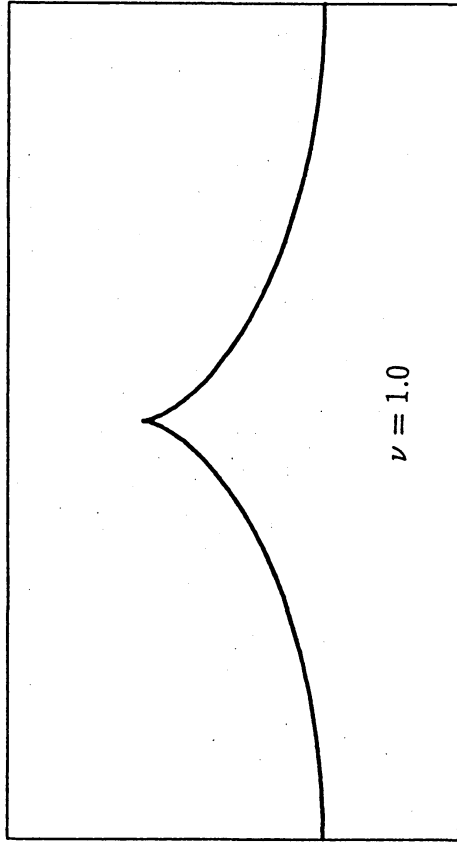
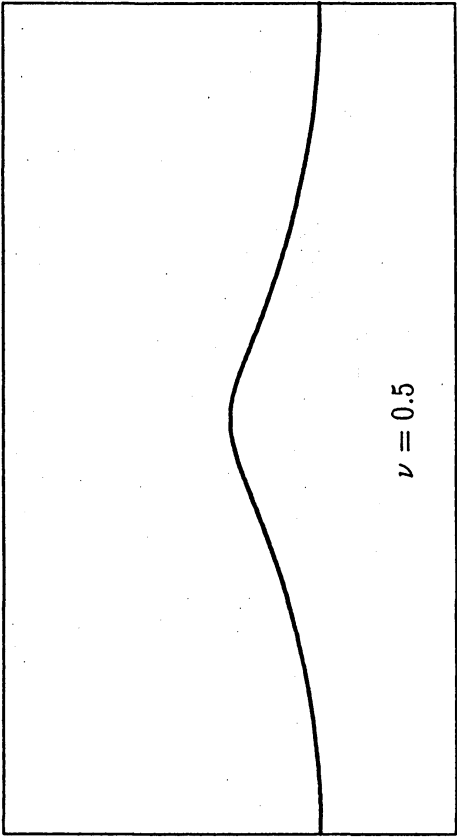


图 1

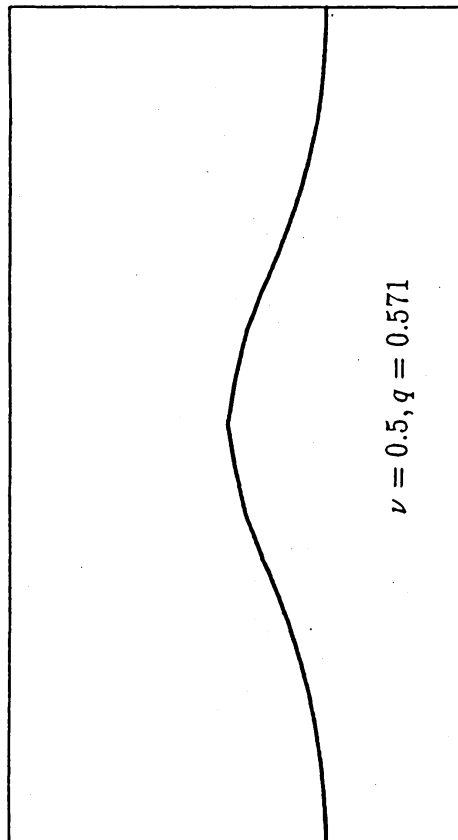
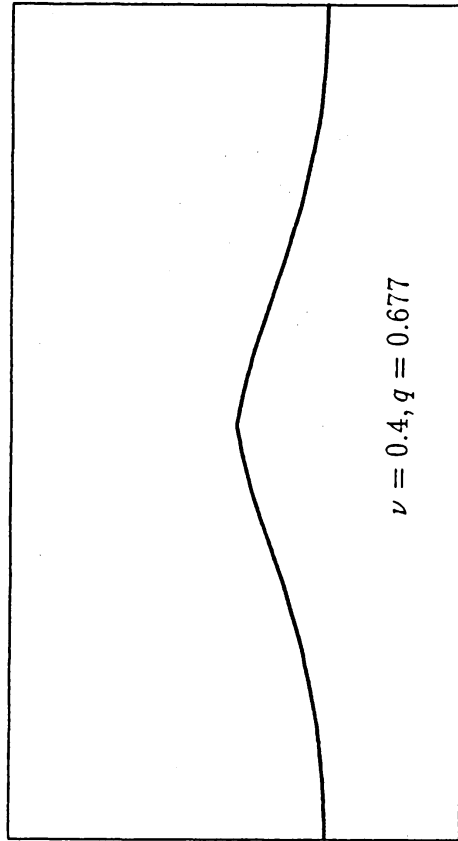
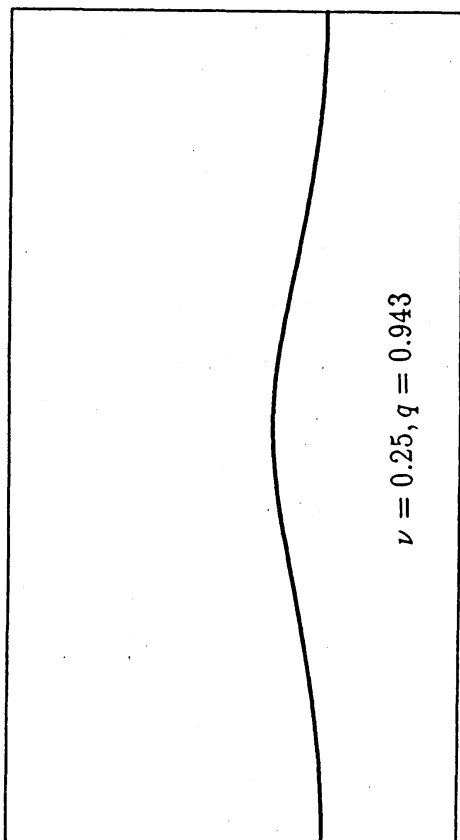
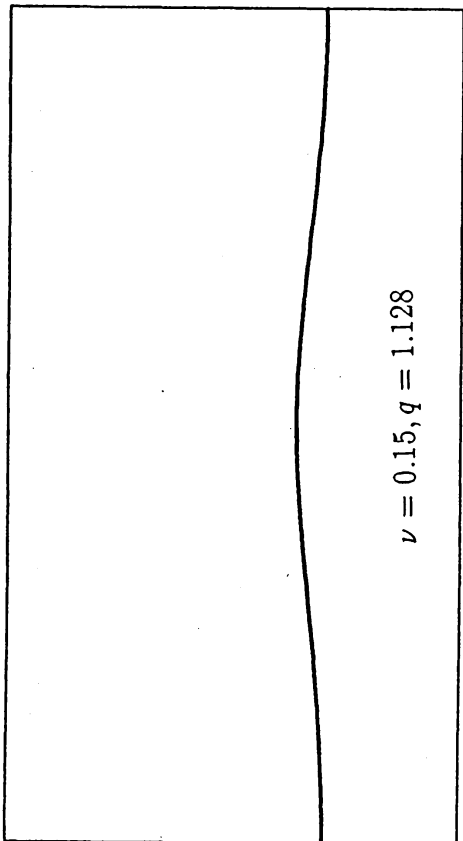


图 2