

## 熱対流乱流における singularity の役割

京大理 鈴木 絵理 (Eri Suzuki)  
京大理 藤 定義 (Sadayoshi Toh)

### 1 はじめに

熱対流系は大きく分けて2つの異なる乱流状態をもつ。ひとつはソフト乱流と呼ばれる以前から知られていた乱流状態、もうひとつはハード乱流と呼ばれる、より高いレイリー数における乱流状態である。後者のハード乱流は、近年シカゴ大の研究グループによって発見された [1, 2, 3, 4]。その大きな特徴は、十分発達した乱流状態であるにもかかわらず、速度場は大きなスケールの循環流をもつということである。我々はこの特性を解明するため、中央領域をモデル化した2次元ブシネ近似方程式の数値計算を行なった [5]。その結果、明らかになったことは、エントロピー  $S$  (温度揺らぎの2乗:  $T^2$ ) は小さなスケールへカスケードされ、運動エネルギー  $\varepsilon$  は大きなスケールへ逆輸送されているということである。このエントロピーカスケードが乱流状態を維持し、また、運動エネルギーの逆輸送は大きなスケールの循環流の維持に何らかの役割を果たしていると考えられる。

ハード乱流はスペクトルが巾則に従う領域をもつという発達した乱流の特徴を示す。実験では、エントロピースペクトルは指数が  $-7/5$  に近い値である巾則領域をもつことが報告されている。我々の数値実験においても、同様のスペクトルの振舞い ( $S(k) \propto k^{-7/5}$ 、 $E(k) \propto k^{-11/5}$ ) が確認されている。この巾則は Bolgiano と Obukhov によって 1959 年に独立に導き出された安定成層した乱流に対するスケーリング則であるので、Bolgiano-Obukhov のスケーリング (B-O スケーリング) と呼ばれている [6]。この B-O スケーリングは、エントロピーが小さなスケールへカスケードされると仮定した次元解析によって導くことができるスケーリングである。それと同時に B-O スケーリングは、熱拡散係数  $\kappa$  とエントロピー散逸率  $\varepsilon_\theta$  が独立であることを期待する。これは、次式によって定義される  $R(t)$  が非粘性極限において発散することを意味している。

$$\varepsilon_\theta(t) = -\frac{dS}{dt} = 2\kappa R(t) \quad (1)$$

$R(t)$  は温度勾配  $\nabla T$  と  $R(t) = \int |\nabla T|^2 dV$  という関係をもつ量である。このことから、非粘性極限において温度勾配は発散するということが予想される。

それでは、非粘性の場合には温度勾配はどのように発散するのだろうか。これは、非粘性ブシネ方程式が有限時間で発散する解 -singularity- をもつのかどうかという問題に通じる。また、このような singularity の存在可能性に関する問題は、いかにして滑らかな初期状態から乱流状態がつけられるのかという問題とも関係がある。つまり、非粘性極限

において乱流状態の形成されるためには、有限時間で無限小のスケールまで情報が伝わる必要があると考えられるが、それは singularity と何らかの関係があるのかということである。

3次元ナビエ・ストークス乱流に対しては、そのような観点から、3次元オイラー方程式の singularity の存在可能性についていくつか研究がなされている。その中でも興味深いものは、渦度の有限時間の発散を確認したという Pumir と Siggia の報告である [7]。流れ場に軸対称性を仮定すると、対称軸から十分離れているならば3次元オイラー方程式は2次元非粘性ブシネ方程式で近似できる。彼らはこのことを利用し、2次元非粘性ブシネ方程式を数値的に解くことによって、渦度が  $(t^* - t)^{-2}$  で発散することを発見している。これに対し、Brachet らは3次元オイラー方程式を  $256^3$  で直接数値計算した結果を報告している [8]。彼らは、その論文の中で、渦度の指数的な成長はみられたが Pumir と Siggia が発見したような渦度の有限時間発散は認められなかったと述べている。今のところ Pumir ら以外の研究者が行った数値計算において、3次元オイラー方程式の singularity を支持するような証拠は見つかっていないが、またそれを否定するような証拠も見つかっていない [8, 9]。

3次元オイラー方程式が singularity をもつのかどうかという問題はそれ自体興味ある問題である。その研究のうちいくつかは、2次元非粘性ブシネ方程式を計算の便宜に用いている。しかし、熱対流乱流の研究を行ってきた我々の立場からすると、2次元非粘性ブシネ方程式の singularity の存在可能性を探ることは、熱対流乱流の理解に大いに役立つものと思われる。そのような観点から、我々は2次元非粘性ブシネ方程式の singularity の存在可能性について調べた。ここでは、数値計算によって得られた結果とそれに関する考察を報告する。

## 2 基礎方程式と数値計算の方法

2次元非粘性ブシネ方程式は次のように表される。

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -\mathbf{u} \cdot \nabla T, \quad (2a)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = -\frac{\partial T}{\partial x} - \mathbf{u} \cdot \nabla \omega. \quad (2b)$$

$T$  は温度、 $\mathbf{u} = (u, v)$  は速度、 $\omega = \partial v / \partial x - \partial u / \partial y$  は渦度である。この方程式は保存量としてエントロピー  $S = \frac{1}{2} \int T^2 dV$  と全エネルギー  $E_t = \int (\frac{1}{2} |\mathbf{u}|^2 + yT) dV$  をもつ。

この方程式を周期境界条件の下でモード数  $256^2$  (Run1)、 $512^2$  (Run2)、 $1024^2$  (Run3) の擬スペクトル法を用いて解いた。時間積分は4次のルンゲ・クッタ法を用いた。

Run1 の初期条件は、

$$T(k) = k^4 e^{-k^2 + i\theta_r}, \quad (3a)$$

$$\omega(k) = k^4 e^{-k^2 + i\theta_r} \quad (3b)$$

を用いた。ただし、 $\theta_r$  はランダムな位相を表す。Run2、Run3 の初期条件はそれぞれ Run1 の第 1000 ステップ、Run2 の第 2000 ステップを用いた。時間刻みは Run1、Run2、Run3 それぞれに対し  $5 \times 10^{-4}$ 、 $2.5 \times 10^{-4}$ 、 $2.5 \times 10^{-4}$  を用いた。

### 3 数値計算の結果

有限時間発散解が存在するかどうかは 2 つの方法を用いて調べた。本章では、温度場の時間発展とそれぞれの方法から得られた結果について報告する。

#### 3.1 時間発展

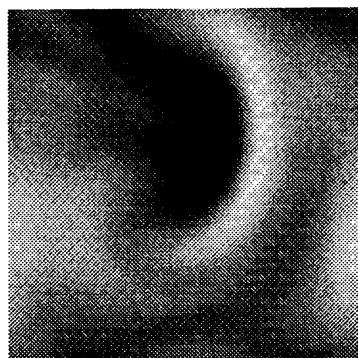
図 1 は温度場の時間発展を示したものである。濃淡は温度の高低を表す。濃い色は低い温度、薄い色は高い温度に対応する。初期の時刻では、低い温度の領域と高い温度の領域が衝突し、それらの境界に温度が急激に変化する“shock”を形成していく過程がみられる。Pumir らは 2 つの領域の境界を“bubble cap”と呼んでいる。この“bubble cap”のほぼ中央が最も温度勾配が大きい場所である。さらに時間がたつと、“bubble cap”における温度勾配は次第に大きくなり、同時に、両端が巻き上がっていく。

巻き上がった端では等温度線の不安定化がおこり、細い“枝”が伸びてくる。この現象は熱対流乱流にみられる温度場のフラクタル化に似ている。しかし、次の章で述べるように、“bubble cap”の不安定化がみられる時刻になると、shock の幅、つまり最小の長さスケールが計算に用いた格子間隔のオーダーとなっているため、計算精度が原因でこのような現象が現れているという可能性も否定できない。

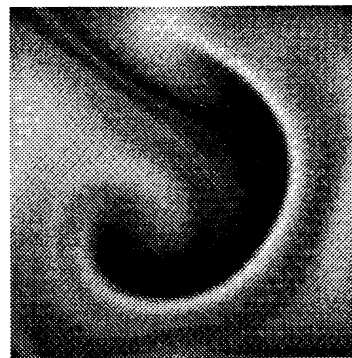
#### 3.2 analyticity strip method

“analyticity strip method”は、スペクトルの時間発展を追いかけることによって解の singularity を調べる方法である [10]。Brachet らはこの方法を用いて 3 次元オイラー方程式の singularity を調べている [8]。

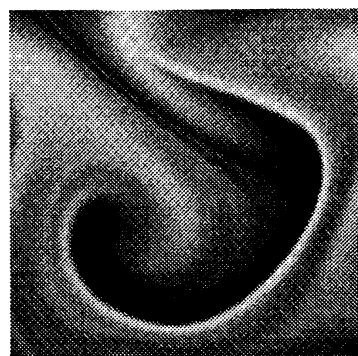
$f(z)$  ( $z = x + iy$ ) は実数関数  $f(x)$  を複素空間に拡張した関数とする。 $f(x)$  は実数  $x$  に対し正則な関数であるが、 $f(z)$  は  $z_j = x_j + iy_j$  に指数  $\rho$  の孤立特異点をもつとする。 $z = z_j$  の近傍では  $f(z)$  は次のような形で表される。



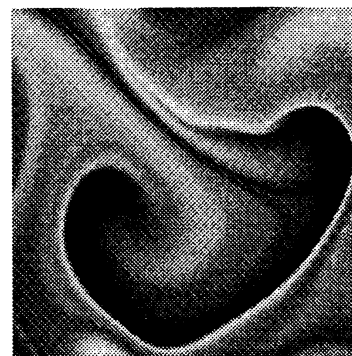
(a)



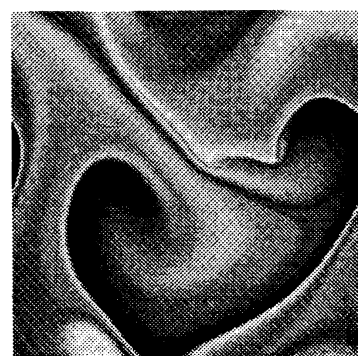
(b)



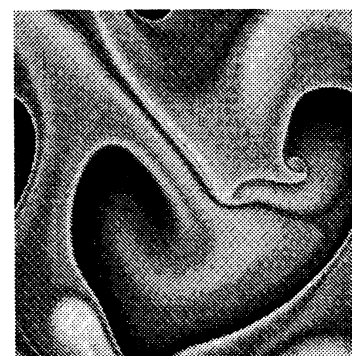
(c)



(d)



(e)



(f)

図1. 温度場のスナップショット。(a)  $t = 0.5$ 、(b)  $t = 1.0$ 、(c)  $t = 1.25$ 、(d)  $t = 1.5$ 、  
(e)  $t = 1.625$ 、(f)  $t = 1.75$ 。

$$f(z) = (z - z_j)^\rho \sum_{p=0}^{\infty} a_{j,p} (z - z_j)^p. \quad (4)$$

$f(z)$  のフーリエ変換

$$\hat{f}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} f(x) dx \quad (5)$$

の  $k \rightarrow \infty$  における漸近的な振る舞いはラプラスの方法により評価できる。つまり、

$$\hat{f}(k) \simeq \frac{-2 \sin \pi \rho}{k^{\rho+1}} \sum_j \epsilon_j e^{ikz_j} \sum_{p=0}^{\infty} a_{j,p} i^p \frac{\Gamma(\rho + p + 1)}{k^p}. \quad (6)$$

ただし、和は複素空間の上半平面 ( $y_j > 0$ ) についてとる。 $\epsilon_j$  は決定因子 ("determination factor") である。

(滑らかな初期条件をもつ) 非粘性ブシネ方程式の解  $T(x)$  は正則であるから、以上の考察を適用することができる。

$$S(k, t) = \frac{1}{2} \sum_{k-1/2 < |\mathbf{k}| \leq k+1/2} |\hat{T}(\mathbf{k}, t)|^2 \quad (7)$$

で定義されるエントロピースペクトルの高波数領域における形は、式 (6) において波数依存性を考慮すると、次のようになると予想される。

$$S(k, t) \simeq c(t) k^{-n(t)} e^{-2\delta(t)k}. \quad (8)$$

ここで  $\delta(t)$  は "analyticity strip" の幅である。

各時刻における  $\delta(t)$  の値は、数値計算によって得られたエントロピースペクトルを式 (8) を用いてフィットすることで求めることができる。図 2 は、異なる時刻に対するエントロピースペクトルをいくつかプロットしたものである。高波数領域には式 (8) で表されるような指数的な振る舞いがみられる。図 3 は、最小二乗法を用いてスペクトルをフィットすることにより得られた  $\delta(t)$  を示したものである。 $t = 1.0$  で傾きが変わっているが、どちらの領域でも  $\delta(t)$  の減少は指数的である。 $\delta(t)$  の値は計算に用いた格子間隔より小さくなると精度に問題がでてくるが、 $t > 1.6$  ではまさにそのような状況がおきている。

### 3.3 bubble cap における諸量の時間変化

Pumir らは温度勾配の最大値の時間変化を調べることによって渦度が有限時間で発散するという結論を出している。ここでは、その他の量の時間変化も調べることによってより詳しく singularity の存在可能性について探っていく。

方程式 (2a)、(2b) は  $\frac{D}{Dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla$  とすると、次のようにかきかえることができる。

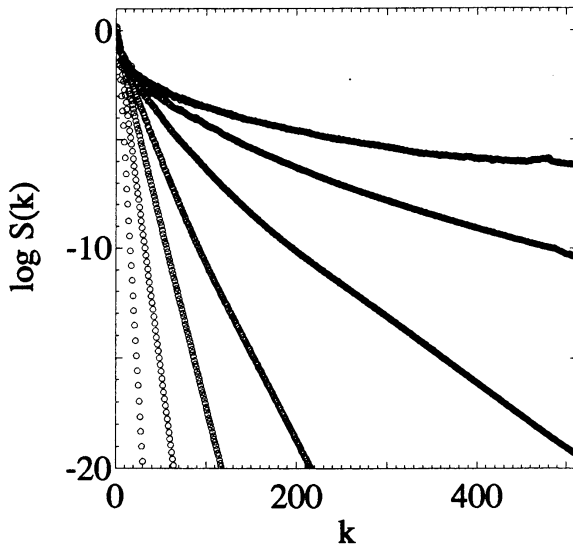


図2. エントロピースペクトル。左から  $t = 0.25$ 、 $t = 0.5$ 、 $t = 0.75$ 、 $t = 1.0$ 、 $t = 1.25$ 、 $t = 1.5$ 、 $t = 1.75$  におけるスペクトルである。

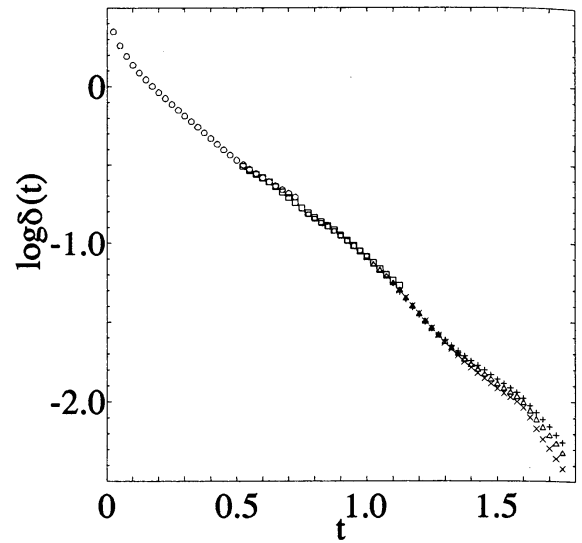


図3. エントロピースペクトルをフィットすることによって得た  $\delta(t)$ 。○: Run1 ( $5 \leq k \leq 100$ )、□: Run2 ( $15 \leq k \leq 200$ )、△: Run3 ( $20 \leq k \leq 400$ )、+: Run3 ( $20 \leq k \leq 350$ )、×: Run3 ( $20 \leq k \leq 450$ )。

$$\frac{D\chi}{Dt} = -\chi \cdot \nabla \mathbf{u} \quad (9a)$$

$$\frac{D\omega}{Dt} = -\frac{\partial T}{\partial x} \quad (9b)$$

ただし、 $\chi \equiv (\partial T / \partial y, -\partial T / \partial x)$  である。 $|\chi| = |\nabla T|$  であるから、 $|\nabla T|$  の発散を調べることと  $|\chi|$  の発散を調べることは同値であるので、本章では  $\chi$  の方を扱う。ラグランジュ的にみると、式 (9a) から  $|\chi| \propto (t^* - t)^{-2}$  ならば  $|\chi \cdot (\chi \cdot \nabla \mathbf{u})| \propto (t^* - t)^{-5}$ 、 $|\chi| \propto e^t$  ならば  $|\chi \cdot (\chi \cdot \nabla \mathbf{u})| \propto e^t$  となることが期待される。同様に (9b) からは  $|\partial T / \partial x| \propto (t^* - t)^{-2}$  ならば  $|\omega| \propto (t^* - t)^{-1}$ 、 $|\partial T / \partial x| \propto e^t$  ならば  $|\omega| \propto e^t$  であることが予想される。また、式 (9a) は  $\chi$  が strain 場との相互作用によって変化することを意味する。つまり、strain が強い場所ほど  $\chi$  の変化は大きい。

図4は  $|\chi|$ 、 $|\chi \cdot (\chi \cdot \nabla \mathbf{u})|$ 、 $|\partial T / \partial x|$ 、 $|\omega|$  の各時刻における最大値を示したものである。図4 (a) はそれらを片対数プロットした図、図4 (b) は  $|\chi|_{max}^{-1/2}$ 、 $|\chi \cdot (\chi \cdot \nabla \mathbf{u})|_{max}^{-1/5}$ 、 $|\partial T / \partial x|_{max}^{-1/2}$ 、 $|\omega|_{max}^{-1}$  をプロットした図である。二つの図を比較すると、それぞれの量の変化は有限時間で singular になるというよりもむしろ指数的に発散しているようにみえる。これは、とくに  $|\omega|_{max}$  の振舞いに顕著に現れている。また、図3について  $t = 1.0$  の付近で傾きが変わっているということを述べたが、図4 (a) についても同様の振舞いがみられる。このことも、指数的な発散を支持している。

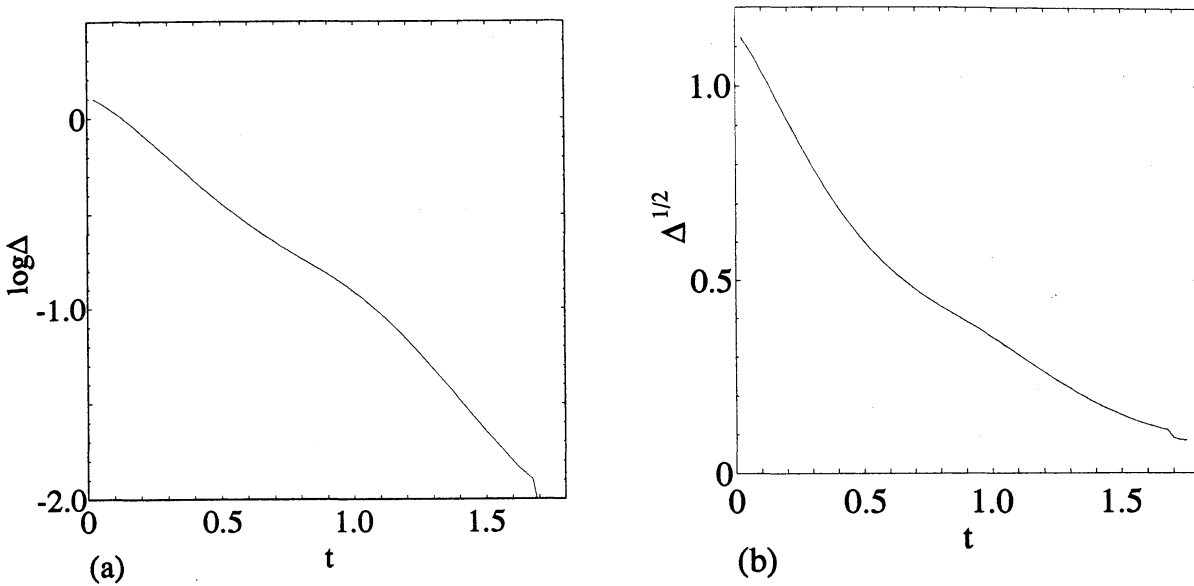


図 5. “bubble cap” の前面における “shock” の幅  $\Delta$ 。

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \omega. \quad (11c)$$

ただし、 $\frac{\partial(\psi, \cdot)}{\partial(x, y)} = \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x}$  である。ここで次のような変数のスケール変換を考える。

$$\Omega(x/a, y/c, \tau) = \Omega(X, Y, \tau) = \omega(x, y, t)/b, \quad (12a)$$

$$\Psi(x/a, y/c, \tau) = \Psi(X, Y, \tau) = \psi(x, y, t)/d, \quad (12b)$$

$$\Theta(x/a, y/c, \tau) = \Theta(X, Y, \tau) = T(x, y, t). \quad (12c)$$

である。 $a, c$  はそれぞれ  $x, y$  方向の長さスケール、 $b, d$  はそれぞれ渦度、流れ関数の特徴的な大きさを表す。 $\tau$  は  $t$  の関数で、スケール変換された系における時間変数である。なお、 $a, b, c, d$  はすべて  $t$  の関数である。このスケール変換を用いると方程式 (11a) ~ (11c) は次のようにかきかえられる。

$$\frac{ac}{d} \frac{\partial \tau}{\partial t} \left( \frac{\partial \Theta}{\partial \tau} + \alpha X \frac{\partial \Theta}{\partial X} + \beta Y \frac{\partial \Theta}{\partial Y} \right) + \frac{\partial(\Psi, \Theta)}{\partial(X, Y)} = 0, \quad (13a)$$

$$\frac{ac}{d} \frac{\partial \tau}{\partial t} \left( \frac{\partial \Omega}{\partial \tau} + \alpha X \frac{\partial \Omega}{\partial X} + \beta Y \frac{\partial \Omega}{\partial Y} \right) + \frac{\partial(\Psi, \Omega)}{\partial(X, Y)} = -\frac{c}{bd} \frac{\partial \Theta}{\partial X}, \quad (13b)$$

$$\frac{d}{a^2 b} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial X^2} + \frac{d}{c^2 b} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial Y^2} = \Omega. \quad (13c)$$

ただし、

図5は“bubble cap”の前面における“shock”の幅の時間変化を示したものである。ここで、“shock”の幅は次のように定義した。 $|\chi|$ の最大値を与える位置において $(\partial T/\partial x, \partial T/\partial y)$ の方向に断面をとる。この断面における温度の最大値、最小値をそれぞれ $T_{max}$ 、 $T_{min}$ とする。これらを用いて“shock”の幅 $\Delta$ は

$$\Delta = (T_{max} - T_{min})/|\chi| \quad (10)$$

と定義する。図5 (a)は $\log \Delta$ をプロットしたもの、図5 (b)は $\Delta^{1/2}$ をプロットしたものである。これらもまた、指数的な変化を支持している。また、 $|\chi|_{max}^{-1/2}$ と $|\partial T/\partial x|_{max}^{-1/2}$ は極めて近い値をとっており、温度勾配の発散はその $x$ 成分が担っていることが分かる。

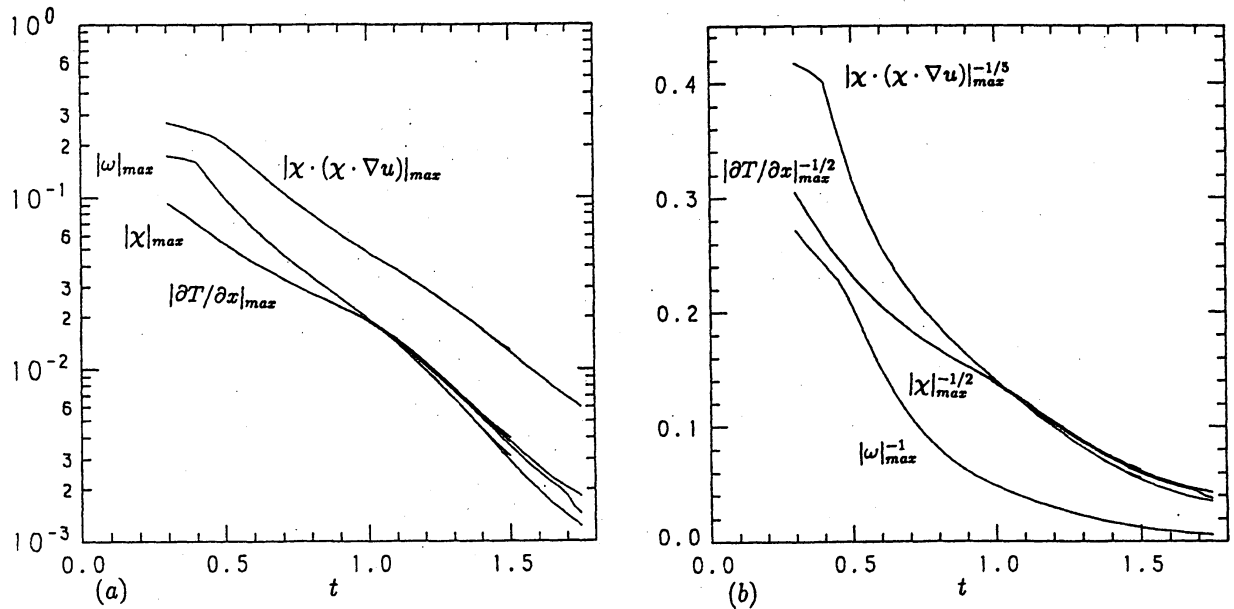


図4.  $|\chi|$ 、 $|\chi \cdot (\chi \cdot \nabla u)|$ 、 $|\partial T/\partial x|$ 、 $|\omega|$ の最大値。(a) 片対数プロット。(b)  $|\chi|_{max}^{-1/2}$ 、 $|\chi \cdot (\chi \cdot \nabla u)|_{max}^{-1/5}$ 、 $|\partial T/\partial x|_{max}^{-1/2}$ 、 $|\omega|_{max}^{-1}$ をプロットしたもの。

#### 4 ダイナミカルリスケーリング

本章では、温度勾配が指数的に発散する解が2次元ブシネ方程式のダイナミカルリスケーリングによって説明できることを示す [11]。方程式 (2a)、(2b) は次のように書き直せる。

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial(\psi, T)}{\partial(x, y)} = 0 \quad (11a)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{\partial(\psi, \omega)}{\partial(x, y)} = -\frac{\partial T}{\partial x} \quad (11b)$$



$$\alpha \equiv -\frac{\partial}{\partial \tau} \log a, \quad (14a)$$

$$\beta \equiv -\frac{\partial}{\partial \tau} \log c. \quad (14b)$$

である。以下では、2つの長さスケール  $a$ 、 $c$  及び  $b$ 、 $d$  を決め、温度勾配や渦度がどのように変化するかを調べる。

まず、 $a = c$  の場合を考える。(13a) ~ (13c) は時間に対して変化しない方程式であり、さらに各項が0ではないということを要請する。つまり、

$$\partial t / \partial \tau = \frac{ac}{d}, \frac{c}{bd} = 1, \frac{d}{a^2b} = \frac{d}{c^2b} = 1. \quad (15)$$

このとき、

$$b = a^{-1/2}, d = a^{3/2}, \partial t / \partial \tau = a^{1/2} \quad (16)$$

という関係が成り立つ。ここで、 $\alpha \equiv -\frac{\partial}{\partial \tau} \ln a$  とすると、

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \int_0^\tau \alpha(\tau) d\tau = \bar{\alpha} > 0 \quad (17)$$

ならば

$$a \sim \frac{\bar{\alpha}^2}{4} (t^* - t)^2, b \sim \frac{\bar{\alpha}}{2} (t^* - t)^{-1} \quad (18)$$

となる。したがって

$$\left| \frac{\partial T}{\partial \mathbf{x}} \right| \sim \frac{4}{\bar{\alpha}^2 (t^* - t)^2} \left| \frac{\partial \Theta}{\partial \mathbf{X}} \right|, \quad (19)$$

$$|\omega| \sim \frac{2\Omega}{\bar{\alpha}^2 (t^* - t)}, \quad (20)$$

$$\tau \sim -\frac{2}{\bar{\alpha}} \log |t^* - t| \quad (21)$$

となる。これは、Pumir らが報告したような有限時間で発散するスケーリング解となっている。しかし、彼らは singularity はこのようなスケーリング解によって説明されるのではなく、むしろ “bubble cap” の前面において等温度線の曲率が発散することによると述べている。また、(21) から  $t \rightarrow t^*$  のとき、スケール変換された系における時間スケール  $\tau$  は無限大になっていく。

$a = c$  の場合  $a \rightarrow 0$ 、 $b \rightarrow \infty$  において

$$|\mathbf{u}| = ab \left| \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{X}} \right| \rightarrow 0 \quad (22)$$

となっている。これは、速度が0になるような点で有限時間発散がおこることを示している。ところが、我々の数値計算では、そのようなことはみられなかった。

そこで、 $a \rightarrow 0$  のとき

$$|u| \sim O(1) \quad (23)$$

となる場合を扱う。我々の数値計算では、速度場 $u$ は(23)を満たしているのでこの場合を扱うのは妥当であろう。このとき $c$ に対して $a/c \rightarrow \infty$ と $a/c \rightarrow 0$ の2つの漸近状態が考えられる。 $a/c \rightarrow \infty$ の場合は $b = c = d = 1$ という $a \rightarrow 0$ と矛盾する関係式が導かれ、(23)と $a/c \rightarrow \infty$ は両立し得ないことが分かる。一方、 $a/c \rightarrow 0$ の場合は $c = 1$ 、 $a = b$ となり矛盾は生じない。実際、数値計算でも $a \rightarrow 0$ 、 $c = 1$ となる傾向がみられる。図5は $|\nabla T|$ の最大値を与える $(\partial T/\partial x, \partial T/\partial y)$ と水平方向のなす角度 $\theta$ を示したものである。 $\theta$ の値はほぼ $0^\circ$ となっている。また、図4からも温度勾配の発散はほとんどその水平成分が担っていることが分かる。これらの図は“bubble cap”の前面では水平方向の長さスケールは0に近づくが、垂直方向の長さスケールはほとんど変わらないことを示唆している。つまり、温度勾配の発散が大きい領域は垂直方向に平行なシートになる。

$a/c \rightarrow 0$ の場合、さらに

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = 1 \quad (24)$$

という条件を課し、 $a = c$ の場合と同様に $\alpha = -\frac{\partial}{\partial \tau} \ln a$ とすると

$$a \sim a_0 \exp(-\bar{\alpha}t), b \sim b_0 \exp(\bar{\alpha}t) \quad (25)$$

となる。ただし、 $a_0 b_0 = 1$ である。このとき、温度勾配および渦度は

$$\left| \frac{\partial T}{\partial \mathbf{x}} \right| \sim \frac{1}{a_0} \exp(\bar{\alpha}t) \left| \frac{\partial \Theta}{\partial \mathbf{X}} \right|, \quad (26)$$

$$|\omega| \sim b_0 \Omega \exp(\bar{\alpha}t) \quad (27)$$

となり、指数的に成長することが分かる。

## 5 まとめ

我々が行った数値計算からは、有限時間での発散を示唆するような証拠は得られなかった。しかし、このことからただちに singularity の存在を否定できない。Pumir らは、温度勾配の発散は最初は指数的だが、“bubble cap”において等温度線が不安定化しカusp状になると、そこで温度勾配が $(t^* - t)^{-2}$ で発散すると報告している。今のところ、有限時間

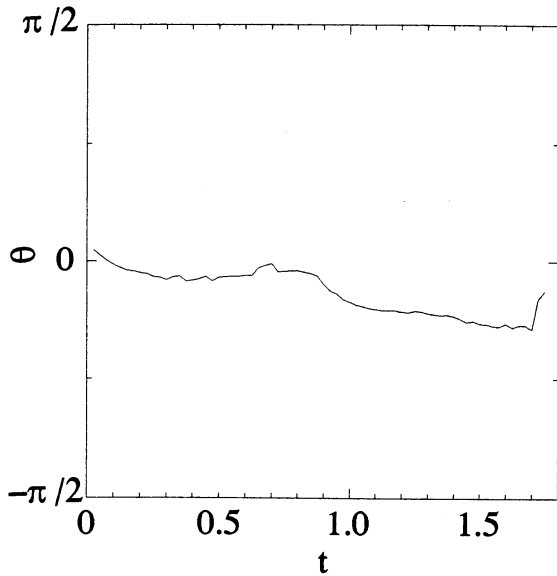


図6.  $|\nabla T|$ の最大値を与える  $(\partial T/\partial x, \partial T/\partial y)$  と水平方向のなす角度 $\theta$ 。

発散がおこる前の時刻までしか我々の数値計算は到達していないのか、あるいは本当に指数的な発散しかおこらないのか、はっきりした結論は出せない。しかし、Pumirらのように有限時間での発散が“bubble cap”の不安定化によるのだとすると、それを調べればどちらの状況になっているのか判定する手掛かりになるであろう。これについては、今後の課題としたい。

また、我々は非粘性の場合のエントロピー輸送過程と熱対流乱流におけるエントロピーカスケードは何らかの関係があるのではないかと考え、本研究をはじめた。ところが、ウェーブレット変換を用いて各スケールのエントロピー  $S^m(t)$  の時系列をとると、それらは異なる特徴を示す。図7はスケール  $2^{-m}$  のエントロピー  $S^m(t)$  の時系列である。図7(a)は中央領域をモデル化した2次元ブシネ方程式の数値計算で得られたデータ、図7(b)は2次元非粘性ブシネ方程式のデータを用いた。熱対流乱流の方はピークが大きなスケールから小さなスケールへ移っていくのがみられるが、非粘性の場合は大きなスケールのエントロピーが最初に増えはじめ、次第に小さなスケールのエントロピーも増えていくだけで、ピークの移動はみられない。この非粘性の場合は“shock”の幅が狭くなるに従って、その幅のスケールにエントロピーが運ばれてくると考えられる。これはエントロピーが間欠的に小さなスケールへ運ばれていくカスケード過程とは異なるもののように思われる。

熱対流乱流において盛んにエントロピーカスケードがおきているとき、等温度線が次第に入り組んできて小さなスケールが現れてくる様子がみられる。Procacciaは等温度面のフラクタル化が熱対流乱流を理解する上で重要であると述べている [12]。等温度線の不

安定化は等温度線のフラクタル化と関係があるのだろうか。一見、それらは近いものに見える。有限時間での発散が等温度線の不安定化によっておこるのならば、それがエントロピーカスケードと何らかの関係をもつことがいえるかもしれない。

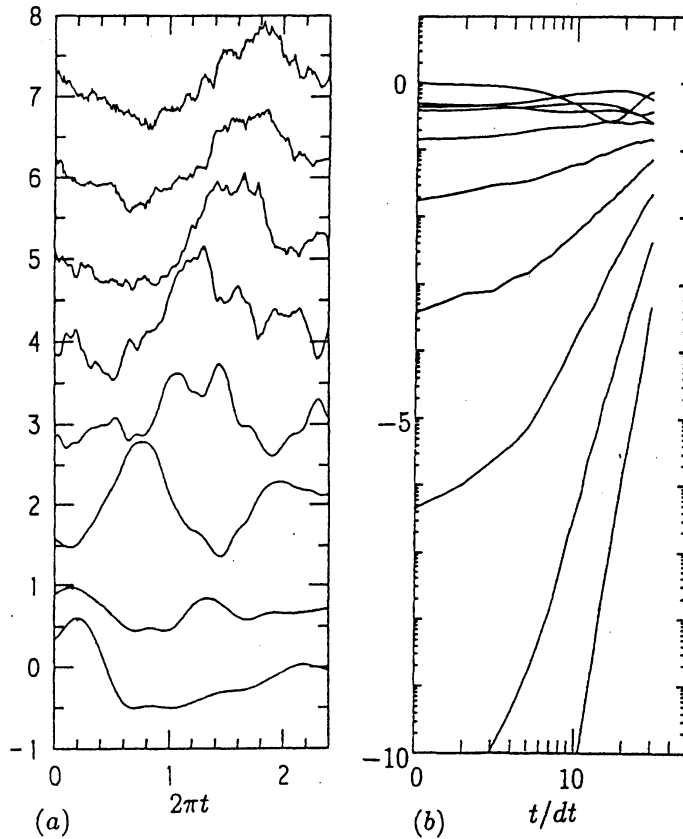


図7. ウェーブレット変換によって得られたスケール  $2^{-m}$  のエントロピー  $S^m(t)$  の時系列。(a) 中央領域をモデル化した2次元粘性方程式の場合。 ( $dt = 2.5 \times 10^{-4}$ ) 下の方から  $m = 0, 1, \dots, 7$  に対するエントロピー  $S^m(t)$ 。見やすいように垂直方向に  $m$  だけずらし、分散の3倍で規格化してある。(b) 2次元非粘性方程式の場合。下の方から  $m = 9, 8, \dots, 0$  に対するエントロピー  $S^m(t)$ 。

## References

- [1] F. Heslot, B. Castaing, and A. Libchaber, *Phys. Rev. A* **36**, 5870 (1987).
- [2] B. Castaing *et al.*, *J. Fluid. Mech.* **204**, 1 (1989).
- [3] M. Sano, X.-Z. Wu, and A. Libchaber, *Phys. Rev. A* **40**, 6421 (1989).
- [4] X.-Z. Wu, L. Kadanoff, A. Libchaber, and M. Sano, *Phys. Rev. Lett.* **64**, 2140 (1990).
- [5] S. Toh and E. Suzuki, *preprint* .
- [6] A. S. Monin and A. M. Yaglom, *Statistical Fluid Mechanics: Mechanics of turbulence, Vol. 2* , (MIT Press, Cambridge, 1975) 387.
- [7] A. Pumir and E. D. Siggia, *Phys. Fluids. A* **4**, 1472 (1992).
- [8] M. E. Brachet *et al.*, *Phys. Fluids. A* **4**, 2845 (1992).
- [9] W. E and C. W. Shu, *Phys. Fluids* **6**, 49 (1994).
- [10] U. Frich and R. Morf, *Phys. Rev. A* **23**, 2673 (1981).
- [11] X. Wang and A. Bhattacharjee, *Topological Aspects of the Dynamics of Fluids and Plasmas*, edited by H. K. Moffatt *et al.*, (Kluwer Academic, Dordrecht, The Netherlands, 1992), 303.
- [12] I. Procaccia *et al.*, *Phys. Rev. A* **44**, 8091 (1991).