

渦 - 衝撃波相互作用による渦度の生成

京大数理研 三浦英昭 (Miura Hideaki)
京大数理研 木田重雄 (Kida Shigeo)

概要

渦と衝撃波の相互作用による渦度生成について直接数値計算と衝撃波の接続条件を用いて解析した。圧縮性流体の直接数値計算で実現された衝撃波について衝撃波と渦度の向きの関係を調べた。また、衝撃波の前面と後面での渦度を比較することにより、衝撃波の通過にともなう渦度の生成を確認した。この渦度の生成を説明するため、衝撃波の接続条件を用いて衝撃波の曲率効果によって一様流から生成される渦度を求めた。この解析では衝撃波に接する方向に渦度が生成されるなど、直接数値計算によって実現される数値データを支持する結果を得るとともに、渦度と傾圧項が平行になることがわかった。

1 はじめに

渦と衝撃波の相互作用については圧縮性流体のダイナミクスにおいて重要な役割を演じる大きな問題としてこれまでに多数の研究がなされてきた ([1] 及びその参考文献を参照)。直接数値計算では Lee et al. [2, 3, 4], Kida and Orszag [5, 6, 7] などがこの問題を扱っている。線形理論では Ribner の Linear Interaction Approximation (LIA)[8] と Rapid Distortion Theory (RDT)[9] の 2 種類の理論がある。またこれらの理論とは別に 2 次元の流れの場合について、衝撃波面の形を仮定した上で生成される渦度を木田 [10] が求めている。この問題を複雑にしているのは、たとえ衝撃波の前面で流れが一様であっても衝撃波の曲率効果によって衝撃波の後面では渦度が生じてしまう点である (クロッコの定理 [11])。この渦度生成と衝撃波面の変形のため、生成される渦度の状況は極めて複雑になる。

本論文の構成は以下の通りである。第 2 節では直接数値計算による渦と衝撃波の相互作用の実現とその解析を扱う。第 3 節では衝撃波面の形を仮定した上で衝撃波面前後での物理量の接続条件を用いて渦度の生成を論じる。これは木田 [10] の結果を 3 次元に拡張したものになっている。第 4 節は前 2 節で得た結果についての考察を行なう。

2 直接数値計算

2.1 基礎方程式

基礎方程式は3次元圧縮性流体の連続の式、運動量方程式、エネルギー方程式で、

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho}{\partial t} &= -\frac{\partial(\rho u_i)}{\partial x_i}, \\ \frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i u_j)}{\partial x_j} &= -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{2}{Re} \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ S_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) \right\} + \rho F_i, \\ \frac{\partial E_T}{\partial t} &= -\frac{\partial}{\partial x_i} [(E_T + p)u_i] + \frac{1}{M_0^2 P_r Re (\gamma - 1)} \Delta T \\ &\quad + \frac{2}{Re} \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ u_j \left[S_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) \right] \right\} + \rho u_i F_i\end{aligned}$$

と表す。ここに

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

である。これらの式では流体は理想気体の状態方程式 $p = \rho T / \gamma M_0^2$ に従うものとしている。また、簡単のため μ, κ は定数とし、体積粘性率 $\chi = 0$ を仮定した。式中の Re, P_r, M_0 はそれぞれレイノルズ数、プラントル数、マッハ数であり、

$$Re = \frac{\rho_0 u_0 l_0}{\mu}, \quad P_r = C_p \frac{\kappa}{\mu}, \quad M_0 = \frac{u_0}{c_0}$$

で定義される。ここで ρ_0, u_0, l_0 はそれぞれ代表的な密度、速度、長さであり、 C_p は定圧比熱である。代表的な音速 c_0 は代表的な温度 T_0 を用いて $c_0 = \sqrt{\gamma R T_0}$ で求められる。この方程式系についての数値計算を擬スペクトル法とルンゲクッタ法を用いて 64^3 個の格子点上で行なった。この計算では擬スペクトル法で発生する aliasing error を完全には除去せず、 $k = \sqrt{k_1^2 + k_2^2 + k_3^2} \geq \frac{1}{2}N$ なる波数成分についてのみ除去した。また、流体に加えられる外力は波数 $k^2 \leq 3$ の成分を励起し、位相がランダムになるように設定した。

この数値計算についての諸パラメータはレイノルズ数 $Re = 400$ 、プラントル数 $P_r = 0.7$ 、マッハ数 $M_0 = 2$ 、時間きざみ $\Delta t = 0.05$ 、外力比 $F_R : F_C = 1 : 1$ とした。ここで F_R, F_C はそれぞれ外力の回転部分と圧縮部分を示し、外力 F をヘルムホルツ分解して得られる波数 k に垂直なベクトルと平行なベクトルの大きさを表している。初期条件は格子点数 32^3 の計算で得られた統計的定常状態の解を波数空間で 64^3 の空間に埋め込んだものを用いた。この数値計算の方法と、ここで扱われていないレイノルズ数についての実行結果については [6],[7] に収録されているのでそちらを参照されたい。今回の数値計算で [6],[7] と異なるのは外力による励起領域を増やしたことだけである。

2.2 数値計算結果

前節に述べた直接数値計算によって得られた流れ場の基礎的な物理量を以下に示す。図1は密度、運動量、全エネルギーについての空間パワースペクトルである。こ

これらのスペクトルは片対数、両対数グラフともに尾部が直線的に見えることから、この計算はかろうじてエネルギー散逸領域が現れる限界上の精度を保っていると考えられる。図2は微小尺度によるレイノルズ数 R_λ 、乱流マッハ数 M_t 、エネルギー散逸率 ϵ_d の時間推移である。 R_λ, M_t はそれぞれ

$$R_\lambda = \sqrt{\frac{5R_e}{3\epsilon_d} \langle \rho \rangle \langle |u|^2 \rangle}, \quad M_t = \sqrt{\left\langle \left(\frac{|u|}{c} \right)^2 \right\rangle}$$

で定義される。エネルギー散逸率は

$$\epsilon_d = \frac{4}{3} \langle |\nabla \cdot \mathbf{u}|^2 \rangle + \langle |\omega|^2 \rangle$$

で定義され、この右辺第一項、第二項をそれぞれ圧縮性散逸率、回転性散逸率と呼ぶ。但し、 $\langle \rangle$ は空間平均を表す。これらの量は $T \gtrsim 70.0$ で統計的にほぼ定常な状態に達している。

図3には典型的な流れ場の様子としてエンストロフィー $\frac{1}{2}|\omega|^2$ とディラテーション $\nabla \cdot \mathbf{u}$ の等値面を示した。この等値面のレベルはエンストロフィーが $\frac{1}{2}|\omega|^2 = 0.4$ 、ディラテーションが $\nabla \cdot \mathbf{u} = -1.0$ である。この図から、管状エンストロフィーと薄層状のディラテーションが流れ場を特徴づけていることがうかがえる。特に、薄層状のディラテーションについてはその前後に密度、圧力の急勾配があることから衝撃波であると認定することができる。実際、幾つかの場合についてディラテーションの極小値の移動速度を用いて流れ場にガリレイ変換を施し、流速と音速との比を求めると薄層状のディラテーションを挟んで一方が超音速、他方が亜音速になっていることがわかっていく。また、管状エンストロフィーと薄層状のディラテーションが交錯しているところでは、エンストロフィーの管が衝撃波前面に比べて後面で太くなっており、しかも時間が経過するに連れてその傾向は著しくなっていることがわかる(図4)。更に、交錯部分を詳しく調べると、渦線が衝撃波の前後で大きく屈折していることがわかる(図5)。この図では、管状エンストロフィーの外周部分に位置する渦度の弱い渦線ほど大きく屈折している。

この交錯面での渦と衝撃波の関係を調べるため、圧力勾配と渦度の角度

$$\theta_p = \arccos \left(\frac{\nabla p \cdot \boldsymbol{\omega}}{|\nabla p| \cdot |\boldsymbol{\omega}|} \right)$$

の分布を図6に示す。図6(a),(b) はそれぞれ横軸に圧力勾配の大きさ、エンストロフィーの大きさをとったものである。圧力勾配が大きいところでは90度付近に多数の格子点があること、エンストロフィーが大きいところでは45度付近に多数の格子点があることがわかる。また、圧力勾配が大きいところではエンストロフィーは比較的小さく、エンストロフィーが大きいところでは圧力勾配は比較的小さい。

同様に渦度と衝撃波の向きの関連を調べるため、エンストロフィーを圧力勾配に平行な方向と垂直な方向の2成分に分解し、衝撃波の後面と前面での値の差(後面での値-前面での値)をとって比較した(図7)。衝撃波面は $\nabla \cdot \mathbf{u} = \Phi = -0.5$ で定義

した。この図から圧力に垂直な面内のエンストロフィーが渦度の前面に比べ後面で増加しており、逆に圧力に平行な成分はむしろ前面より後面で減少していることがわかる。これは図5で渦線が屈折している状況とつじつまがあっている。また、この傾向は $\Phi = -1.0$ 上の面で調べても同様である。

3 曲衝撃波による渦度生成

前節では渦度が衝撃波前面に比べて後面の方で強まっていることを数値的に示す一方、渦度と衝撃波の方向の関連についても調べた。これらの結果を理論的に説明するため、この節では曲率をもつ衝撃波による渦度生成を流れの接続条件 [12] を用いて解析する。この接続条件を用いるため、流体は非粘性でなければならない。また、簡単のため熱伝導係数もゼロと仮定する。

3.1 一般直交座標系での記述と接続条件

図8のように、衝撃波面に垂直な方向を第1成分にとるような直交一般化座標 (q_1, q_2, q_3) を考える。これは、球座標や円筒座標であれば半径 $r = R$ となる面と衝撃波面が一致している場合を考えていることになる。この座標系の単位方向ベクトルをそれぞれ e_1, e_2, e_3 、尺度因子を h_1, h_2, h_3 とする。

密度、圧力、速度の衝撃波前面での値を $(\rho^{(1)}, p^{(1)}, \mathbf{u}^{(1)})$ 、衝撃波後面での値を $(\rho^{(2)}, p^{(2)}, \mathbf{u}^{(2)})$ とするときこれらの接続条件は

$$\begin{aligned}\rho^{(2)} &= A_\rho \rho^{(1)}, \\ p^{(2)} &= A_p p^{(1)}, \\ u_1^{(2)} &= A_v u_1^{(1)}, \\ u_2^{(2)} &= u_2^{(1)}, \\ u_3^{(2)} &= u_3^{(1)}\end{aligned}$$

となる [12]。ここで

$$\begin{aligned}A_\rho &= (\gamma + 1)M_s^2 / [(\gamma - 1)M_s^2 + 2], \\ A_p &= [2\gamma M_s^2 - (\gamma - 1)] / (\gamma + 1), \\ A_v &= 1/A_\rho, \\ M_s^2 &= \rho^{(1)} u_1^{(1)2} / \gamma p^{(1)}\end{aligned}\tag{1}$$

であり、 M_s は衝撃波前面でのマッハ数を表している。他方、連続の式、非粘性運動方程式、非粘性非伝導性圧力方程式は一般直交座標系ではそれぞれ

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial (h_2 h_3 \rho u_1)}{\partial q_1} + \frac{\partial (h_3 h_1 \rho u_2)}{\partial q_2} + \frac{\partial (h_1 h_2 \rho u_3)}{\partial q_3} \right],\tag{2}$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = - \left[\sum_j \frac{u_j}{h_j} \frac{\partial u_1}{\partial q_j} + \frac{u_2}{h_1 h_2} \left(u_1 \frac{\partial h_1}{\partial q_2} - u_2 \frac{\partial h_2}{\partial q_1} \right) + \frac{u_3}{h_3 h_1} \left(u_1 \frac{\partial h_1}{\partial q_3} - u_3 \frac{\partial h_3}{\partial q_1} \right) \right] - \frac{1}{\rho h_1} \frac{\partial p}{\partial q_1}, \quad (3)$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} = - \left[\sum_j \frac{u_j}{h_j} \frac{\partial u_2}{\partial q_j} + \frac{u_3}{h_2 h_3} \left(u_2 \frac{\partial h_2}{\partial q_3} - u_3 \frac{\partial h_3}{\partial q_2} \right) + \frac{u_1}{h_1 h_2} \left(u_2 \frac{\partial h_2}{\partial q_1} - u_1 \frac{\partial h_1}{\partial q_2} \right) \right] - \frac{1}{\rho h_2} \frac{\partial p}{\partial q_2}, \quad (4)$$

$$\frac{\partial u_3}{\partial t} = - \left[\sum_j \frac{u_j}{h_j} \frac{\partial u_3}{\partial q_j} + \frac{u_1}{h_3 h_1} \left(u_3 \frac{\partial h_3}{\partial q_1} - u_1 \frac{\partial h_1}{\partial q_3} \right) + \frac{u_2}{h_2 h_3} \left(u_3 \frac{\partial h_3}{\partial q_2} - u_2 \frac{\partial h_2}{\partial q_3} \right) \right] - \frac{1}{\rho h_3} \frac{\partial p}{\partial q_3}, \quad (5)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} = - \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial (h_2 h_3 p u_1)}{\partial q_1} + \frac{\partial (h_3 h_1 p u_2)}{\partial q_2} + \frac{\partial (h_1 h_2 p u_3)}{\partial q_3} \right] - (\gamma - 1) p \left[\frac{\partial (h_2 h_3 u_1)}{\partial q_1} + \frac{\partial (h_3 h_1 u_2)}{\partial q_2} + \frac{\partial (h_1 h_2 u_3)}{\partial q_3} \right], \quad (6)$$

で与えられる。

衝撃波前面において流れは一様であるとする、速度場の各方向についての微分はゼロ、 $\partial u^{(1)}/\partial q_i = 0$ ($i = 1, 2, 3$) である。従って

$$\frac{\partial u_1^{(1)}}{\partial q_1} = - \left(\frac{u_2^{(1)}}{h_2} \frac{\partial h_1}{\partial q_2} + \frac{u_3^{(1)}}{h_3} \frac{\partial h_1}{\partial q_3} \right), \quad (7)$$

$$\frac{\partial u_2^{(1)}}{\partial q_1} = \frac{u_1^{(1)}}{h_2} \frac{\partial h_1}{\partial q_2}, \quad (8)$$

$$\frac{\partial u_3^{(1)}}{\partial q_1} = \frac{u_1^{(1)}}{h_3} \frac{\partial h_1}{\partial q_3}, \quad (9)$$

$$\frac{\partial u_1^{(1)}}{\partial q_2} = \frac{u_2^{(1)}}{h_1} \frac{\partial h_2}{\partial q_1}, \quad (10)$$

$$\frac{\partial u_2^{(1)}}{\partial q_2} = - \left(\frac{u_3^{(1)}}{h_3} \frac{\partial h_2}{\partial q_3} + \frac{u_1^{(1)}}{h_1} \frac{\partial h_2}{\partial q_1} \right), \quad (11)$$

$$\frac{\partial u_3^{(1)}}{\partial q_2} = \frac{u_2^{(1)}}{h_3} \frac{\partial h_2}{\partial q_3}, \quad (12)$$

$$\frac{\partial u_1^{(1)}}{\partial q_3} = \frac{u_3^{(1)}}{h_1} \frac{\partial h_3}{\partial q_1}, \quad (13)$$

$$\frac{\partial u_2^{(1)}}{\partial q_3} = \frac{u_3^{(1)}}{h_2} \frac{\partial h_3}{\partial q_2}, \quad (14)$$

$$\frac{\partial u_3^{(1)}}{\partial q_3} = - \left(\frac{u_1^{(1)}}{h_1} \frac{\partial h_3}{\partial q_1} + \frac{u_2^{(1)}}{h_2} \frac{\partial h_3}{\partial q_2} \right) \quad (15)$$

を得る。同様に、密度と圧力 $\rho^{(1)}, p^{(1)}$ の一様性から

$$\begin{aligned} \partial \rho^{(1)} / \partial q_1 = 0, \quad \partial \rho^{(1)} / \partial q_2 = 0, \quad \partial \rho^{(1)} / \partial q_3 = 0, \\ \partial p^{(1)} / \partial q_1 = 0, \quad \partial p^{(1)} / \partial q_2 = 0, \quad \partial p^{(1)} / \partial q_3 = 0 \end{aligned}$$

を得る。また、マッハ数 M_s については、式(1)を q_1, q_2, q_3 で微分して式(7),(10),(13)を用いることにより、

$$\frac{\partial M_s^2}{\partial q_1} = - \frac{2M_s^2}{u_1^{(1)}} \left(\frac{u_2^{(1)}}{h_2} \frac{\partial h_1}{\partial q_2} + \frac{u_3^{(1)}}{h_3} \frac{\partial h_1}{\partial q_3} \right), \quad (16)$$

$$\frac{\partial M_s^2}{\partial q_2} = \frac{2M_s^2 u_2^{(1)}}{u_1^{(1)}} \frac{1}{h_1} \frac{\partial h_2}{\partial q_1}, \quad (17)$$

$$\frac{\partial M_s^2}{\partial q_3} = \frac{2M_s^2 u_3^{(1)}}{u_1^{(1)}} \frac{1}{h_1} \frac{\partial h_3}{\partial q_1}, \quad (18)$$

となる。衝撃波の接続係数 A_ρ, A_v, A_p についての微分についても同様な関係が得られる。最後に、流れが一様であることから、衝撃波前面では渦なし流れになっていることを付記する。

3.2 衝撃波後面における状態

衝撃波後面で流れが定常な場合について、渦度をはじめとする各物理量を前節の接続条件と流れ場の方向微分を用いて計算する。速度、密度、圧力についての接続条件から q_2, q_3 方向の微分については

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1^{(2)}}{\partial q_2} &= \frac{\partial A_v}{\partial q_2} u_1^{(1)} + A_v \frac{u_2^{(1)}}{h_1} \frac{\partial h_2}{\partial q_1}, \\ \frac{\partial u_1^{(2)}}{\partial q_3} &= \frac{\partial A_v}{\partial q_3} u_1^{(1)} + A_v \frac{u_3^{(1)}}{h_1} \frac{\partial h_3}{\partial q_1}, \\ \frac{\partial u_2^{(2)}}{\partial q_2} &= - \left(\frac{u_3^{(1)}}{h_3} \frac{\partial h_2}{\partial q_3} + \frac{u_1^{(1)}}{h_1} \frac{\partial h_2}{\partial q_1} \right), \\ \frac{\partial u_2^{(2)}}{\partial q_3} &= \frac{u_3^{(1)}}{h_2} \frac{\partial h_3}{\partial q_2}, \\ \frac{\partial u_3^{(2)}}{\partial q_2} &= \frac{u_2^{(1)}}{h_3} \frac{\partial h_2}{\partial q_3}, \\ \frac{\partial u_3^{(2)}}{\partial q_3} &= - \left(\frac{u_1^{(1)}}{h_1} \frac{\partial h_3}{\partial q_1} + \frac{u_2^{(1)}}{h_2} \frac{\partial h_3}{\partial q_2} \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho^{(2)}}{\partial q_2} &= \frac{\partial A_\rho}{\partial q_2} \rho^{(1)}, \\ \frac{\partial \rho^{(2)}}{\partial q_3} &= \frac{\partial A_\rho}{\partial q_3} \rho^{(1)}, \\ \frac{\partial p^{(2)}}{\partial q_2} &= \frac{\partial A_p}{\partial q_2} p^{(1)}, \\ \frac{\partial p^{(2)}}{\partial q_3} &= \frac{\partial A_p}{\partial q_3} p^{(1)}.\end{aligned}$$

となる。他方、各変数は基礎方程式 (2)-(6) の定常解であることから、 $\partial u_2^{(2)}/\partial q_1, \partial u_3^{(2)}/\partial q_1$ については

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_2^{(2)}}{\partial q_1} &= -\frac{h_1}{u_1^{(2)}} \left(\frac{u_2^{(2)}}{h_2} \frac{\partial u_2^{(2)}}{\partial q_2} + \frac{u_3^{(2)}}{h_3} \frac{\partial u_2^{(2)}}{\partial q_3} \right) + \frac{h_1}{h_2 h_3} \frac{u_3^{(2)}}{u_1^{(2)}} \left(u_3^{(2)} \frac{\partial h_3}{\partial q_2} - u_2^{(2)} \frac{\partial h_2}{\partial q_3} \right) \\ &\quad + \frac{1}{h_2} \left(u_1^{(2)} \frac{\partial h_1}{\partial q_2} - u_2^{(2)} \frac{\partial h_2}{\partial q_1} \right) - \frac{h_1}{h_2} \frac{1}{\rho^{(2)} u_1^{(2)}} \frac{\partial p^{(2)}}{\partial q_2}, \\ \frac{\partial u_3^{(2)}}{\partial q_1} &= -\frac{h_1}{u_1^{(2)}} \left(\frac{u_2^{(2)}}{h_2} \frac{\partial u_3^{(2)}}{\partial q_2} + \frac{u_3^{(2)}}{h_3} \frac{\partial u_3^{(2)}}{\partial q_3} \right) + \frac{h_1}{h_2 h_3} \frac{u_2^{(2)}}{u_1^{(2)}} \left(u_2^{(2)} \frac{\partial h_2}{\partial q_3} - u_3^{(2)} \frac{\partial h_3}{\partial q_2} \right) \\ &\quad + \frac{1}{h_3} \left(u_1^{(2)} \frac{\partial h_1}{\partial q_3} - u_3^{(2)} \frac{\partial h_3}{\partial q_1} \right) - \frac{h_1}{h_3} \frac{1}{\rho^{(2)} u_1^{(2)}} \frac{\partial p^{(2)}}{\partial q_3}\end{aligned}$$

という関係式を得る。 $\partial u_1^{(2)}/\partial q_1, \partial \rho^{(2)}/\partial q_1, \partial p^{(2)}/\partial q_1$ についても同様の式を得る。これらの式を全て衝撃波後面での値について解き、前面での値を用いて表現すると

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_1^{(2)}}{\partial q_1} &= \frac{2}{\gamma+1} \left[\frac{1+3M_s^2}{1-M_s^2} \right] \left[\frac{u_2^{(1)2}}{h_2 u_1^{(1)}} \frac{\partial h_2}{\partial q_1} + \frac{u_3^{(1)2}}{h_3 u_1^{(1)}} \frac{\partial h_3}{\partial q_1} \right] - \left[\frac{u_2^{(1)}}{h_2} \frac{\partial h_1}{\partial q_2} + \frac{u_3^{(1)}}{h_3} \frac{\partial h_1}{\partial q_3} \right] \\ &\quad + \frac{2}{\gamma+1} \left[\frac{2\gamma M_s^2 - (\gamma-1)}{(\gamma+1)M_s^2} \right] \left[\frac{u_1^{(1)}}{h_2} \frac{\partial h_2}{\partial q_1} + \frac{u_1^{(1)}}{h_3} \frac{\partial h_3}{\partial q_1} \right], \quad (19)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_2^{(2)}}{\partial q_1} &= \frac{(\gamma-1)M_s^2 + 2}{(\gamma+1)M_s^2} \frac{1}{h_2} \frac{\partial h_1}{\partial q_2} u_1^{(1)} \\ &\quad - \frac{2}{\gamma+1} \left[\frac{(\gamma-3)M_s^2 + (\gamma+5)}{(\gamma-1)M_s^2 + 2} \right] \frac{1}{h_2} \frac{\partial h_2}{\partial q_1} u_2^{(1)}, \quad (20)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_3^{(2)}}{\partial q_1} &= \frac{(\gamma-1)M_s^2 + 2}{(\gamma+1)M_s^2} \frac{1}{h_3} \frac{\partial h_1}{\partial q_3} u_1^{(1)} \\ &\quad - \frac{2}{\gamma+1} \left[\frac{(\gamma-3)M_s^2 + (\gamma+5)}{(\gamma-1)M_s^2 + 2} \right] \frac{1}{h_3} \frac{\partial h_3}{\partial q_1} u_3^{(1)}, \quad (21)\end{aligned}$$

$$\frac{\partial u_1^{(2)}}{\partial q_2} = \left[\frac{(\gamma-1)M_s^2 - 2}{(\gamma+1)M_s^2} \right] \frac{1}{h_1} \frac{\partial h_2}{\partial q_1} u_2^{(1)}, \quad (22)$$

$$\frac{\partial u_2^{(2)}}{\partial q_2} = -\frac{1}{h_1} \frac{\partial h_2}{\partial q_1} u_1^{(1)} - \frac{1}{h_3} \frac{\partial h_2}{\partial q_3} u_3^{(1)}, \quad (23)$$

$$\frac{\partial u_3^{(2)}}{\partial q_2} = \frac{1}{h_3} \frac{\partial h_2}{\partial q_3} u_2^{(1)}, \quad (24)$$

$$\frac{\partial u_1^{(2)}}{\partial q_3} = \left[\frac{(\gamma - 1)M_s^2 - 2}{(\gamma + 1)M_s^2} \right] \frac{1}{h_1} \frac{\partial h_3}{\partial q_1} u_3^{(1)}, \quad (25)$$

$$\frac{\partial u_2^{(2)}}{\partial q_3} = \frac{1}{h_2} \frac{\partial h_3}{\partial q_2} u_3^{(1)}, \quad (26)$$

$$\frac{\partial u_3^{(2)}}{\partial q_3} = -\frac{1}{h_1} \frac{\partial h_3}{\partial q_1} u_1^{(1)} - \frac{1}{h_2} \frac{\partial h_3}{\partial q_2} u_2^{(1)}, \quad (27)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho^{(2)}}{\partial q_1} &= -\frac{2M_s^2}{(\gamma - 1)M_s^2 + 2} \left(\frac{1}{h_2} \frac{\partial h_2}{\partial q_1} + \frac{1}{h_3} \frac{\partial h_3}{\partial q_1} \right) \rho^{(1)} \\ &+ \frac{2(\gamma + 1)M_s^4 [3(\gamma - 1)M_s^4 - (\gamma - 3)M_s^2 + 2(\gamma + 2)]}{(M_s^2 - 1)[(\gamma - 1)M_s^2 + 2]^3} \\ &\times \left(\frac{1}{h_2} \frac{\partial h_2}{\partial q_1} \frac{u_2^{(1)2}}{u_1^{(1)2}} + \frac{1}{h_3} \frac{\partial h_3}{\partial q_1} \frac{u_3^{(1)2}}{u_1^{(1)2}} \right) \rho^{(1)}, \end{aligned} \quad (28)$$

$$\frac{\partial \rho^{(2)}}{\partial q_2} = \frac{4(\gamma + 1)M_s^2}{[(\gamma - 1)M_s^2 + 2]^2} \frac{1}{h_1} \frac{\partial h_2}{\partial q_1} \frac{\rho^{(1)} u_2^{(1)}}{u_1^{(1)}}, \quad (29)$$

$$\frac{\partial \rho^{(2)}}{\partial q_3} = \frac{4(\gamma + 1)M_s^2}{[(\gamma - 1)M_s^2 + 2]^2} \frac{1}{h_1} \frac{\partial h_3}{\partial q_1} \frac{\rho^{(1)} u_3^{(1)}}{u_1^{(1)}}, \quad (30)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial p^{(2)}}{\partial q_1} &= -\frac{2\gamma}{\gamma + 1} \left[\frac{2\gamma M_s^2 - (\gamma - 1)}{(\gamma + 1)} \right] \left(\frac{1}{h_2} \frac{\partial h_2}{\partial q_1} + \frac{1}{h_3} \frac{\partial h_3}{\partial q_1} \right) p^{(1)} \\ &+ \frac{2\gamma [(4\gamma - 2)M_s^4 + (\gamma + 5)M_s^2 - (\gamma - 1)] M_s^2}{(\gamma + 1) (M_s^2 - 1) [(\gamma - 1)M_s^2 + 2]} \\ &\times \left(\frac{1}{h_2} \frac{\partial h_2}{\partial q_1} \frac{u_2^{(1)2}}{u_1^{(1)2}} + \frac{1}{h_3} \frac{\partial h_3}{\partial q_1} \frac{u_3^{(1)2}}{u_1^{(1)2}} \right) p^{(1)}, \end{aligned} \quad (31)$$

$$\frac{\partial p^{(2)}}{\partial q_2} = \frac{4\gamma M_s^2}{\gamma + 1} \frac{1}{h_1} \frac{\partial h_2}{\partial q_1} \frac{p^{(1)} u_2^{(1)}}{u_1^{(1)}}, \quad (32)$$

$$\frac{\partial p^{(2)}}{\partial q_3} = \frac{4\gamma M_s^2}{\gamma + 1} \frac{1}{h_1} \frac{\partial h_3}{\partial q_1} \frac{p^{(1)} u_3^{(1)}}{u_1^{(1)}}. \quad (33)$$

となる。式(19),(28),(31)において、分母に $M_s^2 - 1$ を含む項は形式的には $M_s \rightarrow 1$ で無限大に発散するよう見えるが、これはマッハ数 M_s と衝撃波面の形を独立に与えたために生じた問題であり、以下のように説明が可能である。マッハ数 $M_s \rightarrow 1$ の極限で衝撃波は解消に向かい、物理量 ρ, p, u は衝撃波の前面と後面で連続になる。いま、これらの物理量は値だけではなく衝撃波面に接する方向の一階微分についても連

続だと仮定すると、例えば密度についての微分から

$$\lim_{M_s \rightarrow 1} \frac{\partial \rho^{(2)}}{\partial q_i} = \lim_{M_s \rightarrow 1} \frac{\partial \rho^{(1)}}{\partial q_i} \quad (i = 1, 2, 3)$$

でなければならない。ここで

$$\lim_{M_s \rightarrow 1} \frac{\partial \rho^{(2)}}{\partial q_i} = \lim_{M_s \rightarrow 1} \frac{\partial}{\partial q_i} A_{\rho} \rho^{(1)} \quad (i = 1, 2, 3)$$

であることを用いると、条件

$$\lim_{M_s \rightarrow 1} \frac{\partial M_s^2}{\partial q_i} = 0 \quad (i = 1, 2, 3)$$

を得る。従って、マッハ数 $M_s \rightarrow 1$ の極限で流れ場が満たすべき条件は式(16)-(18)により、

$$\frac{u_2^{(1)}}{h_2} \frac{\partial h_1}{\partial q_2} + \frac{u_3^{(1)}}{h_3} \frac{\partial h_1}{\partial q_3} = 0, \quad (34)$$

$$\frac{u_2^{(1)}}{h_1} \frac{\partial h_2}{\partial q_1} = 0, \quad (35)$$

$$\frac{u_3^{(1)}}{h_1} \frac{\partial h_3}{\partial q_1} = 0 \quad (36)$$

となる。この条件は圧力場、速度場について調べても同じ結果になる。ここで座標 (q_1, q_2, q_3) のうち q_2, q_3 のとり方は任意であることと流れが衝撃波前面で一様であることから、速度場の第2成分 $u_2^{(1)}$ と第3成分 $u_3^{(1)}$ の一方を常にゼロとするような座標を取ることができる。ここで第3成分 $u_3^{(1)}$ をゼロとするように座標を取ったとすると、この条件は

$$1. \quad u_2^{(1)} = 0, u_3^{(1)} = 0,$$

$$2. \quad u_2^{(1)} \neq 0, u_3^{(1)} = 0, \partial h_2 / \partial q_1 = 0, \partial h_1 / \partial q_2 = 0$$

の2つの場合に大別でき、これらの条件のどちらであれ式(19),(28),(31)の分母に $M_s^2 - 1$ を含む項はすべて分子も0となる。すなわち、それらの各項は $M_s \rightarrow 1$ の極限で $0/0$ の不定形となり、発散を免れる。

第1の条件は流れが衝撃波面に対して垂直な成分のみを持つ流れを表している。第2の条件は流れが衝撃波面に対して垂直な成分と、 q_2 方向の成分によって記述される場合を表している。この時 $\partial h_2 / \partial q_1 = \partial h_1 / \partial q_2 = 0$ により、衝撃波面を記述する一般座標系の尺度因子 h_2 は衝撃波面に垂直な方向には変化しないなどの制約条件が生じることがわかる。この条件は球座標の場合には満たされず、球面衝撃波などこれまで議論されてきた衝撃波の理論と矛盾するように見えるが、これもやはりマッハ数と衝撃波面を独立にとった上でマッハ数だけを極限操作した結果生じた見かけ上の矛盾

である。

(19)-(33)の結果を用いて衝撃波後面での渦度を計算すると

$$\begin{aligned}\omega_1^{(2)} &= 0, \\ \omega_2^{(2)} &= -\frac{4(M_s^2 - 1)^2}{(\gamma + 1)M_s^2[(\gamma - 1)M_s^2 + 2]} \frac{1}{h_1 h_3} \frac{\partial h_3}{\partial q_1} u_3^{(1)} \\ \omega_3^{(2)} &= \frac{4(M_s^2 - 1)^2}{(\gamma + 1)M_s^2[(\gamma - 1)M_s^2 + 2]} \frac{1}{h_1 h_2} \frac{\partial h_2}{\partial q_1} u_2^{(1)}\end{aligned}$$

となる。衝撃波面に垂直な成分 $\omega_1^{(2)}$ は常にゼロであるから、衝撃波の曲率効果によって生成される渦度は衝撃波面に接していることがわかる。

3.3 渦度と圧力勾配、密度勾配、傾圧項のなす角度

渦度と衝撃波の間の角度を調べるため、渦度と圧力勾配、渦度と密度勾配のなす角度を調べる。

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\omega}^{(2)} &= \omega_1^{(2)} \mathbf{e}_1 + \omega_2^{(2)} \mathbf{e}_2 + \omega_3^{(2)} \mathbf{e}_3, \\ \nabla p^{(2)} &= \frac{1}{h_1} \frac{\partial p^{(2)}}{\partial q_1} \mathbf{e}_1 + \frac{1}{h_2} \frac{\partial p^{(2)}}{\partial q_2} \mathbf{e}_2 + \frac{1}{h_3} \frac{\partial p^{(2)}}{\partial q_3} \mathbf{e}_3, \\ \nabla \rho^{(2)} &= \frac{1}{h_1} \frac{\partial \rho^{(2)}}{\partial q_1} \mathbf{e}_1 + \frac{1}{h_2} \frac{\partial \rho^{(2)}}{\partial q_2} \mathbf{e}_2 + \frac{1}{h_3} \frac{\partial \rho^{(2)}}{\partial q_3} \mathbf{e}_3\end{aligned}$$

を用いて $\boldsymbol{\omega}^{(2)} \cdot \nabla p^{(2)}$ 、 $\boldsymbol{\omega}^{(2)} \cdot \nabla \rho^{(2)}$ を計算すると

$$\boldsymbol{\omega}^{(2)} \cdot \nabla p^{(2)} = 0, \quad (37)$$

$$\boldsymbol{\omega}^{(2)} \cdot \nabla \rho^{(2)} = 0 \quad (38)$$

となり、圧力勾配、密度勾配ともに渦度と直交することがわかる。傾圧項については

$$\begin{aligned}\frac{\nabla \rho^{(2)} \times \nabla p^{(2)}}{\rho^{(2)2}} &= \frac{1}{h_2 h_3 \rho^{(2)2}} \left(\frac{\partial \rho^{(2)}}{\partial q_2} \frac{\partial p^{(2)}}{\partial q_3} - \frac{\partial \rho^{(2)}}{\partial q_3} \frac{\partial p^{(2)}}{\partial q_2} \right) \mathbf{e}_1 \\ &+ \frac{1}{h_3 h_1 \rho^{(2)2}} \left(\frac{\partial \rho^{(2)}}{\partial q_3} \frac{\partial p^{(2)}}{\partial q_1} - \frac{\partial \rho^{(2)}}{\partial q_1} \frac{\partial p^{(2)}}{\partial q_3} \right) \mathbf{e}_2 \\ &+ \frac{1}{h_1 h_2 \rho^{(2)2}} \left(\frac{\partial \rho^{(2)}}{\partial q_1} \frac{\partial p^{(2)}}{\partial q_2} - \frac{\partial \rho^{(2)}}{\partial q_2} \frac{\partial p^{(2)}}{\partial q_1} \right) \mathbf{e}_3 \\ &= B_2^{(2)} \mathbf{e}_2 + B_3^{(2)} \mathbf{e}_3,\end{aligned}$$

となる。ここで

$$B_2^{(2)} = \frac{1}{h_3 h_1^2} \frac{\partial h_3}{\partial q_1} \left(\frac{\gamma p^{(1)} u_3^{(1)}}{\rho^{(1)} u_1^{(1)}} \right) \left(\frac{2}{\gamma + 1} \right)^3 \left\{ \frac{(\gamma - 1)(M_s^2 - 1)^2}{M_s^2} \left(\frac{1}{h_2} \frac{\partial h_2}{\partial q_1} + \frac{1}{h_3} \frac{\partial h_3}{\partial q_1} \right) \right.$$

$$\begin{aligned}
& - (\gamma^2 - 1) \frac{(3M_s^2 + 1)(M_s^2 - 1)}{[(\gamma - 1)M_s^2 + 2]} \left(\frac{1}{h_2} \frac{\partial h_2}{\partial q_1} \frac{u_2^{(1)2}}{u_1^{(1)2}} + \frac{1}{h_3} \frac{\partial h_3}{\partial q_1} \frac{u_3^{(1)2}}{u_1^{(1)2}} \right) \Big\} \\
B_3^{(2)} &= - \frac{1}{h_2 h_1^2} \frac{\partial h_2}{\partial q_1} \left(\frac{\gamma p^{(1)} u_2^{(1)}}{\rho^{(1)} u_1^{(1)}} \right) \left(\frac{2}{\gamma + 1} \right)^3 \left\{ \frac{(\gamma - 1)(M_s^2 - 1)^2}{M_s^2} \left(\frac{1}{h_2} \frac{\partial h_2}{\partial q_1} + \frac{1}{h_3} \frac{\partial h_3}{\partial q_1} \right) \right. \\
& \left. - (\gamma^2 - 1) \frac{(3M_s^2 + 1)(M_s^2 - 1)}{[(\gamma - 1)M_s^2 + 2]} \left(\frac{1}{h_2} \frac{\partial h_2}{\partial q_1} \frac{u_2^{(1)2}}{u_1^{(1)2}} + \frac{1}{h_3} \frac{\partial h_3}{\partial q_1} \frac{u_3^{(1)2}}{u_1^{(1)2}} \right) \right\},
\end{aligned}$$

である。すなわち、傾圧項も衝撃波に接する成分のみが値をもつことがわかる。さらに、残された2成分について $M_s \rightarrow \infty$ の極限をとると、 $O(M_s^2)$ の程度で発散し、

$$\lim_{M_s \rightarrow \infty} B_2^{(2)} = \infty, \quad \lim_{M_s \rightarrow \infty} B_3^{(2)} = \infty$$

となる。傾圧項は非圧縮性流体には現れない圧縮性流体独特の項であるため、渦度の生成に大きな役割を果たすと考えられる。この役割を調べるため、渦度 $\omega^{(2)}$ と傾圧項の方向を比較する。この二つのベクトルはそれぞれ q_1 方向の成分をもたないため、その方向を比較するには $\omega_2^{(2)}/\omega_3^{(2)}$ と $B_2^{(2)}/B_3^{(2)}$ を調べるだけで十分である。その結果は、

$$\frac{\omega_2^{(2)}}{\omega_3^{(2)}} = \frac{B_2^{(2)}}{B_3^{(2)}} = - \frac{u_3^{(1)} (\partial h_3 / \partial q_1) h_2}{u_2^{(1)} (\partial h_2 / \partial q_1) h_3} \quad (39)$$

となり、この2つのベクトルは平行になることがわかる。

3.4 階段関数による衝撃波の内部構造の近似

階段関数を用いて衝撃波前後の物理量を記述すると以下のようなになる。但し、衝撃波面の座標の第一成分 $q_1 = R$ に対して衝撃波前面が $q_1 > R$ 側にあるものとする (図8)。

$$\begin{aligned}
u_1 &= u_1^{(1)} + D_u h(R - q_1), \\
u_2 &= u_2^{(1)}, \\
u_3 &= u_3^{(1)}, \\
\rho &= \rho^{(1)} + D_\rho h(R - q_1), \\
p &= p^{(1)} + D_p h(R - q_1),
\end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned}
D_u &= u_1^{(2)} - u_1^{(1)} = - \frac{2}{\gamma + 1} \left(1 - \frac{1}{M_s^2} \right) u_1^{(1)}, \\
D_\rho &= \rho^{(2)} - \rho^{(1)} = \frac{2(M_s^2 - 1)}{(\gamma - 1)M_s^2 + 2} \rho^{(1)},
\end{aligned}$$

$$D_p = p^{(2)} - p^{(1)} = \frac{2\gamma}{\gamma+1}(M_s^2 - 1)p^{(1)},$$

である。また、 $h(x)$ は階段関数

$$h(x) = \begin{cases} 1 & (x > 0) \\ 1/2 & (x = 0), \\ 0 & (x < 0) \end{cases}$$

$\delta(x)$ はディラックのデルタ関数である。これらの記述と衝撃波前面での物理量の微分を用いて渦度と傾圧を評価すると、渦度は

$$\begin{aligned} \omega_1 &= 0, \\ \omega_2 &= -\frac{4(M_s^2 - 1)^2}{(\gamma + 1)M_s^2[(\gamma - 1)M_s^2 + 2]} \frac{1}{h_1 h_3} \frac{\partial h_3}{\partial q_1} u_3^{(1)} h(R - q_1) \\ \omega_3 &= \frac{4(M_s^2 - 1)^2}{(\gamma + 1)M_s^2[(\gamma - 1)M_s^2 + 2]} \frac{1}{h_1 h_2} \frac{\partial h_2}{\partial q_1} u_2^{(1)} h(R - q_1) \end{aligned}$$

で与えられる。他方、傾圧項 (B_1, B_2, B_3) は

$$\begin{aligned} B_1 &= 0, \\ B_2 &= \frac{8\gamma(\gamma - 1)}{(\gamma + 1)^2} \frac{M_s^2 (M_s^2 - 1)^2}{[(\gamma - 1)M_s^2 + 2]^2} \frac{\rho^{(1)} p^{(1)}}{[\rho^{(1)} + D_\rho h(R - q_1)]^2} \frac{u_3^{(1)}}{u_1^{(1)}} \frac{1}{h_1^2 h_3} \frac{\partial h_3}{\partial q_1} h(R - q_1) \delta(R - q_1), \\ B_3 &= -\frac{8\gamma(\gamma - 1)}{(\gamma + 1)^2} \frac{M_s^2 (M_s^2 - 1)^2}{[(\gamma - 1)M_s^2 + 2]^2} \frac{\rho^{(1)} p^{(1)}}{[\rho^{(1)} + D_\rho h(R - q_1)]^2} \frac{u_2^{(1)}}{u_1^{(1)}} \frac{1}{h_1^2 h_2} \frac{\partial h_2}{\partial q_1} h(R - q_1) \delta(R - q_1) \end{aligned}$$

となる。これらを q_1 についての無限小区間 $[R-, R+]$ について積分すると

$$\begin{aligned} \int_{R-}^{R+} B_1 dq_1 &= 0, \\ \int_{R-}^{R+} B_2 dq_1 &= \frac{4\gamma(\gamma - 1)}{(\gamma + 1)^2} \frac{M_s^2 (M_s^2 - 1)^2}{(\gamma M_s^2 + 1)^2} \frac{u_3^{(1)} p^{(1)}}{u_1^{(1)} \rho^{(1)}} \frac{1}{h_1^2 h_3} \frac{\partial h_3}{\partial q_1}, \\ \int_{R-}^{R+} B_3 dq_1 &= \frac{4\gamma(\gamma - 1)}{(\gamma + 1)^2} \frac{M_s^2 (M_s^2 - 1)^2}{(\gamma M_s^2 + 1)^2} \frac{u_2^{(1)} p^{(1)}}{u_1^{(1)} \rho^{(1)}} \frac{1}{h_1^2 h_2} \frac{\partial h_2}{\partial q_1} \end{aligned}$$

かつ、

$$\frac{\int_{R-}^{R+} B_2 dq_1}{\int_{R-}^{R+} B_3 dq_1} = -\frac{u_3^{(1)} (\partial h_3 / \partial q_1) h_2}{u_2^{(1)} (\partial h_2 / \partial q_1) h_3}$$

である。これは (39) と同じ結果であり、階段関数によって衝撃波の関数形を近似しても渦度と傾圧項が平行であるという結果に変わりはない。 B_2, B_3 と前節の $B_2^{(2)}, B_3^{(2)}$ で係数が異なるのは衝撃波の内部構造を階段関数とデルタ関数で近似したことによるものである。しかし、両者ともに $M_s \rightarrow \infty$ の場合には $O(M_s^2)$ の程度で発散することには共通している。

4 考察と結論

直接数値計算および衝撃波の接続条件を用いて渦度の計算を行なった。直接数値計算から、衝撃波の後面において、衝撃波面に接する方向の渦度は強まり、垂直な方向の渦度は弱められることがわかった。この結果は既に得られている線形理論の予測と一致している [1]。また、衝撃波前後の物理量の接続条件から、衝撃波前面で流れが一様である場合、衝撃波後面において衝撃波に接する平面上に渦度が生じること、渦度と傾圧項が平行になることがわかった。これは衝撃波を間に挟む物理量の変化を階段関数を用いて近似しも同様であった。傾圧項は圧縮性流体の方程式を非圧縮性流体の方程式から区別する最大の特徴の一つであり、高マッハ数の流れにおいては渦の生成に大きな役割を果たすものと考えられている。衝撃波の形を予め仮定しているとはいえ、傾圧項と生成される渦度が平行になるという結果はその期待を裏付けるものである。今回の数値計算では傾圧項がエンストロフィー生成に果たす役割はそれほど大きくはないが、これは比較的小規模の計算でマッハ数が小さいためであったと考えられる。また、直接数値計算の場合は衝撃波前面で流れは一様ではなく、粘性項や温度拡散項も存在するため、この接続条件を用いた結果と直接の比較はできないが、圧力勾配の方向に垂直な成分が衝撃波の後面で強くなっている点で結果が一致している。

接続条件を用いた計算では圧力勾配と渦度は直交するはずであるが、数値計算の場合は有限の角度で交わっている。これは衝撃波とは関係なく全体の流れ場のダイナミックスの結果として生じた渦度が衝撃波と衝突しているところを捉えたためであり、衝撃波によって生じる渦度だけを抽出できる場合にはその渦度は圧力勾配と直交しているものと考えられる。このように、衝撃波の接続条件を用いた計算は理想的な状況にのみ成立する限定されたものであるが、数値計算の結果を定性的に説明する事ができる。

参考文献

- [1] S.K.Lele. Compressibility effects on turbulence. *Annu.Rev.Fluid Mech.*, Vol. 26, pp. 211-254, 1994.
- [2] S.Lee,S.K.Lele and P.Moin. Direct numerical simulation and analysis of shock turbulence interaction. *AIAA paper*, Vol. 91-0523,, 1991.
- [3] S.Lee,S.K.Lele and P.Moin. Eddy shocklets in decaying compressible turbulence. *Phys.Fluids A*, Vol. 3, pp. 657-664, 1991.
- [4] S.Lee,S.K.Lele and P.Moin. Direct numerical simulation of isotropic turbulence interacting with a weak shock wave. *J.Fluid Mech.*, Vol. 251, pp. 533-562, 1993.
- [5] S.Kida and S.A.Orszag. Enstrophy budget in decaying compressible turbulence. *J.Sci.Comput.*, Vol. 5, pp. 1-34, 1990.

- [6] S.Kida and S.A.Orszag. Energy and spectral dynamics in forced compressible turbulence. *J.Sci.Comp.*, Vol. 5, pp. 85–125, 1991.
- [7] S.Kida and S.A.Orszag. Energy and spectral dynamics in decaying compressible turbulence. *J.Sci.Comp.*, Vol. 7, pp. 1–34, 1992.
- [8] H.S. Ribner. Spectra of noise and amplified turbulence emanating from shock-turbulence interaction. *AIAA J.*, Vol. 25, pp. 436–42, 1987.
- [9] L.Jacquin,C.Cambon and E.Blin. Turbulence amplification by a shock wave and rapid distortion theory. *Phys.Fluids A*, Vol. 5, pp. 2539–2550, 1993.
- [10] 木田重雄. 曲衝撃波による渦度生成. 京都大学数理解析研究所講究録, volume 774, 1991.
- [11] J.D.Anderson Jr. *Modern Compressible Flow with Historical Perspective, Second Edition*. McGraw-Hill, 1990.
- [12] L.D.Landau and E.M.Lifshitz. *Fluid Mechanics*. Pergamon Pres, 1959.

図 1: 密度、運動量、全エネルギーの空間パワースペクトルの時間平均
 (a) 片対数グラフ (b) 両対数グラフ

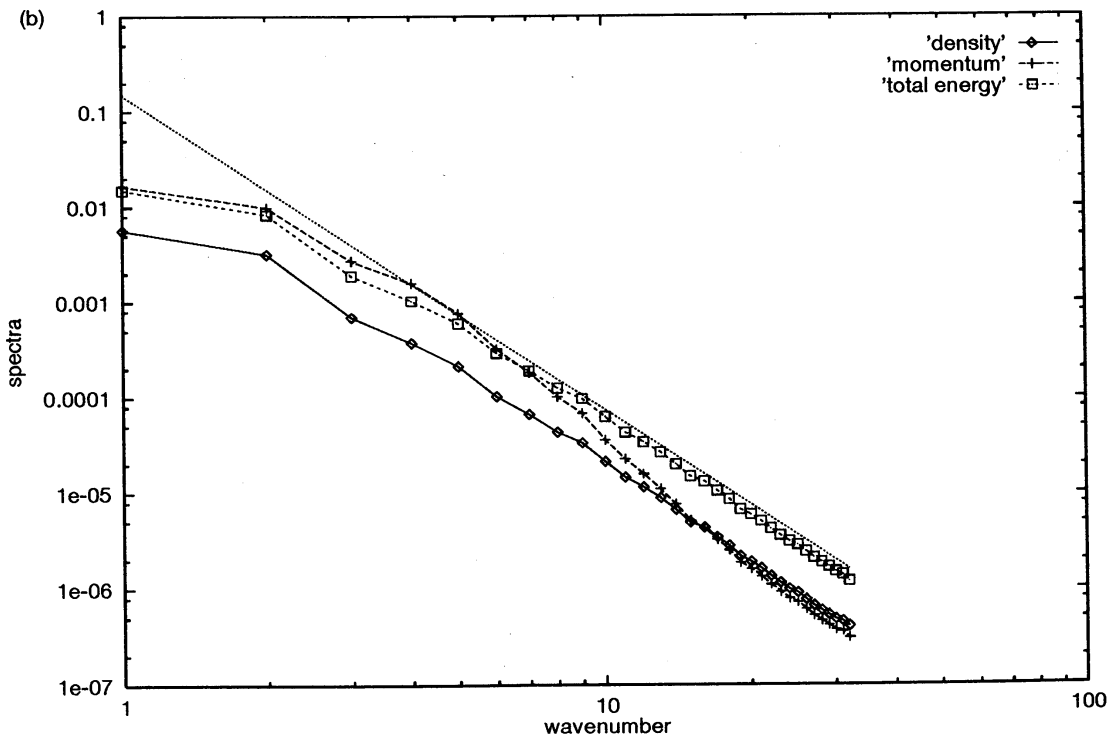
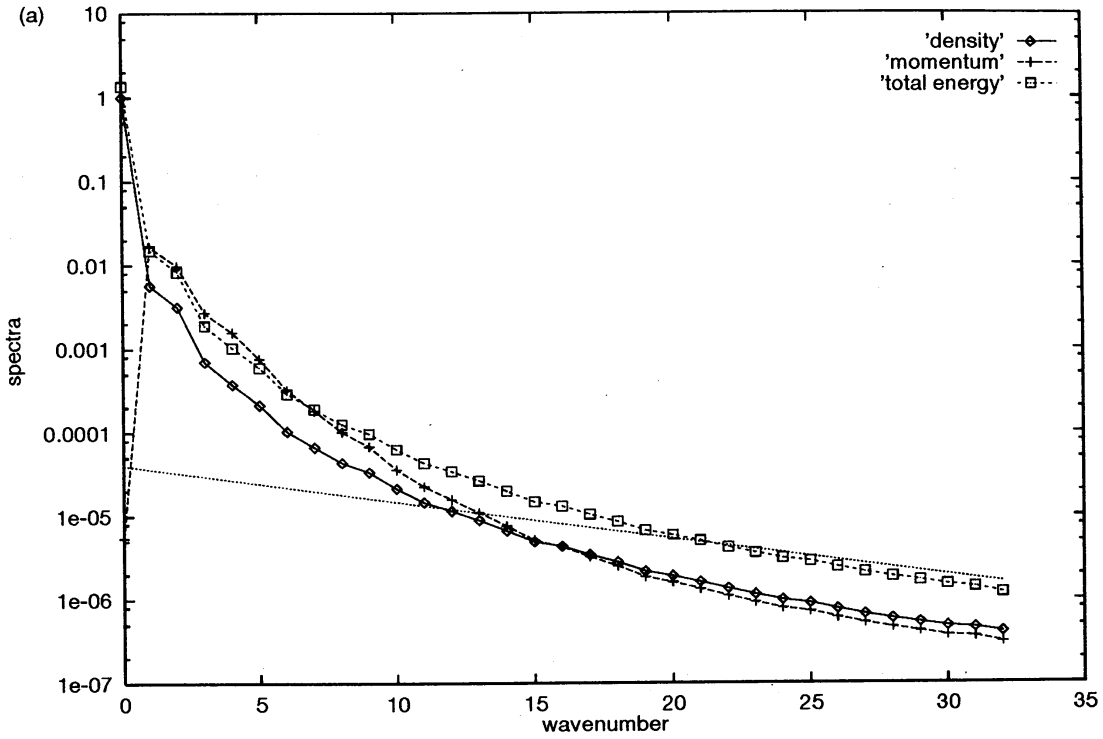


図 2: 基本的物理量の時間推移 (a) 微小尺度のレイノルズ数 (b) マッハ数

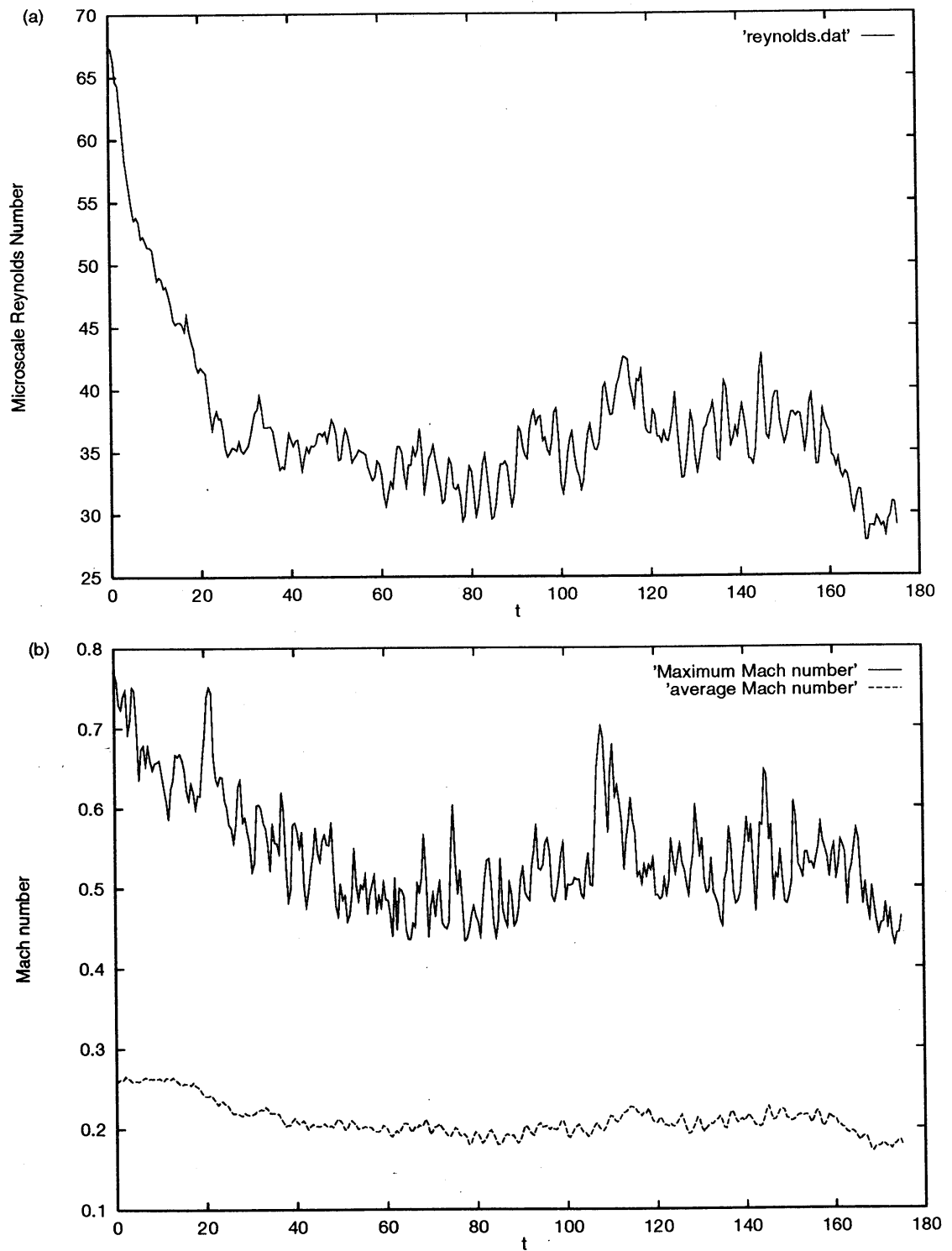
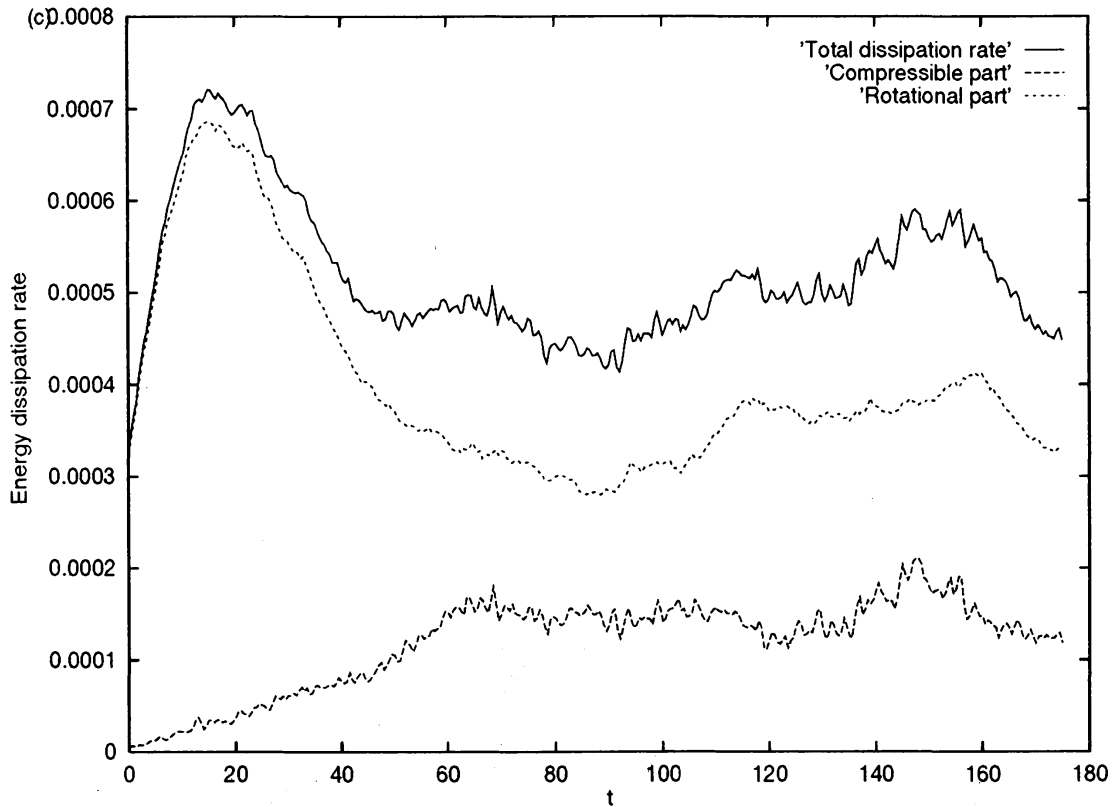
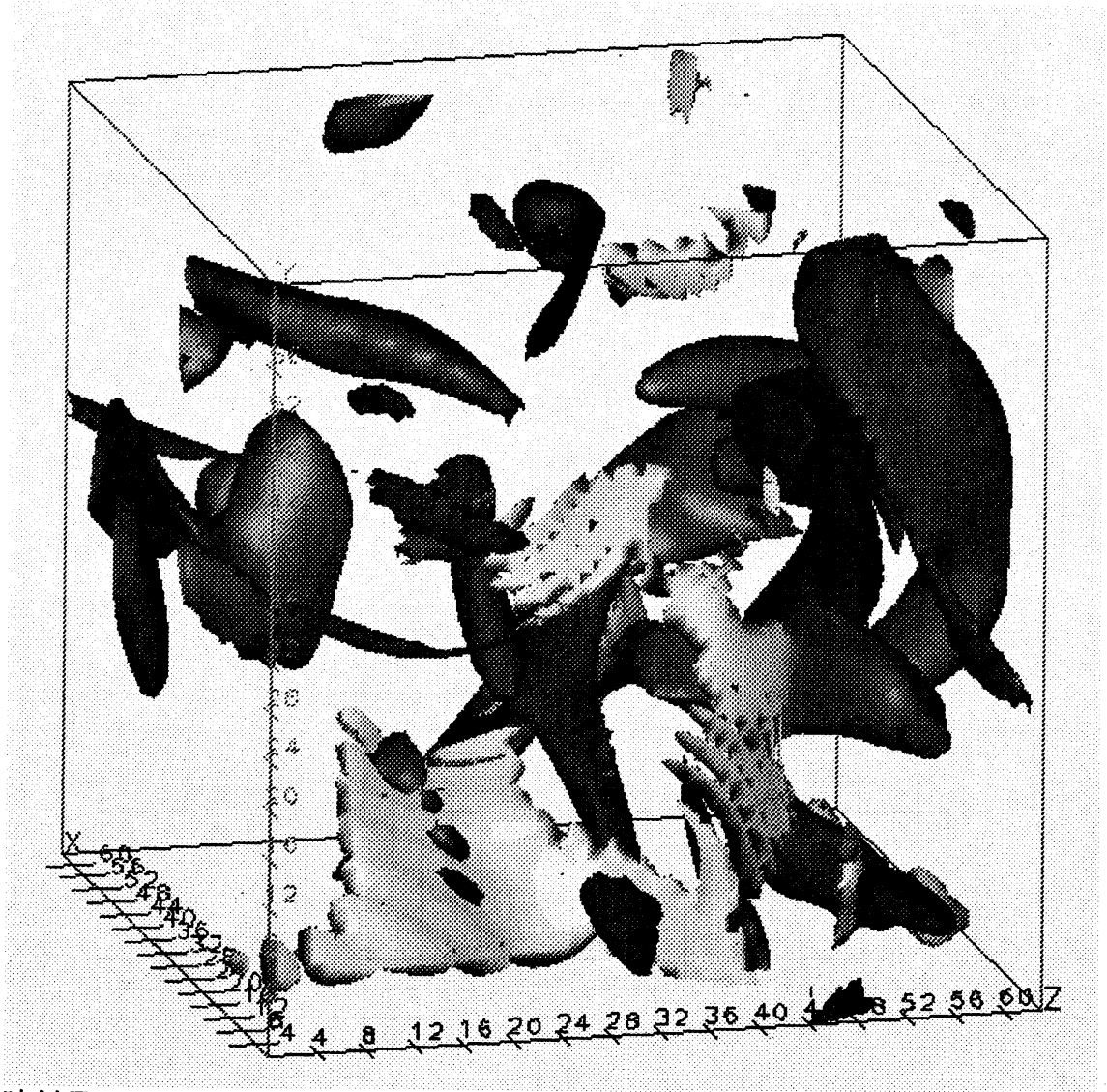


図 2: (c) エネルギー散逸率



微小スケールのレイノルズ数 (a) 及び乱流マッハ数 (b) では $T \simeq 40$ 程度で統計的にほぼ定常であると言える状態に達しているが、エネルギー散逸率 (c) は $T \simeq 70$ になってようやく圧縮性散逸率が一定の値に達している。このため、本文では $T \simeq 70.0$ を統計的定常状態と規定している。

図 3: ディラレーションとエンストロフィー



時刻 $T = 104.0$ におけるディラレーション $\nabla \cdot \mathbf{u}$ とエンストロフィー $|\boldsymbol{\omega}|^2$ の等値面。
 色の薄い方がディラレーション $\nabla \cdot \mathbf{u} = -1.0$ の等値面で、色の濃い方がエンストロフィー $|\boldsymbol{\omega}|^2 = 0.4$ の等値面である。

図4: ディラレーションとエンストロフィー (拡大図)

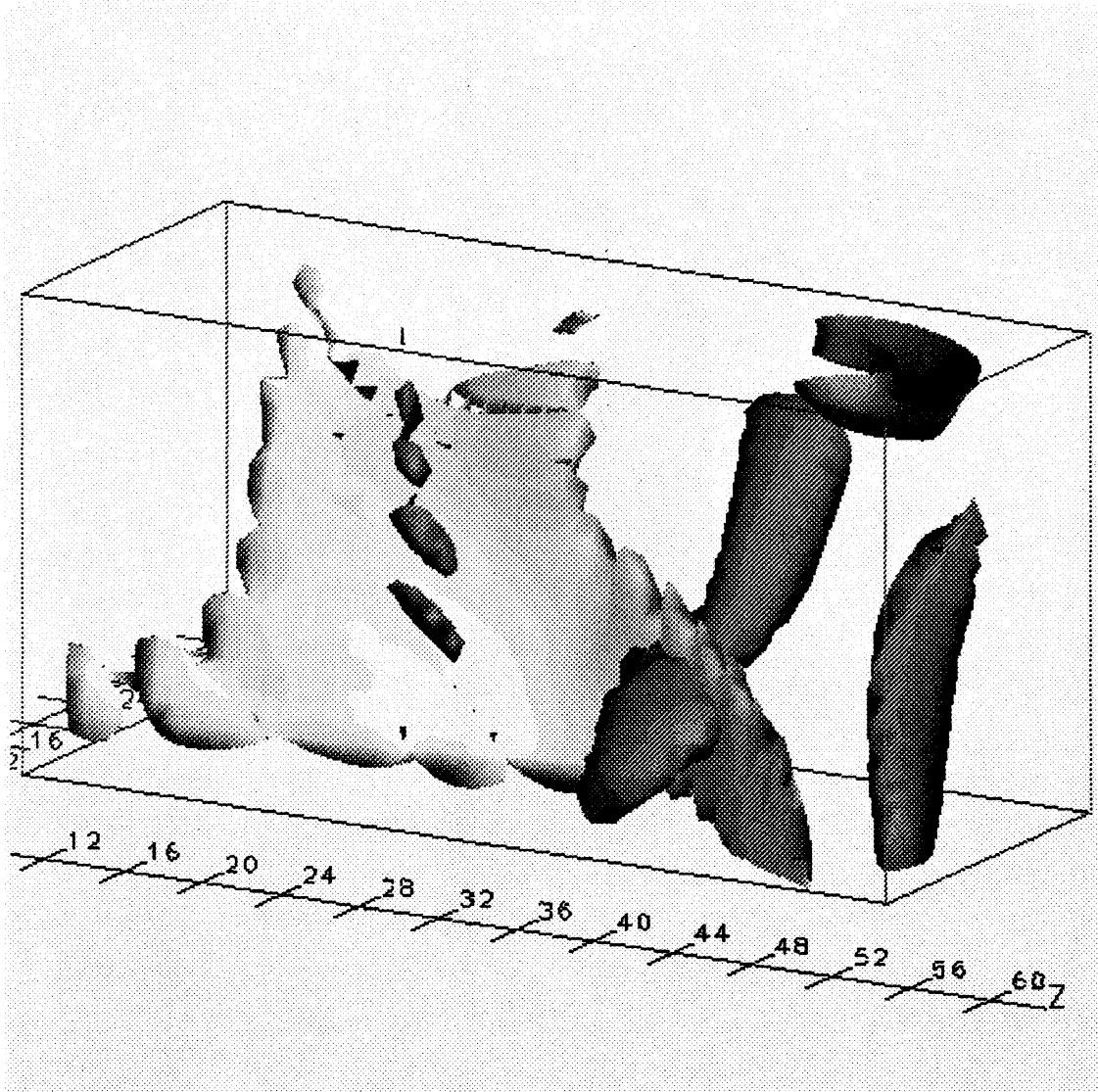
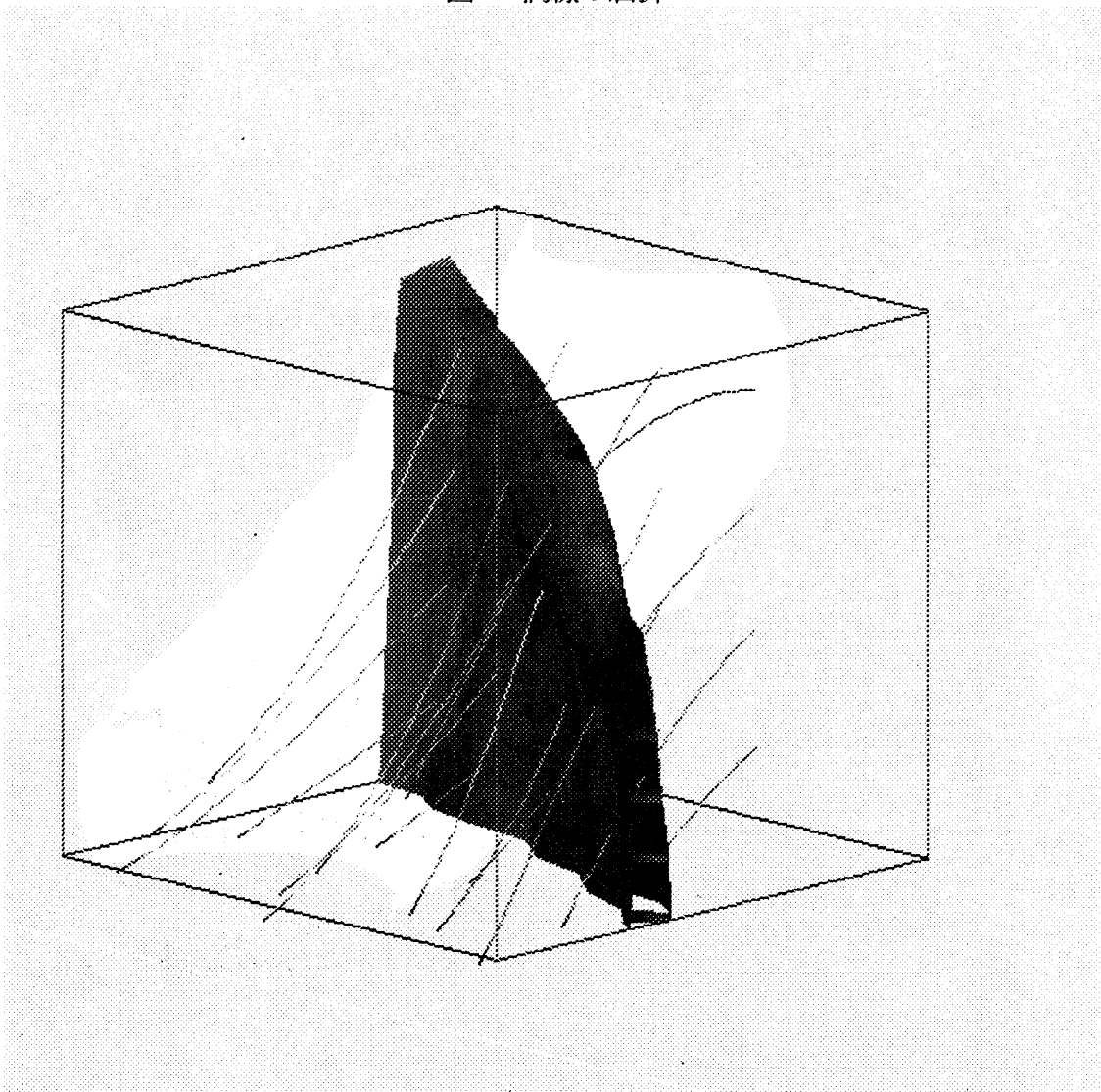


図3の部分拡大図。薄い層状のディラレーションに管状のエンストロフィーが衝突している。図に向かって層状のディラレーションの等値面の向う側が衝撃波の前面、手前側が後面である。エンストロフィーの管は衝撃波後面側で前面側よりも太くなっている。

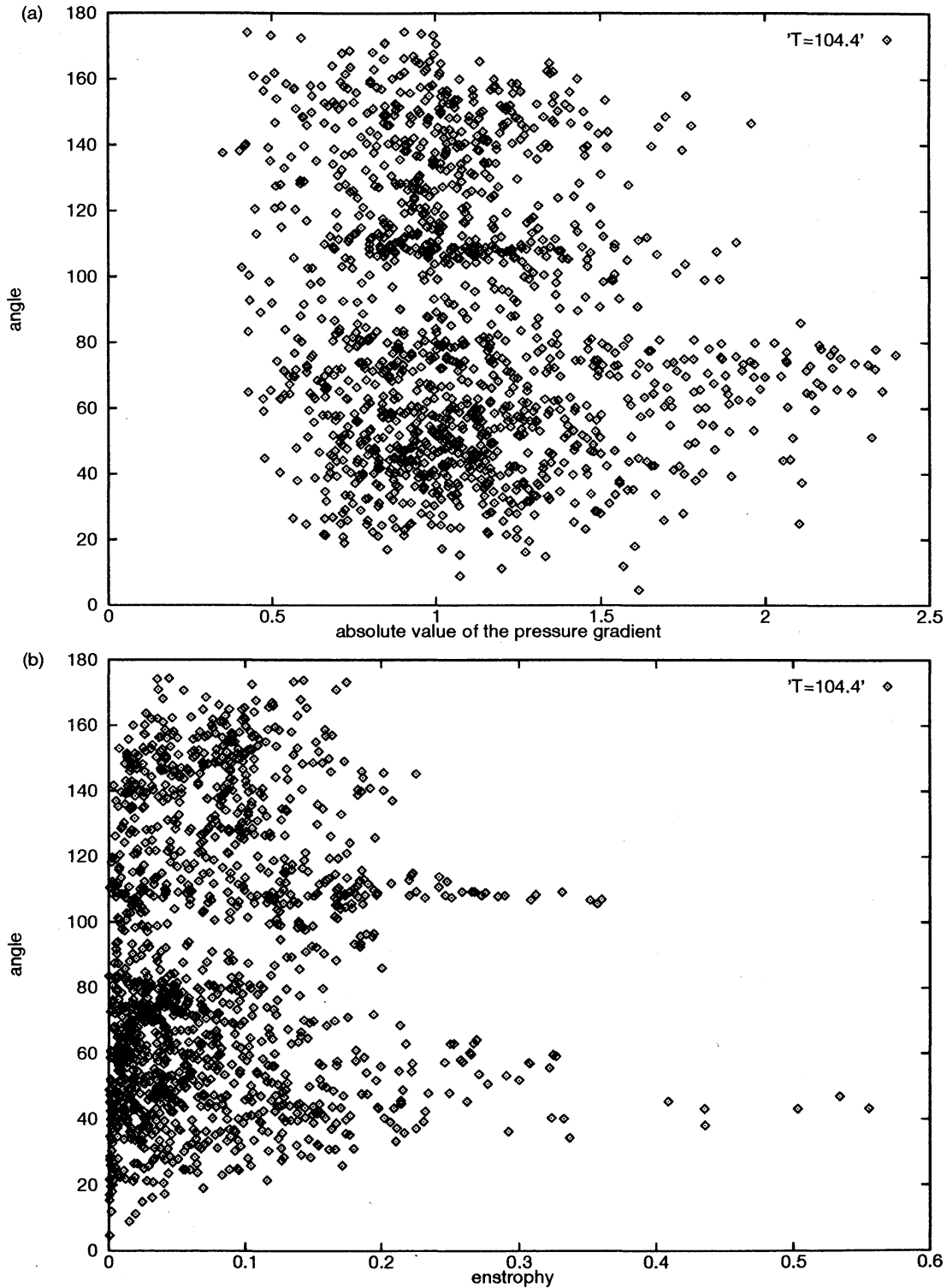
図 5: 渦線の屈折



薄い層状のディラレーションに管状のエンストロフィーが衝突している部分の拡大図。前図までのエンストロフィーの等値面に代わって渦線を描いている。衝撃波の前面から後面につき抜ける渦線は渦度が小さいものほど大きく屈折している。

図 6: 渦度と圧力勾配の角度についてのスキヤタリングプロット

(a) 横軸が圧力勾配の大きさの場合 (b) 横軸がエンストロフィーの場合

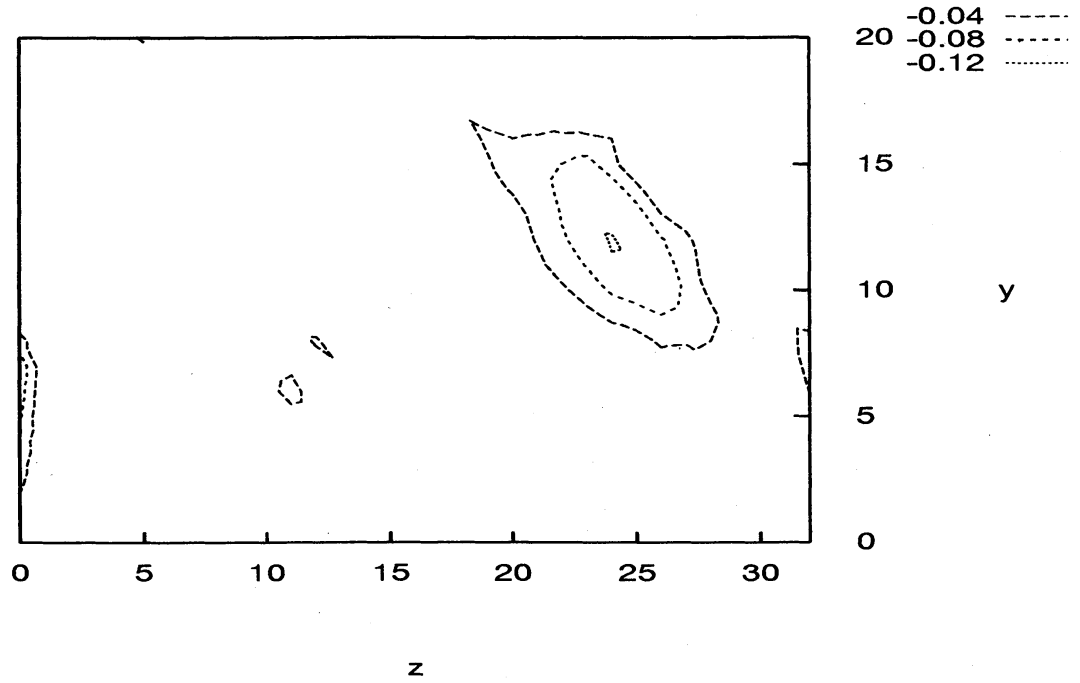


両図ともディラレーション $\nabla u < -1.0$ の条件下でプロットしてある。

図 7: 衝撃波面前後での渦度の変化

(a) 圧力勾配に平行な成分 (b) 圧力勾配に垂直な成分の 1/2

(a)



(b)

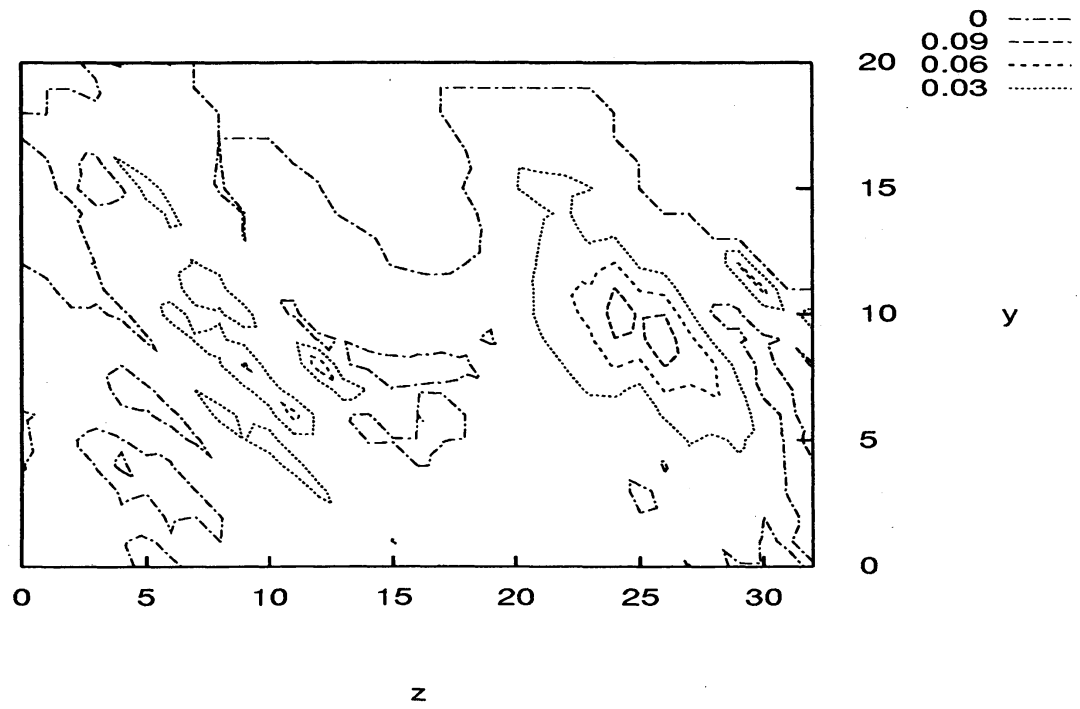


図 8: 曲衝撃波の概念図

