

# Burgers 流におけるエネルギー輸送の Wavelet 解析

京大理. 物理 飯間 信 (IIMA Makoto)  
京大理. 物理 藤 定義 (TOH Sadayoshi)

## 1 はじめに

一般に乱流では、何らかの機構によって生成された大スケールの運動が、非線形効果によって、段々小さなスケールに運ばれてゆき、最後に粘性によって熱に変わると考えられている。特に慣性領域では、乱流の物理機構はスケールによらないと信じられており、Kolmogorov はこのことから波数空間内のエネルギースペクトルの形を決定した。一方、物理空間における流体運動は渦度方程式を用いてよく理解される。つまり渦が速度場に流され、引き伸ばされるといふ描像をこの方程式から得ることができる。以上のことから分かるように乱流を理解するためには、波数空間内、及び物理空間内での物理量のダイナミクスを調べるのがともに重要である ([1])。

本研究の主な目的は、適切な基底、特に Wavelet 基底を用いることにより、エネルギーのスケール内移動とスケール間移動を分離し同時に観測できることを示すことである。そのためには、エネルギーのモード間輸送を適切に記述できる表式が必要である。本研究では多次元乱流を解析するための第一段階として、1次元乱流のモデル方程式であるところの Burgers 方程式を用いてその表式を得た。

速度場を直交分解したとき、そのモードのエネルギー発展方程式中の輸送項は速度について3次である。その3つのモードの内2つのモードについて、詳細釣合を成り立たせるようにこの項を分解することで、これら3つのモードに明確な役割を与えることができる。Burgers 方程式について、この定式化を第2章で与え、この定式化についての議論は Appendix で行なう。第3章では、本研究で用いる Meyer の Wavelet について、定義と主な特徴を与える。Meyer の Wavelet 基底は、スケール及び位置を表す2つのパラメータで指定され、波数空間と物理空間の両方で局在している ([2])。したがって、この基底で定義したエネルギーは、空間移動を表す目的に沿うものであると思われる。第4章では、第2章で与えた処方に基づいて、衝撃波の通過におけるエネルギーのモード間移動を観測することにより、エネルギーのスケール間移動とスケール内移動を分離できることを示す。このとき、輸送関数の時系列は時間的に細かく振動する。これは Wavelet 基底の特徴的波長と平均流速によって決まるもので、shock が観測しているモードを通過することに関係す

る時間スケールよりも短い。この効果は高周波成分を切り落とすことで取り除け、shock の通過という現象を観測できることが分かった。

最後に、平均流によるエネルギーの空間移動について、解析的な式を用いた理解を試みる。

## 2 輸送項の反対称分解

Navier-Stokes 方程式は、 $(\vec{u} \cdot \nabla)\vec{u}$  の形の強い非線形項を含んでおり、この項がエネルギーをスケール間移動させる原因であると考えられている。

しかしこの移流項は、エネルギー発展方程式中では速度について3次の輸送項として現れるので、この項を理解するためにはこの3つのモードに対し明確な役割を与えることが必要である。ここでは、この3つのモードの内2つのモード間でエネルギーのやりとりがなされている描像を得るために、この輸送項を、その内2つのモード間での詳細釣合が成立するように分解し、これをエネルギーのモード間輸送を表す単位の表式とする。

1次元 Burgers 方程式は、

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -u \frac{\partial u}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (1)$$

と書かれる。

ここで、 $u$  を直交展開する。

$$\begin{cases} u = u^{(1)} + u^{(2)} + u^{(3)} + \dots, & (u^{(i)} \text{は実関数}) \\ \int u^{(i)} u^{(j)} dx = 0 & (i \neq j). \end{cases} \quad (2)$$

このように  $u(x)$  を展開すると、各モードのエネルギーの定義は

$$E^{(i)} := \frac{1}{2} \int (u^{(i)})^2 dx \quad (3)$$

と置くことができる。すると、ある一つのモードのエネルギーの発展方程式は次のように書ける。

$$\frac{d}{dt} E^{(c)} = \sum_{a,b} T(a : b \rightarrow c) + \nu D(c). \quad (4)$$

(4) 式の第一項が輸送項であり、これを次式で定義される表式の和として分解することができる。

$$T(a : b \rightarrow c) := -\frac{1}{6} \int u^{(a)} \left\{ u^{(c)} \frac{\partial u^{(b)}}{\partial x} - u^{(b)} \frac{\partial u^{(c)}}{\partial x} \right\} dx. \quad (5)$$

(4) 式第二項は粘性項で、その表式は、

$$D(c) := \frac{1}{2} \int u^{(c)} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx. \quad (6)$$

このように選んだ  $T(a : b \rightarrow c)$  は

$$T(a : b \rightarrow c) + T(a : c \rightarrow b) = 0 \quad (7)$$

という性質を満たしており、モード  $b$  とモード  $c$  の間で詳細釣り合いが成り立っている。またモード  $a$  はモード  $b$  とモード  $c$  の間でエネルギーがやりとりされるために必要である。したがって  $T(a : b \rightarrow c)$  は、モード  $a$  の流れによってモード  $b$  からモード  $c$  に運ばれる単位時間あたりのエネルギーの大きさと考えても良い。

$T(a : b \rightarrow c)$  の特徴は、 $b$  と  $c$  が反対称であることと、 $a, b, c$  を循環的に回して加えたものがゼロになることである。

$$T(a : b \rightarrow c) + T(b : c \rightarrow a) + T(c : a \rightarrow b) = 0 \quad (8)$$

この3つの相互作用による、各モードのエネルギー変化を  $\Delta E^{(a)}, \Delta E^{(b)}, \Delta E^{(c)}$  とすると、これらは

$$\begin{cases} \Delta E^{(a)} = T(b : c \rightarrow a) + T(c : b \rightarrow a) \\ \Delta E^{(b)} = T(c : a \rightarrow b) + T(a : c \rightarrow b) \\ \Delta E^{(c)} = T(a : b \rightarrow c) + T(b : a \rightarrow c) \end{cases} \quad (9)$$

となり、式 (7) よりこれら3つの式の和は0となる。従って Fourier 基底における triad interaction のようなものを非 Fourier で構成するためにここで定義したような  $T$  の表式を用いることも出来る。

今逆に与えられた  $\Delta E^{(a)}, \Delta E^{(b)}, \Delta E^{(c)}$  から式 (7), 式 (9) を解くことを考えると、解は一意に決まらず、解は1つのパラメーターを用いて記述される。このパラメーターは式 (8) の左辺として表されるものでこのようにパラメーターを選ぶことは和をとったりする時に便利である。また、この選択は flux の定義とも対応している。(Appendix 参照)

更に

$$T(b \rightarrow c) := \sum_a T(a : b \rightarrow c) \quad (10)$$

と、定義する。この  $T(b \rightarrow c)$  は、単位時間あたりにモード  $b$  からモード  $c$  に運ばれる全エネルギーの大きさと考えても良い。

また、 $T(b \rightarrow c)$  についても

$$T(b \rightarrow c) + T(c \rightarrow b) = 0 \quad (11)$$

という関係が成立する。

### 3 Meyer の Wavelet 基底について

この章では我々が用いた Meyer の Wavelet の定義とその特徴を与える。  
まず、無限回微分可能な実関数  $\tilde{\phi}_0(k)$  を以下の条件を満たすように選ぶ。

$$\tilde{\phi}_0(k) \geq 0, \quad \tilde{\phi}_0(k) = \tilde{\phi}_0(-k). \quad (12)$$

$$\tilde{\phi}_0(k) \text{ は } k \geq 0 \text{ で単調減少。} \quad (13)$$

$$\begin{cases} \tilde{\phi}_0(k) = 1 & (|k| \leq \frac{2}{3}\pi), \\ \tilde{\phi}_0(k) = 0 & (|k| \geq \frac{4}{3}\pi), \\ \{\tilde{\phi}_0(k)\}^2 + \{\tilde{\phi}_0(k - 2\pi)\}^2 = 1 & (\frac{2}{3}\pi \leq k \leq \frac{4}{3}\pi). \end{cases} \quad (14)$$

このような  $\tilde{\phi}_0(k)$  を用いると、 $\tilde{\psi}_0(k)$  は次のように定義できる。

$$\tilde{\psi}_0(k) = \exp(-\frac{k}{2}i) \sqrt{\{\tilde{\phi}_0(\frac{k}{2})\}^2 - \{\tilde{\phi}_0(k)\}^2}. \quad (15)$$

- $\psi_0(x)$  は  $\tilde{\psi}_0(k)$  の Fourier 変換で得られる。

$$\psi_0(x) = \frac{1}{2\pi} \int \tilde{\psi}_0(k) e^{ikx} dk. \quad (16)$$

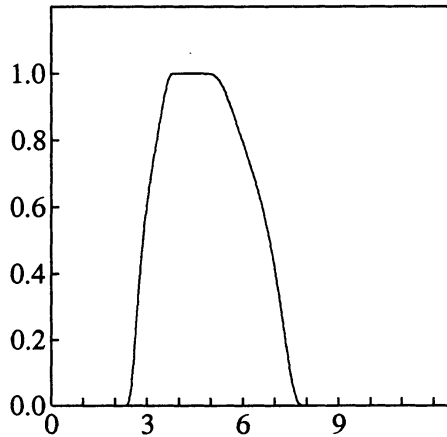


Fig.1

$|\tilde{\psi}_0(k)|$  のグラフ。 $\frac{2}{3}\pi \leq k \leq \frac{8}{3}\pi$  の範囲で compact support である。

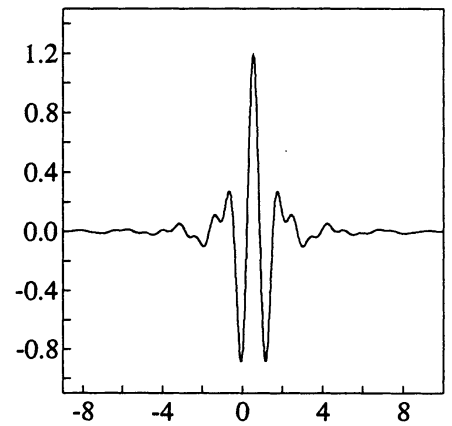


Fig.2

$|\psi_0(x)|$  のグラフ。一般に  $\psi_j^m(x)$  は  $x = 2^{-m}(j + \frac{1}{2})$  に対して対称であり、そこから離れるとどんな  $x$  の中より早くに減衰する。

$\tilde{\phi}_0(k)$  の選び方は一意でないが、ここでは次のようにして決定した。(M.Yamada and K.Ohkitani[1])

$$\tilde{\phi}_0(k) = \sqrt{g(k)g(-k)}. \quad (17)$$

ここで

$$g(k) = \frac{h(\frac{4}{3}\pi - k)}{h(k - \frac{2}{3}\pi) + h(\frac{4}{3}\pi - k)}. \quad (18)$$

$$h(k) = \begin{cases} \exp(-\frac{1}{k^2}) & (k > 0) \\ 0 & (k \leq 0) \end{cases}. \quad (19)$$

このような  $\psi_0(x)$  を用いると、Wavelet 基底は、 $\psi_0(x)$  の  $2^m$  のスケール変換とその平行移動によって作り出せる。式に書くと、

$$\psi_j^m(x) = 2^{m/2}\psi_0(2^m x - j) \quad (m, j \in \mathbf{Z}). \quad (20)$$

このように定義した Wavelet 基底は完全正規直交系をなしており、任意の関数を一意的に展開出来る。ただし、波数 0 の成分を表せない関係上、定数関数は表現できない。

$$\int \psi_j^{m*}(x)\psi_{j'}^{m'}(x)dx = \delta_{j,j'}\delta_{m,m'}, \quad (21)$$

$$f(x) = \bar{f} + \sum_{m,j} \hat{f}_j^m \psi_j^m(x). \quad (22)$$

$$(\hat{f}_j^m \text{は展開係数; } \bar{f} \text{は } f(x) \text{の平均}) \quad (23)$$

この基底は、スケールを表すパラメーター  $m$  と位置を示すパラメーター  $j$  の組で指定される。また、 $x = 2^{-m}(j + 1/2)$  に対して対称であり、そこから充分離れるとどんな巾関数より早く減衰する。そして、波数空間では compact support である。このような意味で、Wavelet 基底  $\psi_j^m(x)$  は、波数空間でも物理空間でも局在していて、それらの幅の積は基底によらず一定である。

$$\Delta x \Delta k \sim \text{一定} \quad (24)$$

なお、周期 1 の周期関数を自由度  $2^N$  ( $N$ は整数) で表現するには、 $\{(m, j) | 0 \leq m \leq N-1; 0 \leq j \leq 2^m - 1\}$  という範囲で基底を取れば良い。<sup>1</sup>

<sup>1</sup>もちろん、定数関数を除く。定数部分を付け加えることにより自由度が  $2^N$  となるのである。

## 4 衝撃波通過の観測

### 4.1 速度場の分解

3章で定義した Wavelet 基底を用いてエネルギーを定義するとき、衝撃波の移動に伴って次々に進行方向のモードが励起されていく。一方、エネルギーはスケール間移動して小さいスケールに移っていくと考えられる。

これを観測するため、 $u$  を次のように分解する。つまり、Wavelet 基底の1つのモードに関する成分を選び、これを基準のモードにとる。そして、そのモードより大きなスケールのモードと小さなスケールのモード、さらに同スケールの成分では考えているモードの右と左にあるモードを定義する。そうして、衝撃波が基準のモードを通過する際の、これら4つのモードと基準のモードとのエネルギーのやりとりを調べる。これが本章での目的である。

衝撃波が基準のモードを通過する時、このモード自身が空間的に振動しているため、各モードの量は時間的に振動する。これにともない、エネルギーの輸送量も時間的に振動する。この取り扱いについても後に触れる。

速度場を次のように分解する。

$$u(x) = u^{(\text{obs})} + u^{(\text{large})} + u^{(\text{small})} + u^{(\text{right})} + u^{(\text{left})} \quad (25)$$

$u^{(\cdot)}$  のそれぞれの定義は、 $m_0(1 \leq m_0 \leq N-1)$  に対して

$$\begin{aligned} u^{(\text{obs.})} &:= \hat{u}_{j=0}^{m_0} \psi_{j=0}^{m_0}(x), \\ u^{(\text{large})} &:= u_0 + \sum_{m=0}^{m_0-1} \sum_{j=0}^{2^m-1} \hat{u}_j^m \psi_j^m(x), \quad (u_0 \text{ は平均流}) \\ u^{(\text{small})} &:= \sum_{m=m_0+1}^N \sum_{j=0}^{2^m-1} \hat{u}_j^m \psi_j^m(x), \\ u^{(\text{right})} &:= \sum_{j=1}^{2^{m_0-1}-1} \hat{u}_j^{m_0} \psi_j^{m_0}(x), \\ u^{(\text{left})} &:= \sum_{j=2^{m_0-1}}^{2^{m_0}-1} \hat{u}_j^{m_0} \psi_j^{m_0}(x). \end{aligned} \quad (26)$$

Wavelet の1つのモードを取り出した  $u^{(\text{obs.})}$  のエネルギーと、それ以外のモードとのエネルギーのやりとりを第一章で定義した  $\mathcal{I}$  を用いて、数値計算によって観測した。

## 4.2 条件

数値計算に用いた条件を表にまとめる。

項目	大きさ	備考
自由度 ( $2^N$ )	$N = 10$	
境界条件	周期1の周期境界条件	
方法(1)	擬スペクトル法	aliasing error は 2/3rule で取り除いている。
方法(2)	4 次の Runge-Kutta 法	
粘性	$6.0 \times 10^{-3}$	
time step	$5.0 \times 10^{-5}$	
初期条件	$2 \sin(2\pi x) + 2$	
$u^{(\text{obs.})}$	$m_0 = 5, j = 0$	比較のため、 $m_0 = 6, j = 0$ とした場合も調べた

## 4.3 Wavelet 基底の影響によるゆらぎ

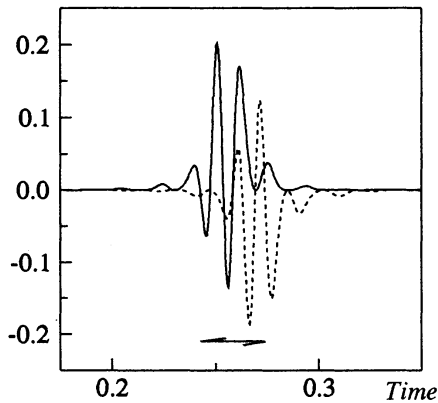


Fig.3

$T(\text{left} \rightarrow \text{obs.})$ ,  $T(\text{right} \rightarrow \text{obs.})$   
(それぞれ実線、破線)のグラフ。

大域的な変動の部分と細かい振動の部分を持つ。

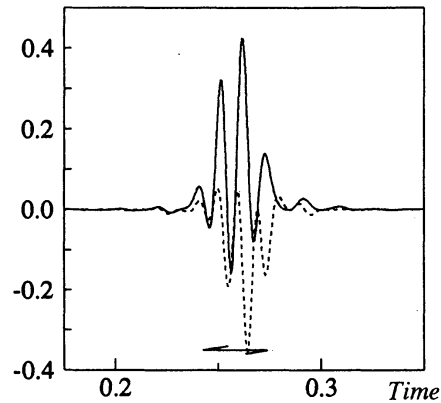


Fig.4

$T(\text{large} \rightarrow \text{obs.})$ ,  $T(\text{small} \rightarrow \text{obs.})$   
(それぞれ実線、破線)のグラフ。

Fig.3 と同じ特徴を持つ。

数値計算において、2.1 で定義した  $T$  を用いて  $T(\text{large} \rightarrow \text{obs.})$  等の量の時系列をとった。これらを図示したのが Fig. 3 及び Fig. 4 である。

$T(\text{large} \rightarrow \text{obs.})$ ,  $T(\text{left} \rightarrow \text{obs.})$  は平均して正であり、 $T(\text{small} \rightarrow \text{obs.})$ ,  $T(\text{right} \rightarrow \text{obs.})$  は平均して負になっている。したがって、この時間間のエネルギーのモード間輸送には大別して2つの部分があり、それらは大きなスケールから小さなスケールに流れる部分と左から右に向かってながれる部分であったことがわかる。

しかしながら、これらの量の時系列はどれも大域的な変動と細かい振動成分を合わせ持っている。これは空間移動とスケール間移動を同時に観測しようとしたために起こるもので、 $u^{(\text{obs.})}$  を作るのに用いた基底が空間的に振動しているためである。そしてこれはエネルギーの空間移動として考えられる時間スケールよりも短いものである。従って、これは本質的ではないと思われる。

以上のことをはっきりさせるために、 $T(\cdot \rightarrow \text{obs.})$  を周波数成分に分解した。更に比較のため、 $u^{(\text{obs.})}$  として  $m_0 = 6, j = 0$  のモードを選び、同じことをした。これらはそれぞれ Fig.5 及び Fig.6 に示されている。Fig. 5 に見られる2つのピークのうち、高周波側のものが基底の波長によるものと考えられる。考えているスケールを半分にした Fig. 6 の場合、2つ目のピークを与える周波数は Fig. 5 の場合のその2倍程度になっており、さきの推測の正しさが裏付けられた。

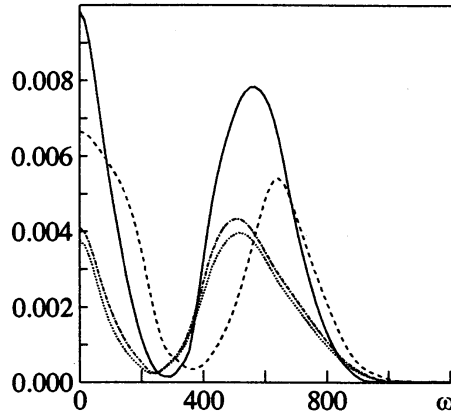


Fig.5

$m = 5$  の場合の、 $T(\text{large} \rightarrow \text{obs.})$ ,  $T(\text{small} \rightarrow \text{obs.})$ ,  $T(\text{left} \rightarrow \text{obs.})$ ,  $T(\text{right} \rightarrow \text{obs.})$  の周波数成分のグラフ。(順に、実線、破線、一点鎖線、点線)。どれも高周波成分にもピークを持つ。

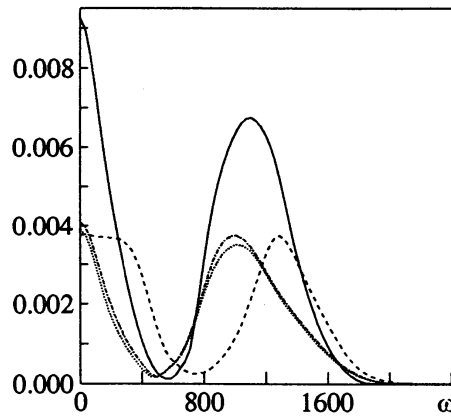


Fig.6

Fig.5 と同じ。ただし、 $m = 6$ 。  
高周波部分のピークの出る位置が Fig.5 の2倍のところにある。

この高周波成分を取り除けば大域的な変動が得られるはずであり、 $m_0 = 5, j = 0$  の場合についてそれを行なったのが Fig. 7, Fig. 8 である。このような操作によって、 $T$  の本質的な振舞いを取り出せたことが分かり、先に述べたエネルギーの輸送の様子が明らかになった。

なお、ピークの出る時間に差が出るのはエネルギーがモードを伝わるのに時間がかかるからで、Fig.7 と Fig.8 でその時間差が異なることは、エネルギーがこのスケールを通過して大スケールから小スケールに輸送されるのにかかる時間と、左のモードから右モードに輸送されるのにかかる時間が異なることを意味している。



Fig.7 のピークの時間差に対応する特徴的時間  $\tau_L$  は、非線形項によって shock が形成されるのにかかる時間を用いて見積もることができる。簡単のため周期 1 の周期境界条件のもとで、振幅 1 の最大スケールの揺らぎとして次の様なものを考える。

$$\begin{cases} 4(x + \frac{1}{2}) & (-\frac{1}{2} \leq x \leq -\frac{1}{4}) \\ -4x & (-\frac{1}{4} \leq x \leq \frac{1}{4}) \\ 4(x - \frac{1}{2}) & (\frac{1}{4} \leq x \leq \frac{1}{2}). \end{cases} \quad (27)$$

粘性を無視した場合、 $0 \leq t \leq \frac{1}{4}$  におけるこの揺らぎの時間発展はただちに計算でき、それは

$$\begin{cases} -\frac{4}{1+4t}(x + \frac{1}{2}) & (-\frac{1}{2} \leq x \leq -\frac{1}{4} + t) \\ \frac{4}{1-4t}x & (-\frac{1}{4} + t \leq x \leq \frac{1}{4} - t) \\ -\frac{4}{1+4t}(x - \frac{1}{2}) & (\frac{1}{4} - t \leq x \leq \frac{1}{2}). \end{cases} \quad (28)$$

ここで、ピークの距離が縮まることによってエネルギーがスケール間移動すると考えられるので、ピークの距離でスケールリングを行なうと、この shock のエネルギーが  $L_m = 2^{-m}$  のスケールに達するのにかかる時間  $T_m$  は

$$\begin{aligned} (\frac{1}{4} - T_m) - (-\frac{1}{4} + T_m) &= L_m \times \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow T_m &\sim \frac{1}{4}(1 - L_m) \end{aligned} \quad (29)$$

となるので、 $L_m$  のスケールにエネルギーが留まっている時間スケール  $\tau_m$  は、

$$\tau_m \sim T_{m+1} - T_m \sim 2^{-m-3} \quad (30)$$

のように見積もることができる。

局所的な平均流の大きさを  $U_L(x)$  とすると空間移動に関する特徴的時間  $\tau_L^{Sweep}(x)$  は

$$\tau_L^{Sweep}(x) \sim \frac{L}{U(x)} \quad (31)$$

と、見積もられる。

また、 $U_L(x)$  についても、平均流の影響が強ければ  $U_L(x) \sim U_0$ 、平均 0 の場合は  $U_L(x) \sim \sqrt{2E}$  として見積もれるし、理想的には

$$U_L(x) \sim \int_{-k}^k \tilde{U}_k e^{ikx} dk \quad (k \sim 1/L) \quad (32)$$

として見積もることが出来る。

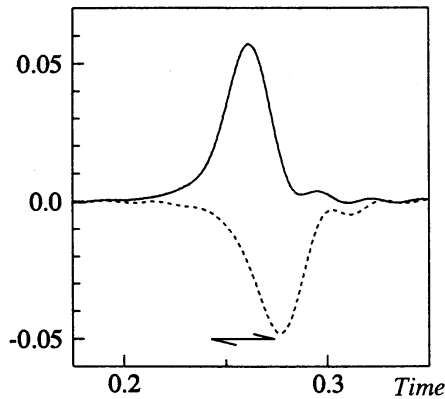


Fig.7

$m = 5$  の場合の、 $T(\text{left} \rightarrow \text{obs.})$ ,  $T(\text{right} \rightarrow \text{obs.})$  について、高周波成分を取り除いたグラフ。(それぞれ、実線、破線)。ピークの時間がずれているのは、エネルギーが伝わるのに時間がかかることを表している。

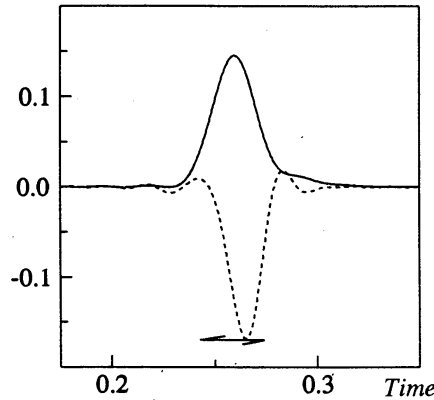


Fig.8

同様に、 $m = 5$  の場合について  $T(\text{large} \rightarrow \text{obs.})$ ,  $T(\text{small} \rightarrow \text{obs.})$  の高周波数成分を取り除いたグラフ。(それぞれ実線、破線)。

#### 4.4 Sweeping Effect の解析的表現

この節では、平均流の果たす役割を解析的に計算する。

Burgers 方程式における平均流は Galilei 変換で消すことができるものである。平均ゼロの1つの衝撃波は動かないので、衝撃波はこの平均流で流される。従って、 $T(p:q \rightarrow r)$  のうちモード  $p$  が平均流であるものはエネルギーを同スケールの中で移動させる働きをもつ筈である。これを解析的に調べることにする。

簡単のため、衝撃波を階段関数で近似する。

$$\begin{aligned} u(x) &= (-\Theta(x - x_0) + \frac{1}{2}) + \hat{u}^{(0)} \\ &= -\int_{-\infty}^x \delta(x' - x_0) dx' + \frac{1}{2} + \hat{u}^{(0)}. \end{aligned} \quad (33)$$

するとこの場合には、 $\hat{u}_j^m$  が、以下に示すように  $\psi$  の積分の形で表される。その前に、 $\hat{u}^{(m)}(y)$  を次のように定義する。

$$\hat{u}^{(m)}(y) := \int_{-\infty}^{\infty} u(x) \cdot 2^{\frac{m}{2}} \psi(2^m x - y) dx. \quad (34)$$

$y = j$  ( $j$ は整数) としたものが  $\hat{u}_j^m$  に一致している。これを整理すると、

$$\begin{aligned} \hat{u}^{(m)}(y) &= 2^{1+\frac{m}{2}} \int_{-\infty}^{x_0} \psi(2^m x - y) dx \\ &= 2^{1+\frac{m}{2}} \int_{-\infty}^{x_0 - 2^{-m}y} \psi(2^m z) dz. \end{aligned} \quad (35)$$

この関数の形は、 $y = x_0$  のまわりで振動する形をしており、隣合うピークの間隔は、概ね  $2^{-m}$  程度である。したがって  $\hat{u}_j^m$  は、衝撃波の波面から離れるにつれて指数的に減衰するような振舞いを示し、しかも  $j$  が一つちがうごとに符号を変えることが見てとれる。

次に、 $\mathcal{T}$  を計算する。

今、特に  $q, r$  が  $(m_0, j_1), (m_0, j_2)$  ( $j_1 \neq j_2$ ) を表していて、 $p$  が平均流を表している場合を考える。すると、 $\mathcal{T}$  は、

$$\mathcal{T}(\text{平均流} : j_1 \rightarrow j_2) = -\hat{u}^{(0)} \hat{u}_{j_1}^{m_0} \hat{u}_{j_2}^{m_0} \frac{1}{6} \int \left\{ \psi_{j_2}^{m_0} \frac{\partial}{\partial x} \psi_{j_1}^{m_0} - \psi_{j_1}^{m_0} \frac{\partial}{\partial x} \psi_{j_2}^{m_0} \right\} dx \quad (36)$$

となるが、これは解析的に計算できる。

$$\int \psi_{j_1}^{m_0} \frac{d}{dx} \psi_{j_2}^{m_0} dx = 4^{m_0} \left\{ \frac{1}{j} (2 - (-1)^j) + \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi} (4 \sin(2jk) - \sin(jk)) \tilde{\phi}^2(k) dk \right\} \quad (37)$$

$$\left( \text{ここで } j = j_1 - j_2 \right) \quad (38)$$

より、結果は、

$$\begin{aligned} \mathcal{T}(\text{平均流} : j_1 \rightarrow j_2) &= \hat{u}^{(0)} \hat{u}_{j_1}^{m_0} \hat{u}_{j_2}^{m_0} \mathcal{T}_c(j) \\ \mathcal{T}_c(j) &:= -\frac{1}{6} \left\{ 4^{m_0} \left\{ \frac{2}{j} (2 - (-1)^j) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 2 \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi} (4 \sin(2jk) - \sin(jk)) \tilde{\phi}^2(k) dk \right\} \right\}. \end{aligned} \quad (39)$$

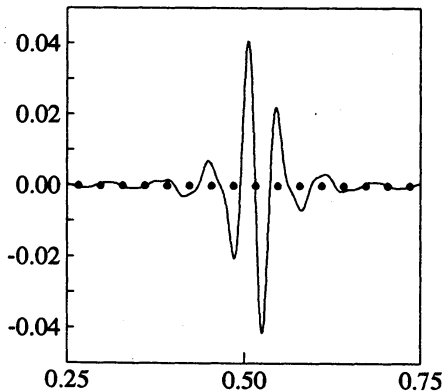


Fig.9

(32) の右辺を  $x_0 - 2^{-m}y$  の関数として描いたグラフ。黒丸の間隔は  $2^{-m}$  で、これが概ね  $\hat{u}^m(y)$  の半波長分に相当する。

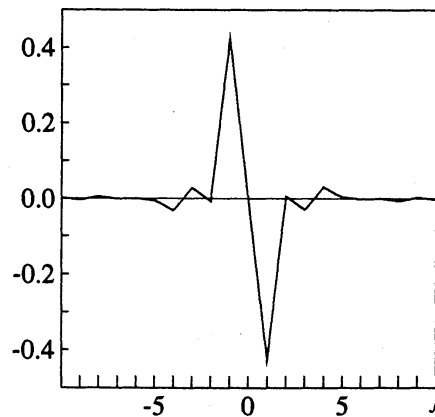


Fig.10

$\mathcal{T}_c$  のグラフ。  $j = \pm 1$  に大きなピークをもつ。

ここで  $\tilde{\phi}$  は Wavelet の定義に出てきた関数である。 $T_c(j)$  は、 $j > 0$  の時は負、 $j < 0$  の時は正の符号を持っていて、 $j = \pm 1$  のところに大きなピークをもっている。

この関数が  $j^{-1}$  の envelope を持っていることと、先に述べたように  $\hat{u}_j^m$  が衝撃波面から離れるにつれて指数的に落ちていくことから、 $T$  が主に効いてくるのはほとんど  $|j_1 - j_2| = 1$  となる  $j_1, j_2$  の間だけである。

Fig.9 より隣あう  $\hat{u}_j^m$  は概ね異符号であり、 $j_2 - j_1 = 1$  の場合  $T_c$  は負の大きな値を持つので、平均流が正の場合、 $T$ (平均流:  $j_1 \rightarrow j_2$ ) は  $j > 0$ , つまり右に向かってエネルギーが流される様子を表している。

なお、平均流によるエネルギーのモード間移動を考える時、 $(m_0, j)$  に関するモードのエネルギーは  $(m_0 \pm 1, \cdot)$  にも移動する可能性がある。(この場合  $m = m_0, m_0 \pm 1$  以外のモードへはエネルギーは移動しない。)  $(m_0 \pm 1, \cdot)$  に対する  $T_c$  も上と同様に計算できるがその大きさは  $(m_0, j \pm 1)$  へのそれに比べて充分小さい。

## 5 まとめ

非線形項によるエネルギーの輸送を非 Fourier 基底で表す時、原則的には勝手に選んできた全ての3つのモードが相互作用してエネルギーの変化を引き起こしうる。このことは非 Fourier 基底での非線形相互作用の数が非常に増えることを意味するばかりではなく、これらのそれぞれの自由度が大幅に増加することで一つ一つの相互作用に拘泥し過ぎることの危険性を示唆する。このことを回避するには適切な和を取れば良いのだが、今度は和を取った時の解釈の問題が出てくる。何を見るために和を取ったのかを考えるために、一つの相互作用でエネルギーがそれぞれのモード間でやりとりされているものとして、これら2つのモード間のエネルギーの流れを決めておくことと便利である。第三のモードについて和を取れば2つのモード間のエネルギーのやりとりを評価できるからである。

また、Wavelet 基底で定義したエネルギーは空間とスケールの情報を合わせ持ち、モード間のエネルギー輸送はスケール内移動とスケール間移動をともに表している。そこでその移動の様子を調べるために2つのモード間で詳細釣合のなりたつ  $T(p \rightarrow q)$  という関数を定義し、これを用いて衝撃波の移動を観測し、良好な結果を得るための手法を得た。

この結果、衝撃波が移動する時、基準モードでのエネルギーに対し同スケールでのエネルギーが、左から流れ込んで右に流れ出すことを観測することができた。また、解析的にその振舞いを調べ、予想通り平均流が Sweeping の効果を表すことが示された。同様に大きなスケールでのエネルギーが流れ込んで、小さなスケールのそれに流れ出していくことも同時に観測できた。従って、上で書いたような処方、スケール及び位置についての現象を表す時に分かりやすい表現を与えることがわかった。

しかしながら、以上のことはある時刻での  $T$  の瞬間値を見るだけでは分からない。その理由は考えているモードに位置とスケールの情報を持たせていることによりため、ともに幅があるためである。したがって、衝撃波の幅より大きい幅を持つモードについては、衝撃波が進むに従うエネルギーの移動は時間的な揺らぎを持つのである。

$T$  の周波数成分をしらべることにより、このことを明らかにした。有効な輸送量を見

るにはこの場合考えている現象の速度スケールと位置の幅で決まる時間で平均をとる必要があるが、ここでは高周波成分を切り落とすことにより  $T$  の大域的な時間変動を取り出した。

今後の展望としては第一章で定義した  $T$  を用いてさらに色々な現象を解析していきたい。

## 謝辞

筆者達は研究会での発表の機会を与えて下さり、有益な助言を与えて下さった木田重雄先生に感謝します。

## Appendix: エネルギーの流れの定義について

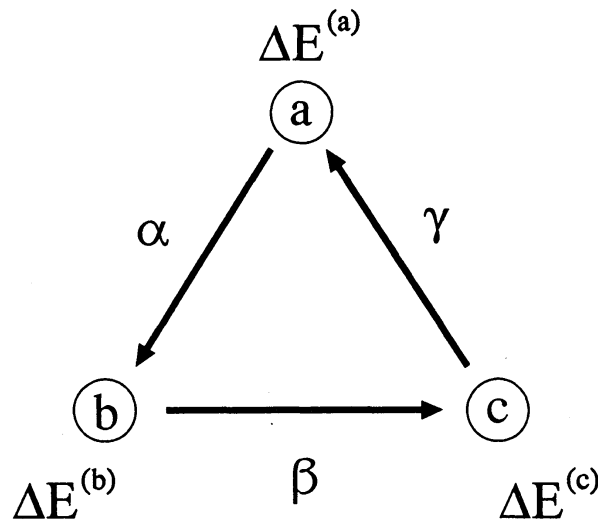


Fig.A1

triad interaction においては、エネルギーをある3つのモードの相互作用からなる部分集合に分解して、この3つの内部でエネルギーを保存させるという考え方を適用した。いわゆる triad interaction では Fourier 基底においてのみその構成が可能であったのだが、一般の基底、特に Wavelet 基底を用いた同様な構成を考えたい。

同時に、このようなモード間のエネルギー流を考えたい。これは上述のような、その中でエネルギーを保存させる部分集合の構成に役立つのみならず、適切な和をとることによって、任意基底で表されるモード間のエネルギー輸送の定量的な評価を与えることが出来る。ただし、このエネルギー流は一意的に定まらないので何らかの仮定をおく。ここでは一組の部分集合の内の、考えている二つのモード間のエネルギー流は、その二つのモードのエネルギー変化量の差に比例すると仮定し、特にこの二つのエネルギーの変化量が等しい時はこのモード間にエネルギー流はないと要請する。これは一つの triad ではエネルギーが循環しないということに対応する。

今、非線形項の影響によるエネルギーの各モードの変化量を、ある基底を用いて分解することでその和が0となるような部分和に分けたとする。それらを  $\Delta E^{(a)}, \Delta E^{(b)}, \Delta E^{(c)}$  とすると、

$$\Delta E^{(a)} + \Delta E^{(b)} + \Delta E^{(c)} = 0 \quad (40)$$

このエネルギー変化が、自分以外の2つのモードとのエネルギーのやりとりによって起こったとし (energy flow と呼ぶことにする)、それらを図に示したように  $\alpha, \beta, \gamma$  とおくと、 $\Delta E^{(i)}$  は  $\alpha, \beta, \gamma$  を用いて次のように表せる。

$$\begin{cases} \Delta E^{(a)} = \gamma - \alpha \\ \Delta E^{(b)} = \alpha - \beta \\ \Delta E^{(c)} = \beta - \gamma \end{cases} \quad (41)$$

(40) および (41) の3つの式は独立ではないので  $\alpha, \beta, \gamma$  は一意的には定まらないが、パラメータ  $f$  を用いて、

$$\begin{cases} \alpha = \frac{1}{3}\{\Delta E^{(b)} - \Delta E^{(a)}\} + f \\ \beta = \frac{1}{3}\{\Delta E^{(c)} - \Delta E^{(b)}\} + f \\ \gamma = \frac{1}{3}\{\Delta E^{(a)} - \Delta E^{(c)}\} + f \end{cases} \quad (42)$$

と、表すことができる。ただし、 $f$  は任意関数であり、 $\alpha, \beta, \gamma$  によって

$$f = \alpha + \beta + \gamma \quad (43)$$

と表される。 $f$  はこの集合においては定数関数である。 $f = 0$  のときは

$$\alpha + \beta + \gamma = 0 \quad (44)$$

となる。つまり条件 (44) はこの三角形のなかでのエネルギーの循環が0であることと同等であり、今回は  $f = 0$  という選択をした。

この条件をおけば、 $\alpha, \beta, \gamma$  を選ぶこととエネルギーの変化を、(40) を満たすような  $\Delta E^{(a)}, \Delta E^{(b)}, \Delta E^{(c)}$  の組で分解することは同値なので、先ず条件 (44) を満たすような  $\alpha, \beta, \gamma$  を選び、それから3つのモードの変化量を定めても良い。本文中では後者の構成法を用いた。

さて、いま微分方程式によるエネルギー変化を、その中でエネルギーが保存するような3つの要素を持つ部分集合に分解した場合を考えた。そしてその中でエネルギー変化を成り立たせるようなエネルギーの流れを仮定した。ここでは式 (42) で  $f = 0$  おいてエネルギーの流れを定義したのだが、この選択はいつも予想どおりの流れを表すとは限らない。ただし、考えているモード間のエネルギーの流れを考える時、関係する部分集合についての和を取る時に、 $f$  の値がこれらの部分集合ごとに異なるとエネルギー変化量が同じモード間でエネルギーが流れるように見えるといった解りにくい描像を与えることになる。

いま、一例としてエネルギーが3つのモードに分割されたとする。それらの名前を仮に left mode, right mode, other mode とし、エネルギーが other mode の働きにより left  $\rightarrow$  right と運ばれているような場合について考えることにする。Burgers 方程式で言うと、例えば other mode は大スケールの流れを表すと考え、それに比べて小さな構造 (shock な

ど) がこの大スケールの流れにより流されている状況である。この相互作用で、right, left, other の各モードのエネルギーの変化量 (それぞれ  $\Delta E^{(R)}, \Delta E^{(L)}, \Delta E^{(O)}$  と書く) が、

$$\begin{cases} \Delta E^{(R)} = a > 0 \\ \Delta E^{(L)} = -a < 0 \\ \Delta E^{(O)} = 0 \end{cases} \quad (45)$$

のようであった時、(42) の定義に従えば、これら 3つのモード間のエネルギーの流れは ( $F(a \rightarrow b)$  はモード  $a$  から  $b$  への流れを表すとすると)

$$\begin{cases} F(L \rightarrow R) = \frac{2}{3}a + f' \\ F(O \rightarrow R) = \frac{1}{3}a + f' \\ F(L \rightarrow O) = \frac{1}{3}a + f' \end{cases} \quad (46)$$

のように計算されるが、other mode はエネルギー変化がないのだから  $f' = -\frac{1}{3}a$  として  $F(O \rightarrow R) = F(L \rightarrow O) = 0$  である方がもっともらしいとも思える。しかしながら、もしこの2つの部分集合を合わせた場合に、全体としてはこの2つのモードがエネルギー変化をもたないならばこのような流れは和を取ることで相殺される。

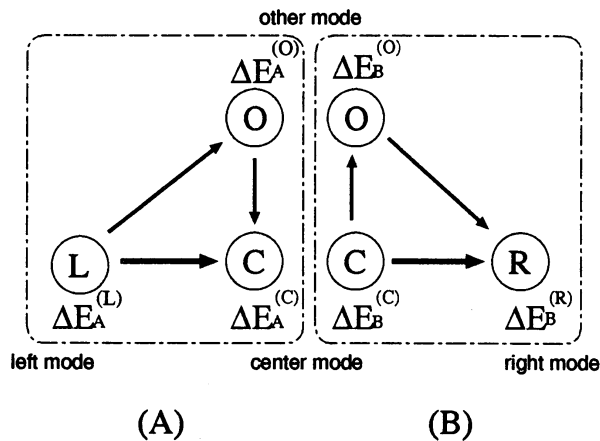


Fig.A2

そのことについて考察するために今度はエネルギーを4つのモードに分け、それらを right mode, center mode, left mode, other mode とし、エネルギーが other mode の働きにより left  $\rightarrow$  center  $\rightarrow$  right と運ばれているような場合について考えることにする。この中の2つの部分集合 left mode, center mode, other mode, center mode, left mode, other mode をそれぞれ A, B と名付け、各々のエネルギー変化を  $\Delta E_A^{(R)}, \Delta E_A^{(C)}$  ... と書くことにすれば、先と同様にこれらは

$$\begin{cases} \Delta E_A^{(C)} = a > 0 \\ \Delta E_A^{(L)} = -a < 0 \\ \Delta E_A^{(O)} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \Delta E_B^{(R)} = a > 0 \\ \Delta E_B^{(C)} = -a < 0 \\ \Delta E_B^{(O)} = 0 \end{cases} \quad (47)$$

と、仮定できる。このとき、(42) より、

$$\begin{cases} F_A(L \rightarrow C) = \frac{2}{3}a + f_1, \\ F_A(O \rightarrow C) = \frac{1}{3}a + f_1, \\ F_A(L \rightarrow O) = \frac{1}{3}a + f_1, \end{cases} \begin{cases} F_B(C \rightarrow R) = \frac{2}{3}a + f_2, \\ F_B(O \rightarrow R) = \frac{1}{3}a + f_2, \\ F_B(C \rightarrow O) = \frac{1}{3}a + f_2. \end{cases} \quad (48)$$

この  $A, B$  2つの部分集合について考える時、other mode と center mode のエネルギーの変化率は

$$\Delta E_A^{(L)} + \Delta E_B^{(L)} = 0, \quad \Delta E_A^{(C)} + \Delta E_B^{(C)} = 0.$$

であり、また other mode と center mode の間を流れるエネルギーは

$$F_A(O \rightarrow C) + F_B(O \rightarrow C) = f_1 - f_2.$$

となる。エネルギーの変化率が同じモード間ではエネルギーのやりとりがないとする見方をとるとすれば、 $f_1 = f_2$  とすることでこれらのモード間でエネルギーが流れない描像を与える。この定数を恒等的に 0 とおくと、どのような部分集合の組で和を取っても、その中でのエネルギーの流れは、考えている 2つのモード間でのエネルギー変化率の差に比例することになり、エネルギーの流れの描像が得やすいと思われる。

では、このような Ghost flow はなぜ起こるのだろうか。今までとは別の例として、原点にある shock (shock A) を sin 関数で展開する場合を考え、原点から充分離れたところにもう一つの小さな shock (shock B) がある場合を考える。この速度場のスペクトルは  $k \rightarrow 0$  で滑らかに 0 になる、あるいは shock B のある付近での平均流は 0 であるとする。このとき、shock A が shock B に対して与える Sweeping の効果について考える。

shock B のあるあたりでは shock A は影響を及ぼさないのでもちろん shock B は場所を変えないが、展開モードそれぞれについて shock B が位置を変えるような影響を被らないかということそうではない。この場合の速度場は以下のように展開出来るとする。

$$\begin{aligned} u(x) &= (\text{大きな shock}) + (\text{小さな構造}) \\ &= \sum_k U_k(x) + u'(x) \end{aligned} \quad (49)$$

ここで、例えば  $U_k(x) = -\frac{1}{k} \sin(kx)$  で、 $k$  は正とする。このとき展開した各モードの  $u'(x)$  のあるあたりでの値は一般に 0 ではなく、これら各モードは  $u'(x)$  で表されるモードを色々な速度で移動させようと作用する。しかし全体ではこれらの作用は相殺され、この小さな構造は動かない。Ghost flow はこのような効果を反映していると思われるので、さきの 3つの要素をもつ部分集合で分解し、その中のエネルギーの動きについても考えたい流れを表す部分和を取って解析しないと、誤解を招くおそれがある。一般的にはエネルギーの移動を考えている 2つのモード以外の第三のモードについて、全体で和をとればよい。

さて、この flow の定義はいわゆる flux とも対応しており、普通の意味での flux をこの定義で表すと、普通使われている定義と同じ値を与える。Fourier 空間でのエネルギー方程式は  $k, p, q$  は波数の大きさを表すとして

$$\frac{d}{dt} E(k) = \sum_{p,q} T(k : p, q) + \nu D(k)$$



という形にかける。ここで  $T(k : p, q)$  は輸送項を表しており、 $D(k)$  は粘性項を表している。波数  $k$  を横切るいわゆる flux は、

$$\Pi(k) = \frac{1}{2} \int_k^\infty dr \int_0^k \int_0^k T(r : p, q) dp dq - \frac{1}{2} \int_0^k dr \int_k^\infty \int_k^\infty T(r : p, q) dp dq \quad (50)$$

と変形でき、速度場を波数が  $k$  より小さいモード (large scale mode) と大きいモード (small scale mode) に分けるとき、large scale mode とうしの相互作用による small scale mode のエネルギーの変化量と、small scale mode とうしの相互作用による large scale mode のエネルギーのそれとの差の半分として理解される。

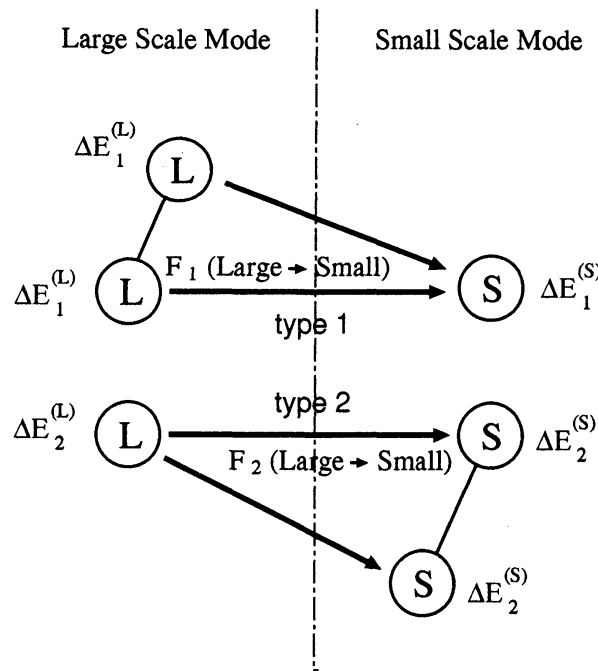


Fig.A3

前者の相互作用を type 1, 後者を type 2 して、それぞれによる large scale mode, small scale mode の変化量を  $\Delta E_1^{(L)}, \Delta E_1^{(S)}, \Delta E_2^{(L)}, \Delta E_2^{(S)}$  と書くことにするとこれらの間には、A, B 各集合内でのエネルギーが保存するので

$$\Delta E_1^{(S)} = -2\Delta E_1^{(L)} \quad (51)$$

$$\Delta E_2^{(L)} = -2\Delta E_2^{(S)} \quad (52)$$

という関係式が成立する。(50) より、いわゆる flux は上の量を持ちいると

$$\Pi(k) = \Delta E_1^{(S)} - \Delta E_2^{(L)} \quad (53)$$

と、表される。(42) において  $f = 0$  としたもので flow を計算するとこの2つの相互作用で large scale mode から small scale mode へ運ばれるエネルギーは

$$F_{all}(\text{Large} \rightarrow \text{Small}) = 2 \times F_1(\text{Large} \rightarrow \text{Small}) + 2 \times F_2(\text{Large} \rightarrow \text{Small})$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2}{3}(\Delta E_1^{(S)} - \Delta E_1^{(L)}) + \frac{2}{3}(\Delta E_2^{(S)} - \Delta E_2^{(L)}) \\
&= \Delta E_1^{(S)} - \Delta E_2^{(L)} \\
&= \Pi(k)
\end{aligned} \tag{54}$$

となり、flux の定義 (50) と同じになる。

#### 参考文献

- [1] C. Meneveau, J. Fluid Mech. **232**(1991) 469-520
- [2] M. Yamada and K. Ohkitani, Fluid Dyn. Res. **8**(1991) 101-115
- [3] M. Farge, Annu. Rev. Fluid Mech. **24**(1992) 395-457
- [4] R. Kraichnan, Phys. Fluids **10**, (1967) 1417-1423
- [4] R. Kraichnan, J. Fluid Mech. **47**(3), (1971) 525-535
- [5] F. Waleffe, Phys. Fluids A, **4**(2), (1992) 350-363