

Interface Dynamics of Multi-Coupled Reaction-Diffusion Systems

広島電機大工 高石 武史 (Takeshi Takaishi)

東大数理科学 三村 昌泰 (Masayasu Mimura)

広島大総合科 西浦 廉政 (Yasumasa Nishiura)

自然界にはさまざまなところにパターン形成システムを見出すことができる。空に浮ぶ雲、生物の体に現れる模様、動物のなわばり、その他いろいろあり、それぞれにおいていろいろなパターン形成のモデルが研究されてきている。¹⁾

ここでは、少し視点を変え、図 1 のように層状に重なりあったパターンが、それぞれ他のパターンと相互作用することによってどのように変化するかを考える。

まず、パターンを形成するシステムとしては Bonhoeffer-van der Pol 型の反応項を持つ反応拡散方程式 (Reaction-Diffusion equation) を用いる。この方程式は Activator-Inhibitor 型の 1 種であり、活性型の物質の濃度 u と、その物質を抑制しようとする物質の濃度 v のダイナミクスを表している。

この方程式で特徴的なのは、 u の拡散が v の拡散に比べて非常に遅く、かつ、 u の反応速度が非常に早いため、 u の空間プロファイルに急峻な部分が現れる場合があることである。

u の空間プロファイルを時間を追って見てみる。

図 2 (a) のようにランダムな状態からスタートすると、まず u は濃度の比較的高い部分と比較的低い部分の 2 状態へと分離していく。(図 2 (b), (c)) その後、2 状態の境界が移動しながら、安定なパターンへと変化していく。(図 2 (d))

これから後、 u の比較的高濃度な領域のパターンに注目する。

パターン間の相互作用については次のようなモデルを考える。

各パターンを形成しているシステムは、パターン形成に参与している物質が往来できるような透過膜を間にはさんで積み重ねられているものとする。(図3)そして、各々の物質は膜をはさんだ濃度勾配の大きさに比例して透過できるものとする。

透過膜をはさんでパターン形成系が相互作用しているような現象としては表皮-真皮の相互作用における突起の形成などあげられるが、Winston らによって行なわれた2つの BZ 反応系の実験は興味深い結果を提示している。²⁾ 彼らは、2つの spiral pattern が相互作用することにより、spiral の引き込みや、1つの反応系では起り得ないような新しい動的パターンが生じることを実験において発見し、数値計算においても同じ結果が見られることを示した。

ここでは、まったく同じパターン形成システムが、対称な相互作用(膜の透過しやすさが向きに依存しない)を行なっている場合について、幾つかの数値計算結果を見ていく。

ここでは次のような反応拡散方程式を用いた。

$$\begin{cases} \tau \frac{\partial u_i}{\partial t} = \varepsilon \Delta u_i + \frac{1}{\varepsilon} f(u_i, v_i) \\ \frac{\partial v_i}{\partial t} = d \Delta v_i + g(u_i, v_i) + \sum_{\text{Nearest Neighbours}} k_{i,j} (v_j - v_i) \end{cases} \quad t > 0, (x, y) \in \Omega, i = 1, \dots, N,$$

および、Neumann 型の境界条件、

$$\begin{cases} \frac{\partial u_i}{\partial x} = \frac{\partial v_i}{\partial x} & t > 0, (x, y) \in \partial \Omega \quad i = 1, \dots, N \\ u_i = v_i & t > 0, (x, y) \in \Omega \quad i = 0, N + 1. \end{cases}$$

問題の簡単化のために、膜をとおした相互作用は拡散の早い v のみで行なわれるものとしている。従って、パラメータ k が相互作用の強さを表している。(図2も含めて、数値計算例は $\tau = 0.1, \varepsilon = 0.01, d = 0.1, \alpha = 0.5, \gamma = 3, \theta = -0.5, L = 1$ で行なっている。)

筆者らは1次元パターン2枚の相互作用の場合について理論解析および数値計算を用いて既に調べている。³⁾

まず、図2(d)で得られた安定な2次元パターンを2枚用意し、微小なノイズを加えた後、相互作用させてみる。

図3は相互作用の強さ k を変えた場合の最終パターンである。 $k = 0.5$ では2つのパターンはともに元の形のまま安定に存在している。しかし、 $k = 1, 2, 5$ の場合には、2枚とも、初期のパターンとは違う、それぞれ異なるパターンへと変形している。特に $k = 5$ では、2つのパターンはお互の重なる領域が殆ど無くなるように変形している。つまり、相互作用の強さ k にはあるしきい値 k_2 が存在し、安定だった2枚のパターンは k_2 より大きい k をとることによって不安定化し、お互いができるだけ重ならないようなパターンへと変化することがわかる。

次に、3枚の2次元パターンを相互作用させる。(図4)

3枚のパターンの相互作用には次の2通りが考えられる：

- i. パターン1, 2, 3を順番に積み重ねて相互作用させる
- ii. さらに1と3も相互作用させる(自身以外の全てのパターンと相互作用させる)

2つの違いはパターン1とパターン3の相互作用を導入する(iiの場合)か、しない(iの場合)かである。

3枚の場合も、2枚の場合と同様に、i、iiともにあるしきい値 k_3 でパターンが変化することがわかる。即ち、 $k < k_3$ では元のパターンが安定であるが、 k が k_3 より大きくなるにつれて隣接したパターンとのずれが大きくなるように変形していく。ただし、iの場合にはパターン1と3が全く同じものになる(図5(a))のに対して、3つとも対等に相互作用するiiの場合には3枚の異なる(互いに独立な)パターンになってしまう。(図5(b))

これらの結果から、今回用いたモデルでは、 N 枚のパターンを積み重ねて相互作用させた場合にも、iの場合のように、2つのパターンが交互に現れる可能性が示唆

される。

ここでは安定（定常）なパターンどうしの相互作用についてのみ触れたが、ここで用いた反応拡散方程式からは周期的に時間変動するパターンも得られる。1次元周期振動パターン2枚を相互作用させた場合については、文献3に述べられているように、相互作用の強さがあるしきい値を超えるとパターンの周期振動が止り、定常パターンの時と同じ2枚のずれた（定常）パターンが生じることが数値計算からわかっている。

3枚以上の振動パターンの相互作用、また、2次元振動パターンの相互作用においては、結合振動子系との関連も含めて、さらに興味深い現象が見出せるのではないかと期待している。

参考文献

- [1] 例えば、J. D. Murray, *J. of Theor. Biol.*, 88, 161-199, 1981
- [2] D. Winston, M. Arora, J. Maselko, V. Gáspár, and K. Showalter, *Nature*, 351, 132-135, May 9 1991.
- [3] T. Takaishi, M. Mimura, and Y. Nishiura, *submitted to Japan J. of Ind. and Appl. Math.*

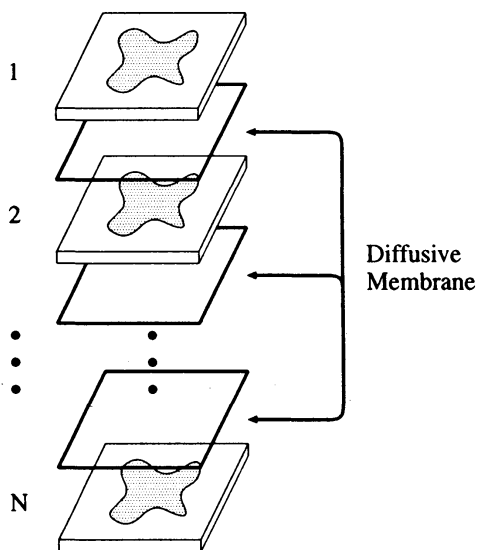
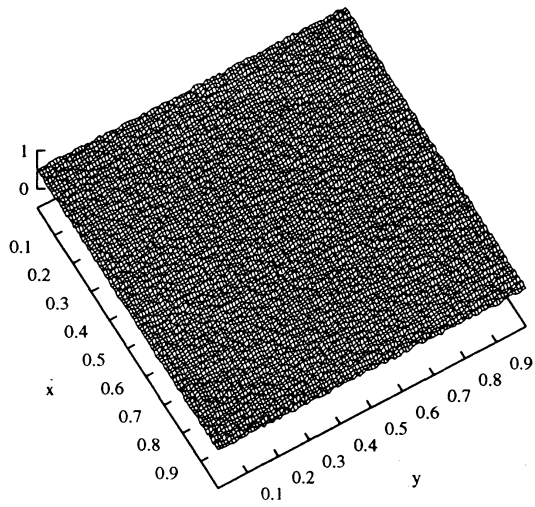
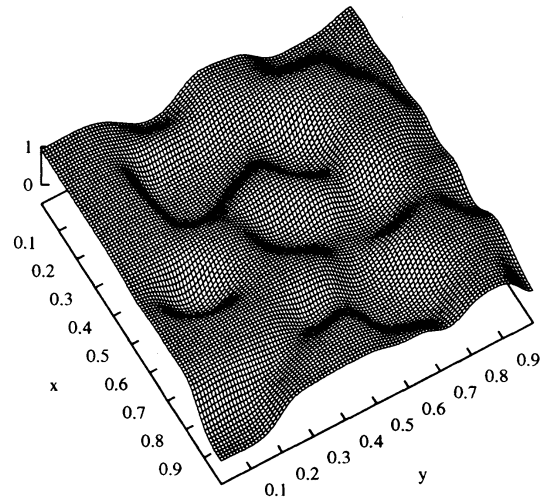


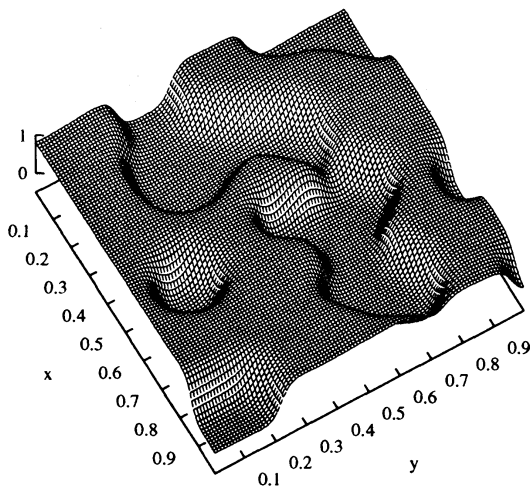
図1: N層のパターンの相互作用。各々の層はを間にはさんだ拡散性の透過膜を通して相互作用を行なっている。



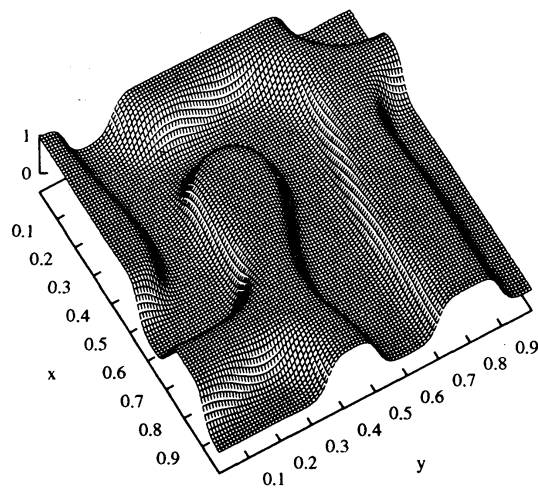
(a) Time = 0



(b) Time = 0.3



(c) Time = 0.5



(d) Time = 10.0

図2: 2次元反応拡散方程式でのパターンの形成。

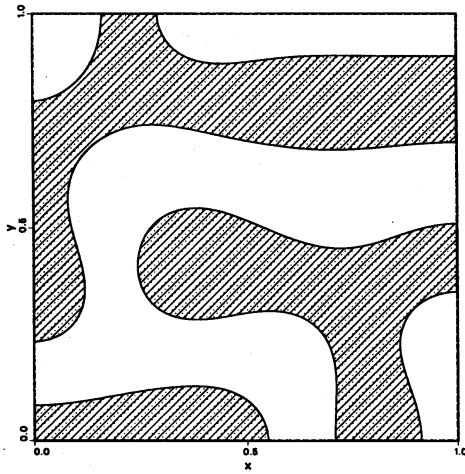
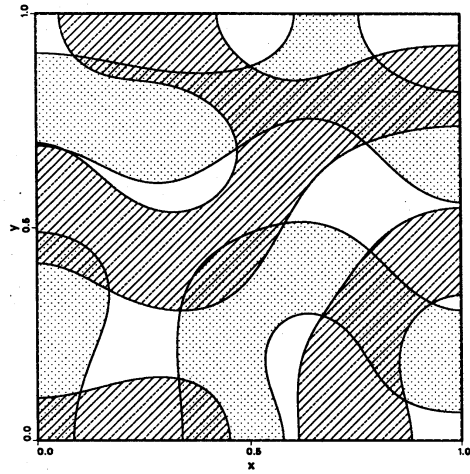
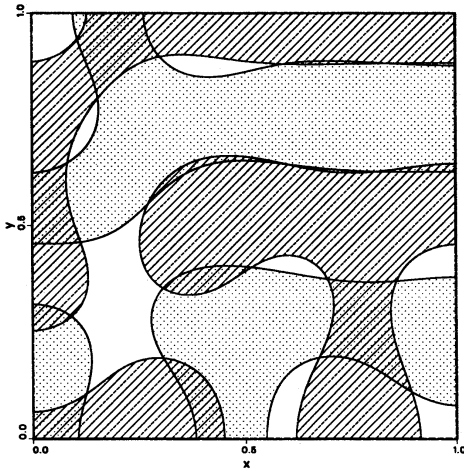
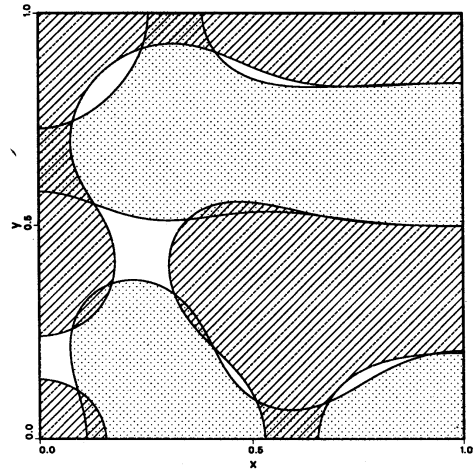
(a) $k = 0.5$ (b) $k = 1$ (c) $k = 2$ (d) $k = 5$

図3: $u_i = 0.5 (i = 1, 2)$ における等高線。(斜線部がパターン1、点がパターン2。)

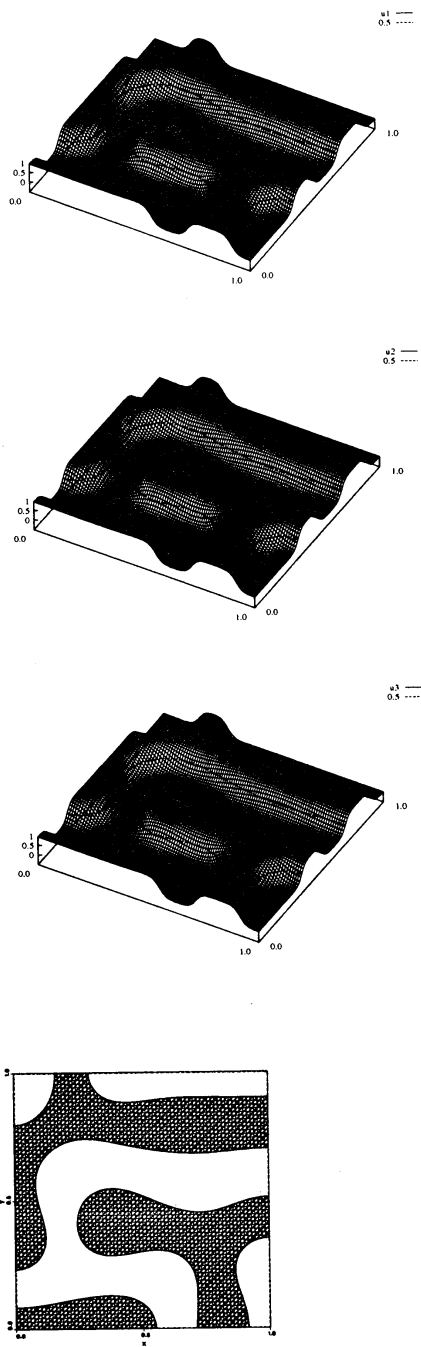
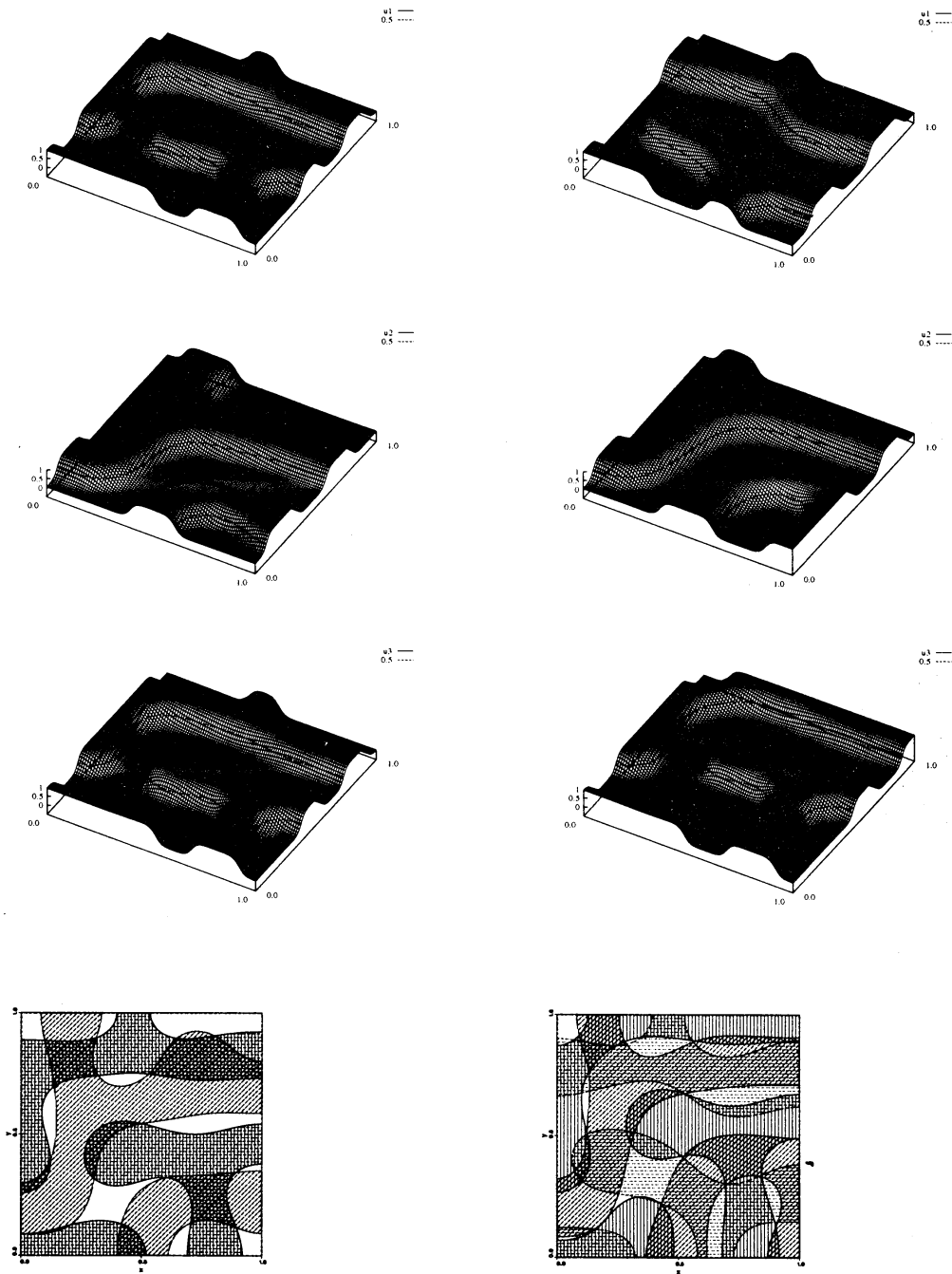


図4: 3層のパターンの相互作用。3つの同じパターンを相互作用させる。上から順に、 u_1, u_2, u_3 各々の空間プロファイル、及び、 $u_i = 0.5 (i = 1, 2, 3)$ における等高線。(横線部はパターン1、斜線部はパターン2、縦線部はパターン3。)



(a) パターン 1 と 3 が相互作用していない場合 (i の場合) (b) パターン 1 と 3 が相互作用している場合 (ii の場合)

図 5: 3 枚のパターンの相互作用の結果。