数理解析研究所講究録
第 893 巻 1995 年 4-23

Thurston's Formulation and Proof of Andreev's Theorem

東京電機大学 理工学部 相 馬 輝 彦 (Teruhiko Soma)

Sを closed, connected orientable surface とし，S上には幾何的構造が定義されているとする．すなわち，$\mathrm{Isom}^{+}(X)$ のある離散部分群Γによって，$S=X/\Gamma$と表せる．ただし，Xは $\mathbf{S}^2, \mathbf{E}^2$または $\mathbf{H}^2$の何れかであるとする．$\mathcal{T}$を Sの（位相的）三角形分割とする．実際，我々が必要としているのは，2-simplices からなる Sの胞体分割である．従って，2-simplex の 2 つの vertices が S上の同じ点になってもよい．より正確には，この論説で言うところの**三角形分割**とは S上の胞体分割で，それを普遍被覆 Xに引き戻した分割が（通常の意味での）三角形分割になっているものを意味する．$\mathcal{E},\mathcal{V},\mathcal{F}$を $\mathcal{T}$の edges, vertices および faces (2-simplices) の集合とし，写像$\Theta:\mathcal{E}\longrightarrow[0,\pi/2]$が与えられているとする．$\mathcal{V}=\{v_1,\ldots,v_n\}$に 1 対 1 に対応する S上の (geometric) circles の集合 $\mathcal{C}=\{C_1,\ldots,C_n\}$ が次の (i), (ii) をみたすとき，data $\mathcal{T},\Theta$を実現する *circle pattern* であると言う．

(i) $C_1,\ldots,C_n$間の nerves による S上の分割$\overline{\mathcal{T}}$は $\mathcal{T}$に ambient isotopic であり，その対応は各円 C_iの中心$\overline{v}_i$を v_iに写す．

(ii) $C_i\cap C_j\neq\emptyset$である任意の組 C_i, C_jに対し，C_iの中心と C_jの中心を結ぶ nerve $\overline{e}$が，この ambient isotopy で，v_iと v_jを結ぶ edge e に写されるならば，C_iと C_jの intersection angle は$\Theta(e)$ に一致する（図 1 参照）．

特に，$\Theta\equiv 0$ であるとき，$\mathcal{C}$を三角形分割 $\mathcal{T}$に対応する *circle packing* という．

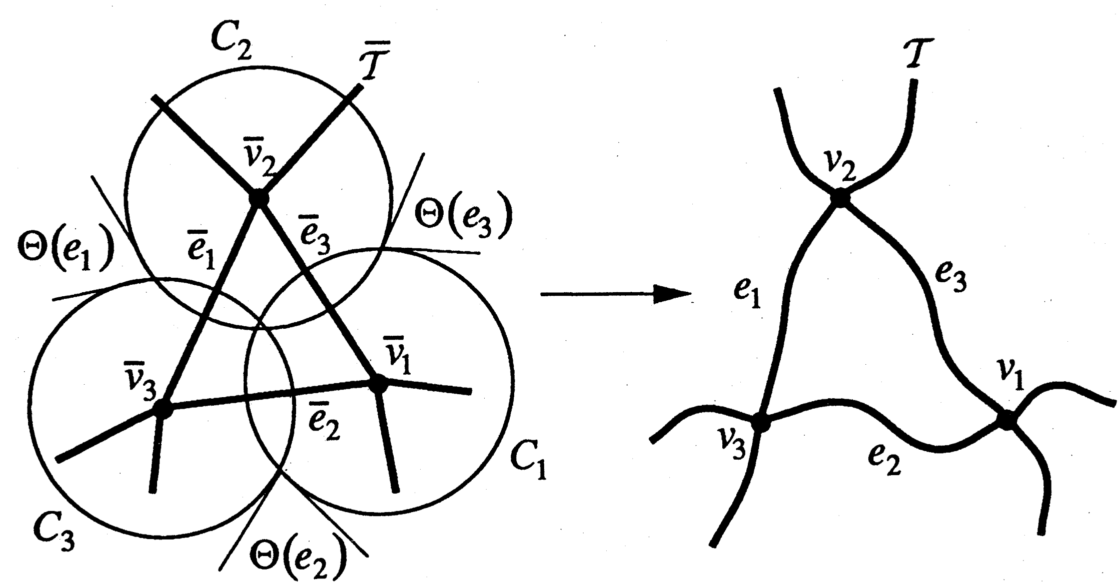

図 1.

この講究録では，適当な条件のもとで data $\mathcal{T},\Theta$を実現する，S上の幾何的構造と circle pattern の対が一意的に存在することを証明する．この定理は Andreev [1], [2] および Thurston [4, Chapter 13] によって証明された．Andreev は$\chi(S) > 0$ の場合 ($\mathbf{S}^2$-case)，Thurston は$\chi(S) \leq 0$ の場合 ($\mathbf{E}^2$, $\mathbf{H}^2$-case) を扱っている．後に，Rodin-Marden [3] は，$\chi(S) > 0$ の場合の主張も，Thurston 流の方法で証明できることを示した．ここでは，まず Thurston の証明を紹介する．[4] の証明には明らかな見落としがあるので，それも補足しておく．次に，Rodin-Marden の証明の概略を述べる．彼らの証明は Thurston の証明の $\mathbf{E}^2$-case を真似したものなので，証明の異なるところだけ説明すれば充分であろう．

§1. $\chi(S) \leq 0$ の場合

これ以後，$S,\mathcal{T}$は常に，上で挙げた条件をみたすものとする．

定理 1． ($\mathbf{E}^2$, $\mathbf{H}^2$-case) $\chi(S) \leq 0$ であり，かつ写像$\Theta : \mathcal{E} \longrightarrow [0,\pi/2]$ は次の 2 条件 (i),(ii) をみたすとする．

(i) $e_1, e_2, e_3 \in \mathcal{E}$を $e_1+e_2+e_3$が S内の null-homotopic loop を表すような任意の 3 組とする．もし$\sum_{i=1}^{3}\Theta(e_i) \geq \pi$であれば，$e_1+e_2+e_3$は 1 つの $f \in \mathcal{F}$の境界となる（図 2(a) 参照）．

(ii) $e_1, e_2, e_3, e_4 \in \mathcal{E}$を $e_1+e_2+e_3+e_4$が S内の null-homotopic loop を表すような任意の 4 組とする．もし$\sum_{i=1}^{4}\Theta(e_i) = 2\pi$であれば，$e_1+e_2+e_3+e_4$は 2 つの $f_1, f_2 \in \mathcal{F}$の和集合の作る四角形の境界となる（図 2(b) 参照）．

このとき，data $\mathcal{T},\Theta$を実現するような，S上唯一つ（$\chi(S)=0$ の場合はスカラー倍を除いて唯一つ）の幾何的構造と circle pattern $\mathcal{C}$の対が存在する．

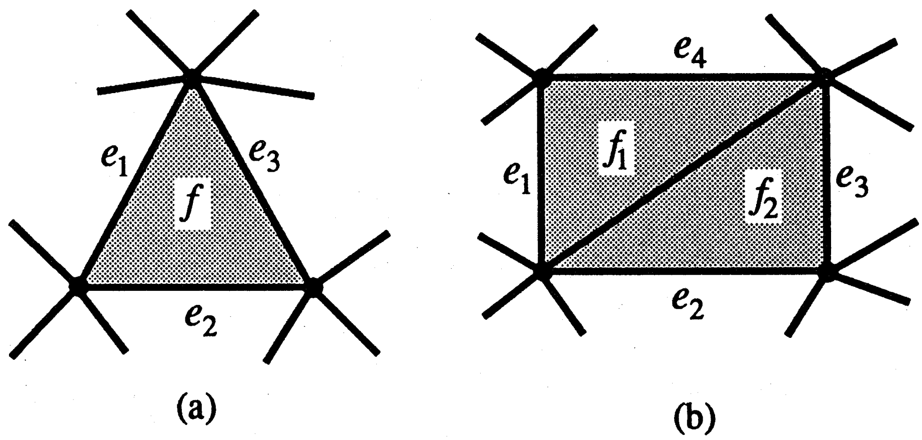

図 2.

注意． circle packing の場合は任意の $\{e_i\} \subset \mathcal{E}$に対して，$\sum\Theta(e_i)=0$ であるので，定理 1 の条件 (i),(ii) は自動的にみたされる．したがって，三角形分割 $\mathcal{T}$に対応するような circle packing はつねに存在する．

まずは各 2-simplex$f \in \mathcal{F}$ごとに，与えられた intersection angles を持つ circles の 3 対が存在することを示す.

補題 1. 任意の$\theta_1, \theta_2, \theta_3 \in [0, \pi/2]$ および任意の正数 r_1, r_2, r_3に対し，r_1, r_2, r_3を半径にもつ $\mathbf{E}^2$または $\mathbf{H}^2$内の円 C_1, C_2, C_3でその intersection angles が$\theta_1, \theta_2, \theta_3$となるものが (up to isometry) で唯一つ存在する（図 3 参照）.

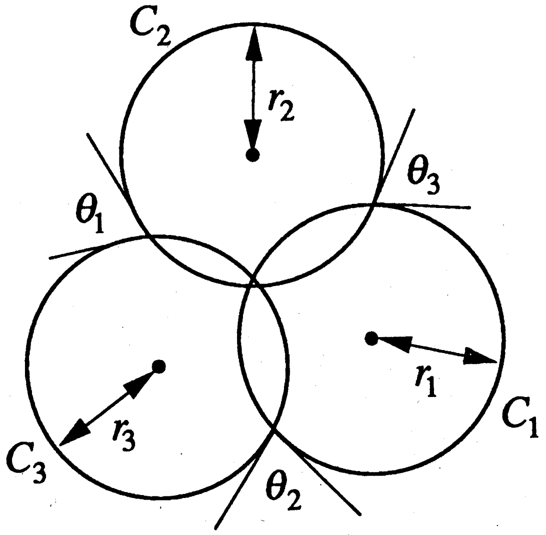

図 3.

証明. $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$ とする．C_iと C_jが角度θ_kで交わるときの中心間の距離を l_kとする（図 4 参照）.

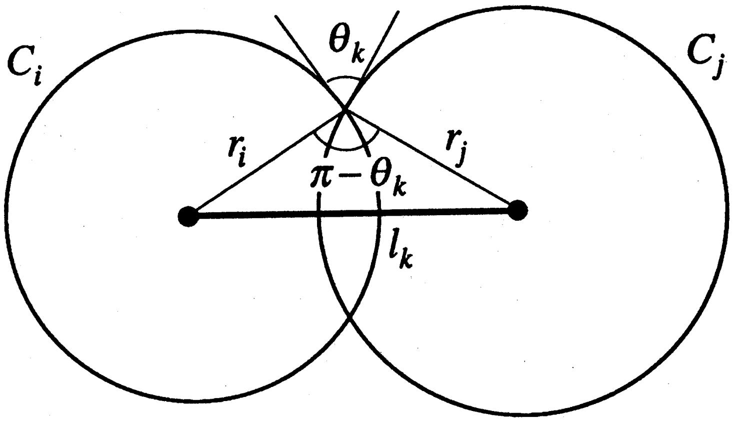

図 4.

このとき，$\pi - \theta_k \geq \pi/2$ であるから，$l_k > \max\{r_i, r_j\}$ であり，l_1, l_2, l_3が三角不等式をみ

たすことが分かる．実際，図 4 の三角形に関する三角不等式から $l_k \le r_i + r_j$であり，また $r_i \le \max\{r_i, r_k\} < l_j$, $r_j \le \max\{r_j, r_k\} < l_i$であるから，$l_k < l_i + l_j$となる．$C_1, C_2, C_3$の中心として，3 辺の長さが l_1, l_2, l_3の三角形 fの頂点をとれば，この補題で求めている 3 組の円ができる（図 5 参照）．

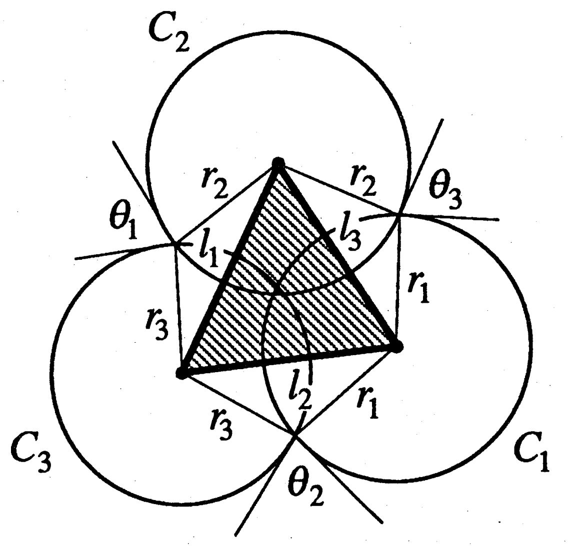

図 5.

一意性は fの構成の仕方から明かである．　□

$\mathcal{V} = \{v_1, ..., v_n\}$ とおく．$\mathbf{r} = (r_1, ..., r_n)$ を $\mathbf{R}^n_+ = \{(x_1, ..., x_n) \in \mathbf{R}^n; x_i > 0\ (i = 1, ..., n)\}$ の任意の元とする．任意の $f \in \mathcal{F}$に対し，その頂点を v_i, v_j, v_k，辺を e_p, e_q, e_rとおく．補題 1 の証明で与えたような，r_i, r_j, r_kと$\Theta(e_p), \Theta(e_q), \Theta(e_r)$ から決まる $\mathbf{E}^2$または $\mathbf{H}^2$内の (geometric) 2-simplex を $f_{\mathbf{r}}$とする．$\{f_{\mathbf{r}}; f \in \mathcal{F}\}$ を $\mathcal{T}$と同じ combinatorial type を持つように貼り合わせて出来た「距離空間」を $S_{\mathbf{r}}$とする．$\mathcal{T}$の vertex v_iと対応する $S_{\mathbf{r}}$内の点（これも v_iで表す）を中心とする半径 r_iの「円」を C_iとする．補題 1 より，$\mathcal{C} = \{C_1, ..., C_n\}$ は data $\mathcal{T}, \Theta$を実現する「 circle pattern 」である．これで，定理 1 の証明が終わったと思うのは，**錯覚**である．問題なのは $S_{\mathbf{r}}$上の幾何的構造である．各 $f_{\mathbf{r}}$の辺は全て geodesic segments であから，各 $f_{\mathbf{r}}$上の幾何的構造は $S_{\mathbf{r}}$上の「幾何的構造」へと拡張される．しかし一般に，$S_{\mathbf{r}}$は $\mathcal{V}$において cone-type singularity を持つので，通常の意味での幾何的構造を持つとは言えない．$v_i \in \mathcal{V}$を頂点にもつ $S_{\mathbf{r}}$内の 2-simplices を $(f_{i1})_{\mathbf{r}}, ..., (f_{il})_{\mathbf{r}}$，各 $(f_{ij})_{\mathbf{r}}$の v_iにおける角度をθ_{ij}とする．これらの角度の総和 $\theta_{i1} + \cdots + \theta_{il}$を $S_{\mathbf{r}}$の点 v_iにおける *cone-angle* といい，2πと cone-angle との差：

$$\kappa_{\mathbf{r}}(v_i) = 2\pi - (\theta_{i1} + \cdots + \theta_{il})$$

を点 v_iにおける $S_{\mathbf{r}}$の *curvature* と言う．明らかに，$S_{\mathbf{r}}$が幾何的構造を持つことと，$\kappa_{\mathbf{r}}(v_1) =$

$\cdots = \kappa_{\mathbf{r}}(v_n) = 0$ は同値である．連続写像

$$F : \mathsf{R}_+^n \longrightarrow \mathsf{R}^n \tag{1.1}$$

を $F(\mathbf{r}) = (\kappa_{\mathbf{r}}(v_1), ..., \kappa_{\mathbf{r}}(v_n))$ で定義すると，今までの議論より次が言える．

(1.2) 定理 1 の主張は $F(\mathbf{r}) = (0, ..., 0)$ をみたす $\mathbf{r} \in \mathsf{R}_+^n$ が唯一つ（E^2-case ではスカラー倍を除いて唯一つ）存在することと同値である．

補題 2． C_1, C_2, C_3 を図 3 にあるように intersection angles $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ で交わる半径 r_1, r_2, r_3 の円とする．C_1, C_2, C_3 の中心 v_1, v_2, v_3 で張られる E^2 または H^2 内の 2-simplex を f とし，v_i における f の角度を α_i とする．もし C_1 をより小さい半径 r_1' をもつ円 C_1' で置き換え，その他の円の半径や intersection angles 等はそのままであるとすると，C_1' の中心 v_1' は $\mathrm{int} f$ に含まれる．特に，v_1', v_2, v_3 の張る 2-simplex の角度を α_i' $(i = 1, 2, 3)$ とすると，$\alpha_1 < \alpha_1'$, $\alpha_2 > \alpha_2'$, $a_3 > \alpha_3'$ が成り立つ（図 6 参照）．

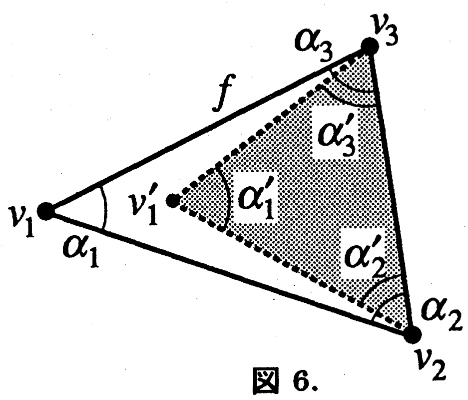

図 6.

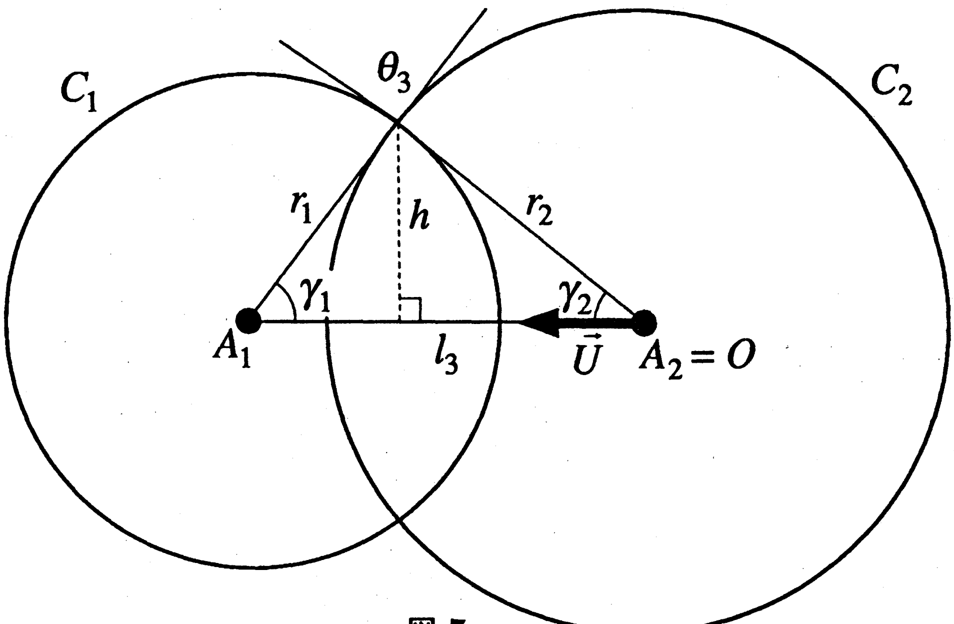

図 7.

証明. もし，必要ならば C_1 の半径を何段階かに分けて減少させればよいので，差 $r_1 - r_1'$ は充分小さい正数と仮定出来る．

まず，E^2-case を考えよう．v_1, v_2, v_3 の E^2-座標を A_1, A_2, A_3 とする．図 7 のように，A_2 が原点 O と一致するような座標を選ぶ．$\overrightarrow{OA_1}$ に平行な長さ 1 の位置ベクトルを $\overrightarrow{U}$ とすると，$\overrightarrow{OA_1} = l_3\overrightarrow{U}$ である．$\overrightarrow{OA_1}$ の r_1 による偏微分 $(\partial/\partial r_1)\overrightarrow{A}_1$ を考える．(注意：ここで偏微分を $(\partial/\partial r_1)\overrightarrow{OA_1}$ ではなくて $(\partial/\partial r_1)\overrightarrow{A}_1$ と書いたのは，このベクトルは r_1 が変化したときの点 A_1 の運動方向を表すものであり，$O = A_2$ という原点の選び方によらないのを強調するためである.)

$$\frac{\partial\overrightarrow{A}_1}{\partial r_1} = \frac{\partial l_3}{\partial r_1}\overrightarrow{U} + l_3\frac{\partial\overrightarrow{U}}{\partial r_1}. \tag{1.3}$$

$\overrightarrow{V} = (\partial/\partial r_1)\overrightarrow{U}$ とおくと，$\overrightarrow{V}$ は $\overrightarrow{U}$ に直交している．実際，$\overrightarrow{U} \cdot \overrightarrow{U} = \|\overrightarrow{U}\|^2 \equiv 1$ であるから，この両辺を r_1 で偏微分すると，$2\overrightarrow{U} \cdot (\partial/\partial r_1)\overrightarrow{U} = 0$ である．図 7 より，$l_3 = r_1 \cos\gamma_1 + r_2 \cos\gamma_2$，$r_1 \sin\gamma_1 = r_2 \sin\gamma_2 = h$ であり，かつ $\gamma_1 + \gamma_2 = \theta_3$ が定数であるから，次が成り立つ．

$$\begin{aligned}
\frac{\partial l_3}{\partial r_1} &= \cos\gamma_1 - r_1 \sin\gamma_1 \cdot \frac{\partial\gamma_1}{\partial r_1} - r_2 \sin\gamma_2 \cdot \frac{\partial\gamma_2}{\partial r_1} \\
&= \cos\gamma_1 - h\left(\frac{\partial}{\partial r_1}(\gamma_1 + \gamma_2)\right) \\
&= \cos\gamma_1.
\end{aligned}$$

従って，式 (1.3) より，

$$-r_1\frac{\partial\overrightarrow{A}_1}{\partial r_1} = -(r_1 \cos\gamma_1)\overrightarrow{U} - r_1 l_3\overrightarrow{V}. \tag{1.4}$$

C_i と C_j の 2 交点を通る E^2 の直線を L_{ij} とする．$\overrightarrow{V}$ が $\overrightarrow{U}$ に直交するので，式 (1.4) より，(A_1 を始点にとったときの）ベクトル $-r_1(\partial/\partial r_1)\overrightarrow{A}_1$ の終点は L_{12} 上にあることが分かる（図 8 参照）．C_1, C_3 の組に関しても同様な議論をすると，$-r_1(\partial/\partial r_1)\overrightarrow{A}_1$ の終点は L_{13} 上にもある．従って，3 直線 L_{12}, L_{13}, L_{23} の交点を Q とすると，$-r_1(\partial/\partial r_1)\overrightarrow{A}_1 = \overrightarrow{A_1Q}$，すなわち $-(\partial/\partial r_1)\overrightarrow{A}_1 = (1/r_1)\overrightarrow{A_1Q}$ が成り立つ（図 9 参照）．$-(\partial/\partial r_1)\overrightarrow{A}_1$ は r_1 が減少するときの点 A_1 の運動方向を表しているので，あとは Q が f の内点であることを証明すれば充分である．もし，$Q \in \mathrm{int} f$ でないとすると，Q は図 10 の斜線の部分の何れかに含まれるはずである．一般性を失うことなく Q が線分 $\overline{A_2A_3}$ に関して A_1 の反対側にあると仮定できる．

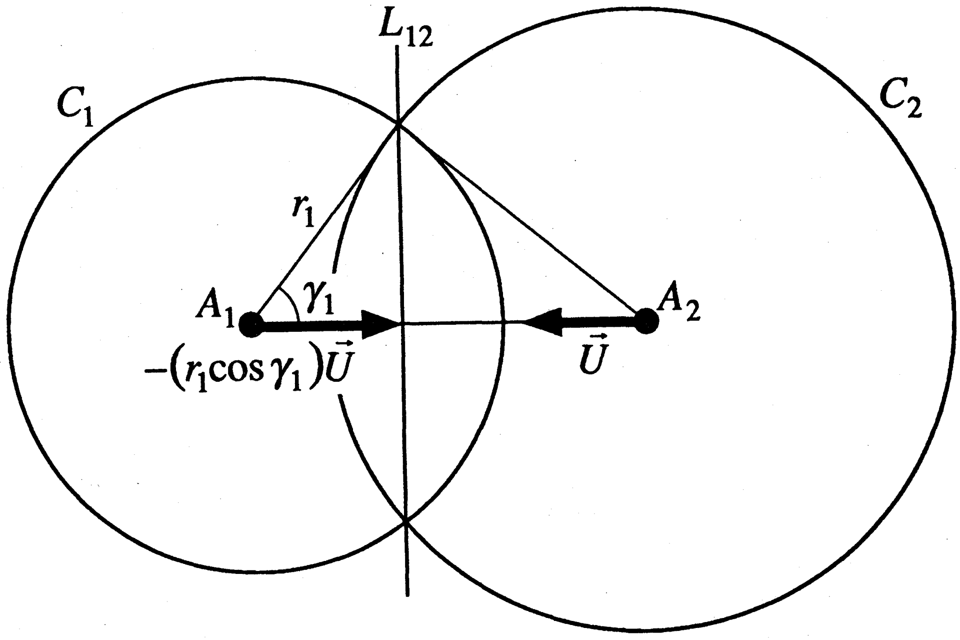

図 8.

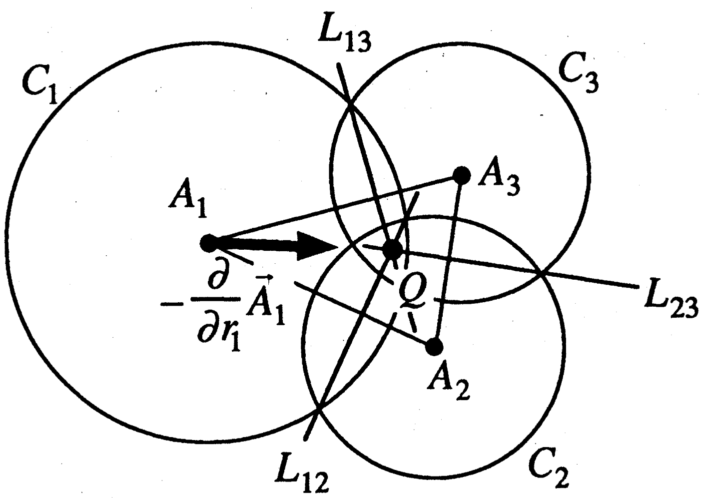

図 9.

まず，$C_1 \cap \overline{A_2A_3} \neq \emptyset$と仮定する．$H$を$A_1$を通り$\overline{A_2A_3}$に直行する$\mathsf{E}^2$の直線とする．$A_2$, A_3を中心としてHと接する円とC_1との intersection angle は$\pi/2$より大である．一方，$\theta_2, \theta_3 \leq \pi/2$であるから，$C_2$, C_3はHと交わらない．このときは明らかに，$C_2 \cap C_3 = \emptyset$となってしまい，矛盾である（図 11 参照）．従って，$C_1 \cap \overline{A_2A_3} = \emptyset$でなければならない．$Q$は図 12 の斜線の部分に含まれており，かつ$C_1 \cap \overline{A_2A_3} = \emptyset$であるから，$L_{12}$, L_{13}のどちらかはQを通り得ないことが容易に検証でき，この場合も矛盾が起こる．従って，$Q \in \mathrm{int} f$であり，E^2-case の証明が完了した．

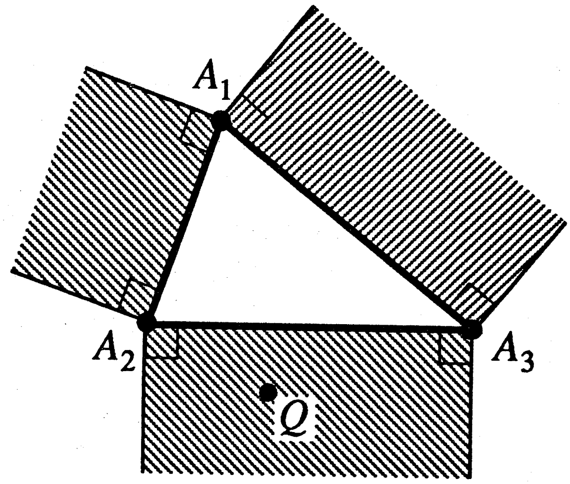

図 10.

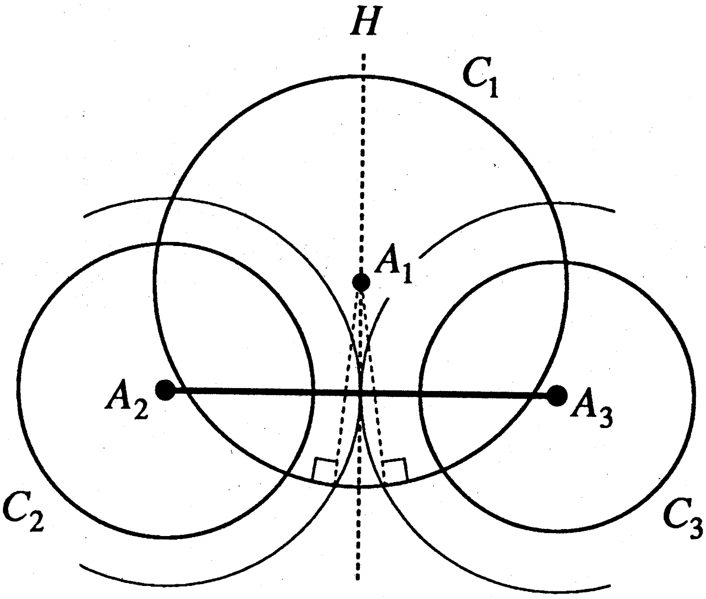

図 11.

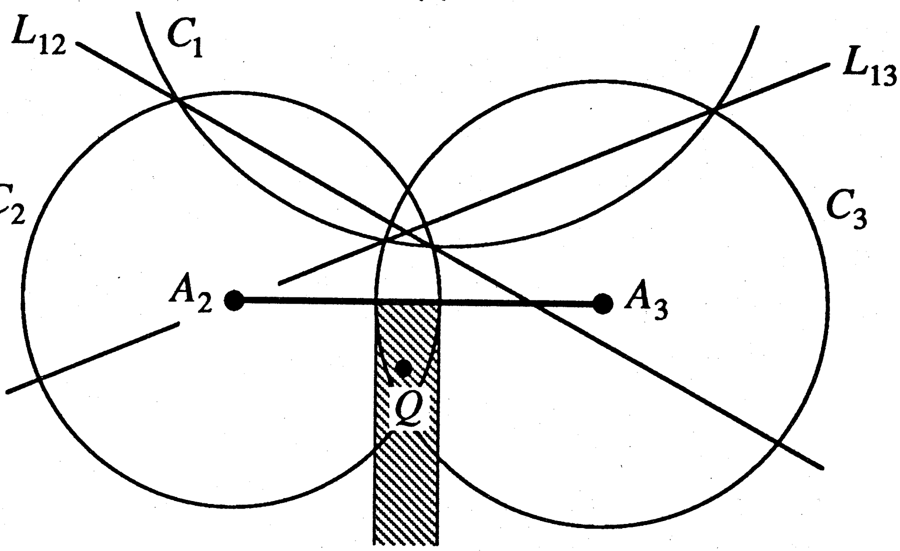

図 12.

次に，$\mathbf{H}^2$-case を考える．双曲的平面 $\mathbf{H}^2$を Poincaré disk D_Pと同一視することによって，自然に$\mathbf{E}^2$内の原点 Oを中心とする単位円板上に埋め込むことができる．このとき，C_1の中心が原点 O上にあるとしてよい．C_1, C_1'の $\mathbf{E}^2$-半径を s_1, s_1'とすると，$s_1 > s_1'$が成り立つ．実際，$\mathbf{H}^2$-半径が r_1'の円のうち，$\mathbf{E}^2$-半径が最大なもの C_1''は，その中心が O上にあり，C_1と同心円になる．$r_1' < r_1$より，C_1''は C_1に含まれる．従って，C_1''の $\mathbf{E}^2$-半径 s_1'' $(\geq s_1')$ は s_1より小さい．C_1, C_2, C_3の $\mathbf{E}^2$-中心，$\mathbf{H}^2$-中心の張る 2-simplices を，それぞれ f_E, f_Hとする（図 13 の斜線の部分の総和が f_H）．$\mathbf{E}^2$-case の証明より，C_1'の $\mathbf{E}^2$-中心 $v(e)_1'$は $\mathrm{int} f_E$に含まれる．また，C_1'の $\mathbf{H}^2$-中心 v_1'は Oを基点とし $v(e)_1'$を通る半直線上にあるので $\mathrm{int} f_H$に含まれる．これで，$\mathbf{H}^2$-case の証明も完了した． □

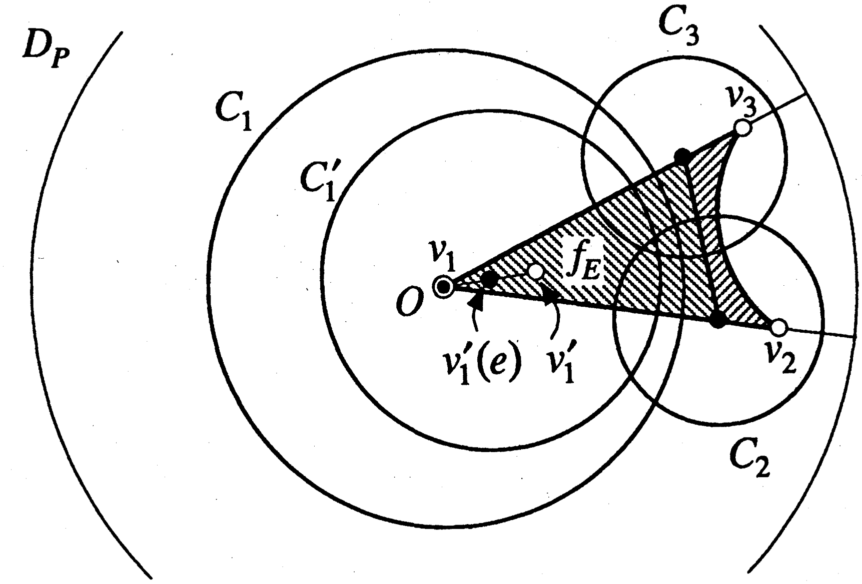

図 13.

以下では，数列 $\{s_n\}$ に対して $s_n \searrow s$ という記号を使うが，これは必ずしも $\{s_n\}$ が単調減少列であることを意味しない．$s_n \searrow s$ は，任意の $n \in \mathbf{N}$ に対して $s_n > s$ であり，かつ $\lim_{n\to\infty} s_n = s$ であると約束する．記号 $s_n \nearrow s$ についても同様である．

次は，$\mathbf{H}^2$-case についてのみ成り立つ補題である．

補題 3． ($\mathbf{H}^2$-case) $\mathbf{R}^n_+$の元 $\mathbf{r} = (r_1, ..., r_n)$ を，第 i-成分が $r_i \nearrow \infty$ となるように，変動させたとき，$\kappa_{\mathbf{r}}(v_i) \nearrow 2\pi$である．

証明. $f_{i1}, ..., f_{il} \in \mathcal{F}$を v_iを頂点に持つ 2-simplices とする．$(f_{ij})_{\mathbf{r}}$の頂点 v_iにおける角度を θ_{ij}とする．補題 2 の証明（図 11 ）と同様に，v_iを中心とする半径 r_iの「円」は，$(f_{ij})_{\mathbf{r}}$において v_iの対辺と交わらない（図 14 参照）．従って，$(f_{ij})_{\mathbf{r}}$は中心角がθ_{ij}，半径が r_iの扇形を含む．ゆえに，$\theta_{ij} \sinh r_i < \mathrm{Area}((f_{ij})_{\mathbf{r}}) < \pi$であり，$\theta_{ij} < \pi/\sinh r_i \searrow 0$ $(r_i \nearrow \infty)$ と

なる．よって，

$$\kappa_{\mathbf{r}}(v_i) = 2\pi - (\theta_{i1} + \cdots + \theta_{il}) \nearrow 2\pi$$

が成り立つ． □

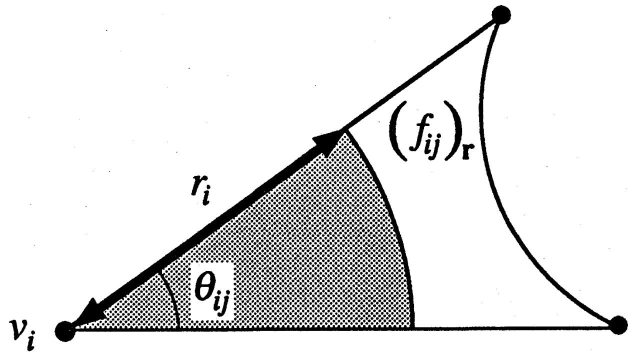

図 14.

次の等式は，よく知られた Gauss-Bonnet の定理である．

$$\sum_{v \in \mathcal{V}} \kappa_{\mathbf{r}}(v) + \int_{S_{\mathbf{r}}} K\, dS_{\mathbf{r}} = 2\pi\chi(S). \tag{1.5}$$

ここで，Kは$S_{\mathbf{r}}$上の Gauss 曲率を表す．従って，E^2-case では $K \equiv 0$，H^2-case では $K \equiv -1$ となる．式 (1.5) を利用して，E^2-case と H^2-case のそれぞれに対し，$F : \mathsf{R}^n_+ \longrightarrow \mathsf{R}^n$の制限写像 F_0を定義する．

(1.6) E^2-case ($\chi(S) = 0$, $K \equiv 0$).

式 (1.5) より，明らかに$\sum_{v \in \mathcal{V}} \kappa_{\mathbf{r}}(v) = 0$ である．従って，写像 Fの像は超平面

$$Z = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathsf{R}^n ; x_1 + \cdots + x_n = 0\}$$

に含まれる．任意の $t > 0$ に対し，$S_{\mathbf{r}}$と $S_{t\mathbf{r}}$は相似であるから，$F(\mathbf{r}) = F(t\mathbf{r})$ が成り立つ．従って，我々は写像 Fを R^n_+全体で考える必要はなく，R^n_+の部分空間

$$\Delta = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathsf{R}^n_+ ; x_1 + \cdots + x_n = 1\}$$

上で考えれば充分である（図 15 参照）．Fの制限写像 $F|_\Delta : \Delta \longrightarrow Z$を F_0とおく．このとき，F_0の定義域Δ，値域 Zはともに R^{n-1}に同相であることに注意せよ．

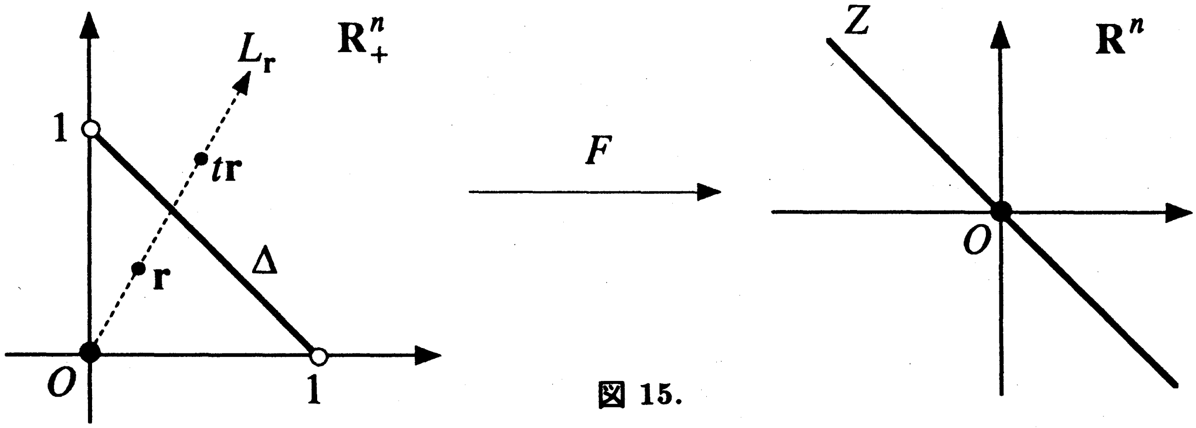

図 15.

(1.7) H^2-case ($\chi(S) < 0$, $K \equiv -1$).

この場合は，E^2-case のようにΔを定義することが出来ない．上で与えた Zに対して，$F^{-1}(Z) = \Delta$と定義し，制限写像 $F|_\Delta : \Delta \longrightarrow Z$を E^2-case と同様に，F_0で表すことにする．式 (1.5) より，$\mathbf{r} \in \Delta$であるための必要充分条件は $\mathrm{Area}(S_{\mathbf{r}}) = -2\pi\chi(S)$ である．原点 $O \in \mathsf{R}^n$を基点とし，$\mathbf{r} \in \mathsf{R}^n_+$を通過する半直線 $L_{\mathbf{r}} = \{t\mathbf{r}; t \geq 0\}$ は必ずΔと交わる．実際，$t \searrow 0$ のとき $\mathrm{Area}(S_{t\mathbf{r}}) \searrow 0$ であり，補題 3 と式 (1.5) より，$t \nearrow \infty$ のとき $\mathrm{Area}(S_{t\mathbf{r}}) \nearrow -2\pi\chi(S) + 2\pi n$ である．従って，中間値の定理より，$\mathrm{Area}(S_{t\mathbf{r}}) = -2\pi\chi(S)$ となる $t > 0$ が存在する．

補題 4． (H^2-case) Δは R^{n-1}に同相である．

証明． $\mathbf{r} = (r_1, ..., r_n), \mathbf{r}' = (r'_1, ..., r'_n) \in \mathsf{R}^n_+$に対し，$r_i > r'_i$ $(i = 1, ..., n)$ と仮定する．補題 2 を繰り返し使用することによて，任意の $f \in \mathcal{F}$に対し，$f_{\mathbf{r}'}$を $f_{\mathbf{r}}$の真部分集合として実現できる（図 16 参照）．従って，$\mathrm{Area}(S_{\mathbf{r}}) > \mathrm{Area}(S_{\mathbf{r}'})$ である．特に，任意の $\mathbf{r} \in \mathsf{R}^n_+$に対し，$\mathrm{Area}(S_{t\mathbf{r}})$ は $t > 0$ に関して単調増加である．よって，$L_{\mathbf{r}} \cap \Delta$は 1 点集合である．この事実から，$\Delta$が R^{n-1}と同相であることが分かる． □

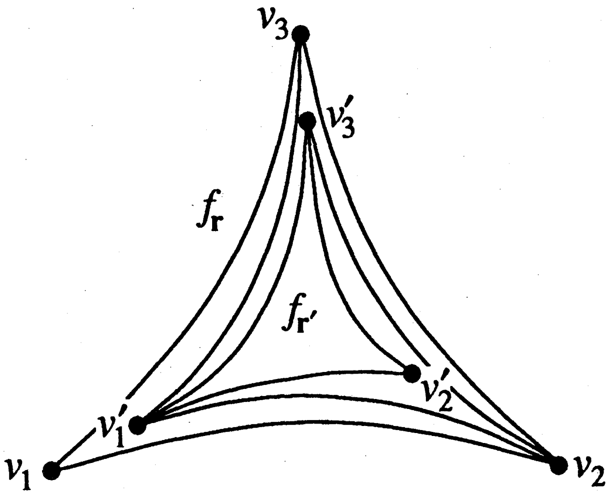

図 16.

$\mathbf{r} \to \partial\Delta$よって，$\mathbf{r} \in \Delta$の変動範囲が$\Delta$内のいかなるコンパクト集合にも含まれないのを表す．$\mathbf{r} \to \partial\Delta$のとき，$F_0(\mathbf{r})$がどのような振る舞いをするかを調べる．実際，次の I または II の場合が成り立つ．Thurston の講義録 [4] においては，II の場合は扱われていないが，このような場合が起こる例も挙げる．

I. $\mathbf{r} = (r_1, ..., r_n) \in \Delta$が$\mathsf{R}^n_{\geq 0} - \mathsf{R}^n_+$の点$\mathbf{s} = (s_1, ..., s_n)$に収束する場合．

$\mathbf{s}$はR^n_+の元ではないので，$s_1, ..., s_n$の内のいくつかは零である．$\mathcal{V}$の部分集合$\mathcal{V}_0$を

$$\mathcal{V}_0 = \{v_i \in \mathcal{V};\text{第 } i\text{-成分 } s_i = 0 \text{（すなわち } r_i \searrow 0\text{）}\}$$

で定義する．これ以後，有限集合Xの元の個数を$|X|$で表すことにする．$f \in \mathcal{F}$は$|f \cap \mathcal{V}_0| = 1$, $|f \cap \mathcal{V}_0| = 2$, $|f \cap \mathcal{V}_0| = 3$のとき，それぞれ$\alpha, \beta, \gamma$型の 2-simplex と言い，$f \cap \mathcal{V}_0$での$f$の角も$\alpha, \beta, \gamma$型と言う（図 17 参照）．

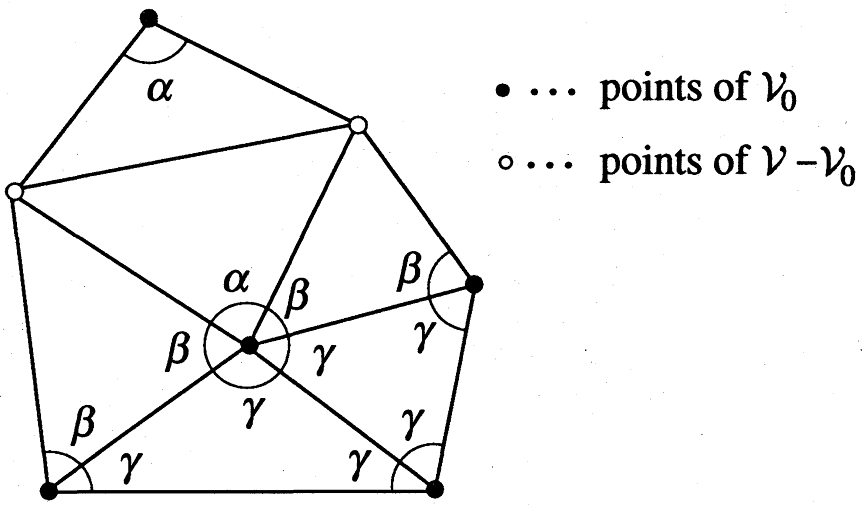

図 17.

$\mathcal{F}_\alpha, \mathcal{F}_\beta, \mathcal{F}_\gamma, A = \{\alpha_i\}, B = \{\beta_j\}, \Gamma = \{\gamma_k\}$をそれぞれの型の 2-simplices や角全体からなる集合とする．図 18 (a), (b), (c) を参考にすれば，補題 2 より次は自明である．

補題 5． $\mathbf{r} \to \mathbf{s}$のとき，次が成り立つ．
(i) $\alpha_i \in A$の対辺を$e(\alpha_i) \in \mathcal{E}$とすると，$\angle\alpha_i \nearrow \pi - \Theta(e(\alpha_i))$.
(ii) $f \in \mathcal{F}_\beta$のβ型の角を$\beta_j, \beta_{j'}$とすると，$\angle\beta_j + \angle\beta_{j'} \nearrow \pi$.
(iii) $f \in \mathcal{F}_\gamma$の 3 角を$\gamma_k, \gamma_{k'}, \gamma_{k''}$とすると，$\mathsf{H}^2$-case では$\angle\gamma_k + \angle\gamma_{k'} + \angle\gamma_{k''} \nearrow \pi$, E^2-case では$\angle\gamma_k + \angle\gamma_{k'} + \angle\gamma_{k''} = \pi$. □

補題 5 より，$\mathbf{r}\to\mathbf{s}$ のときの，α,β,γ型それぞれの角度の総和は次のような極限を持つ．

$$\sum_{\alpha_i\in A}\angle\alpha_i \nearrow \sum_{\alpha_i\in A}(\pi-\Theta(e(\alpha_i))),$$
$$\sum_{\beta_j\in B}\angle\beta_j \nearrow \frac{\pi|B|}{2},$$
$$\sum_{\gamma_k\in\Gamma}\angle\gamma_k \nearrow \frac{\pi|\Gamma|}{3}\quad(\mathbf{H}^2\text{-case})\quad\left(=\frac{\pi|\Gamma|}{3}\quad(\mathbf{E}^2\text{-case})\right).$$

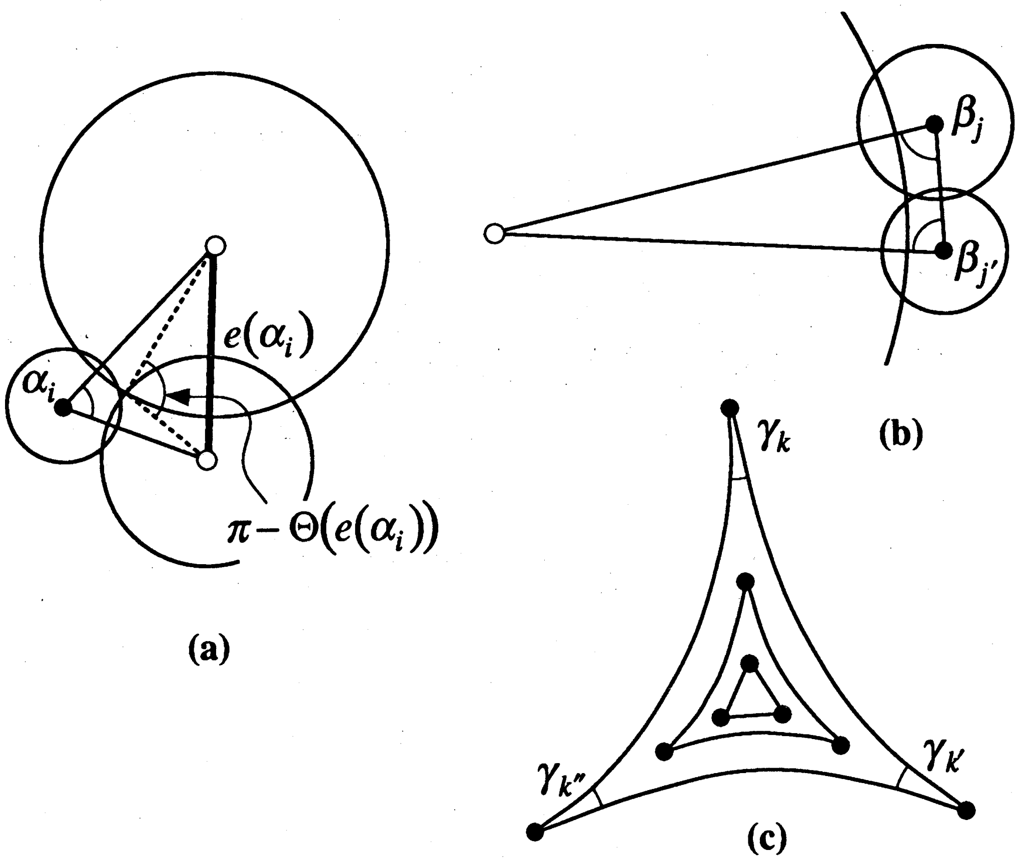

図 18.

$\mathcal{V}_0$における cone-angles の総和はα,β,γ型の角度の総和に一致する．従って，$\mathcal{V}_0$における curvatures の総和は次のような極限を持つ．

$$\sum_{v\in\mathcal{V}_0}\kappa_{\mathbf{r}}(v)\searrow 2\pi|\mathcal{V}_0|-\sum_{\alpha_i\in A}(\pi-\Theta(e(\alpha_i)))-\frac{\pi|B|}{2}-\frac{\pi|\Gamma|}{3}\quad(\mathbf{r}\to\mathbf{s}).\tag{1.8}$$

実際$\searrow$であることは，E^2-case かつ $\mathcal{F}_\alpha=\mathcal{F}_\beta=\emptyset$のとき以外は明かである．この例外的場合は，$S$の連結性から $\mathcal{V}_0=\mathcal{V}$であり，従って $\mathbf{s}=(0,\ldots,0)$ となり，矛盾が起こるので考える必要はない．

補題 6．$F_0 : \Delta \longrightarrow Z$は単射．特に，Brouwer の領域不変性定理より，F_0は開写像．

証明．$\mathbf{r} = (r_1, ..., r_n), \mathbf{r}' = (r'_1, ..., r'_n) \in \Delta$, $\mathbf{r} \neq \mathbf{r}'$とする．$\mathcal{V}$の部分集合$\overline{\mathcal{V}}_0$を，$\overline{\mathcal{V}}_0 = \{v_i \in \mathcal{V}; r_i > r'_i\}$で定義する．上と同様の議論（および補題 2）より，$\sum_{v\in\overline{\mathcal{V}}_0} \kappa_{\mathbf{r}}(v) > \sum_{v\in\overline{\mathcal{V}}_0} \kappa_{\mathbf{r}'}(v)$である．従って，$F_0(\mathbf{r}) \neq F_0(\mathbf{r}')$．□

$\mathcal{T}_{\mathcal{V}_0}$を，$\mathcal{V}_0$および$\mathcal{V}_0$によって張られる$\mathcal{E}, \mathcal{F}$の元からなる複体とする（図 19 参照）．

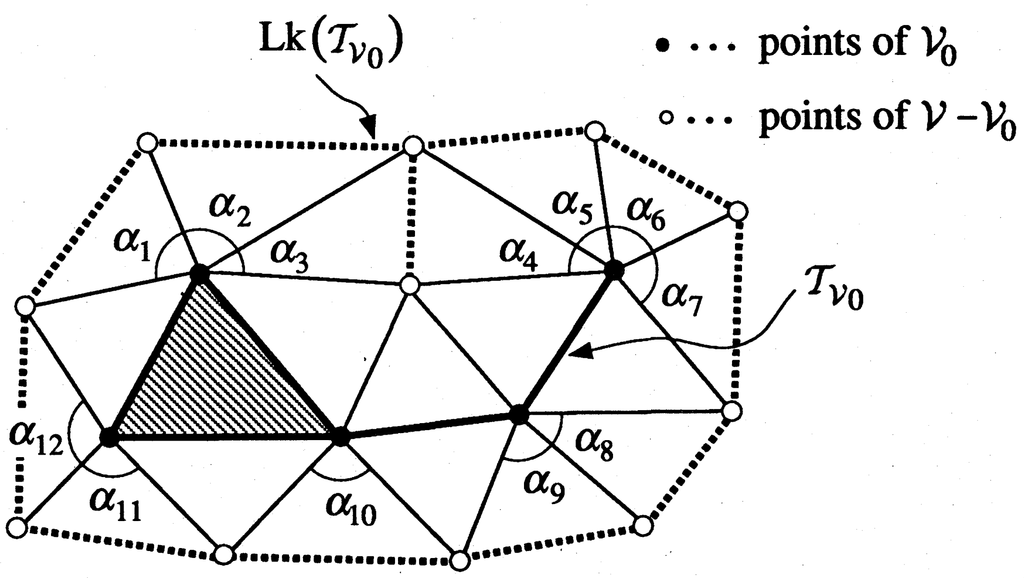

図 19.

$\mathcal{E}_0$を$\mathcal{V}_0$によって張られる$\mathcal{E}$の元全体の集合とする．$\mathcal{T}_{\mathcal{V}_0}$のオイラー標数を単に$\chi_0$で表す．$\mathcal{T}_{\mathcal{V}_0}$の定義より，

$$\chi_0 = |\mathcal{V}_0| - |\mathcal{E}_0| + |\mathcal{F}_\gamma|. \tag{1.9}$$

任意の$f \in \mathcal{F}_\gamma$の 3 辺は全て$\mathcal{E}_0$の元であり，$f \in \mathcal{F}_\beta$の場合は 1 辺のみが$\mathcal{E}_0$の元である．一方，任意の$e \in \mathcal{E}_0$に対し，$\mathcal{F}_\beta \cup \mathcal{F}_\gamma$の中のちょうど 2 つの元が$e$を辺として持つので，

$$3|\mathcal{F}_\gamma| + |\mathcal{F}_\beta| = 2|\mathcal{E}_0|$$

が成り立つ．式 (1.9) より，

$$2\chi_0 = 2|\mathcal{V}_0| - |\mathcal{F}_\beta| - |\mathcal{F}_\gamma| = 2|\mathcal{V}_0| - \frac{|B|}{2} - \frac{|\Gamma|}{3}.$$

また，式 (1.8) より，

$$\sum_{v\in\mathcal{V}_0} \kappa_{\mathbf{r}}(v) \searrow \mathrm{I}(\mathcal{V}_0) := 2\pi\chi_0 - \sum_{\alpha_i \in A} (\pi - \Theta(e(\alpha_i))). \tag{1.10}$$

$\mathrm{Lk}(\mathcal{T}_{\mathcal{V}_0})$ を $f \in \mathcal{F}_\alpha$ の辺で $\mathcal{V}_0$ の元を含まないようなもの全体の作る複体とする．$\mathrm{Lk}(\mathcal{T}_{\mathcal{V}_0})$ は $\mathcal{T}_{\mathcal{V}_0}$ のカラー近傍の境界である（図 19 参照）．$\mathrm{Lk}(\mathcal{T}_{\mathcal{V}_0})$ の edges の個数 $|\mathrm{Lk}(\mathcal{T}_{\mathcal{V}_0})^{(1)}|$ は $|A|$ 以下である．例えば，図 19 の場合，$|\mathrm{Lk}(\mathcal{T}_{\mathcal{V}_0})^{(1)}| = 11, |A| = 12$.

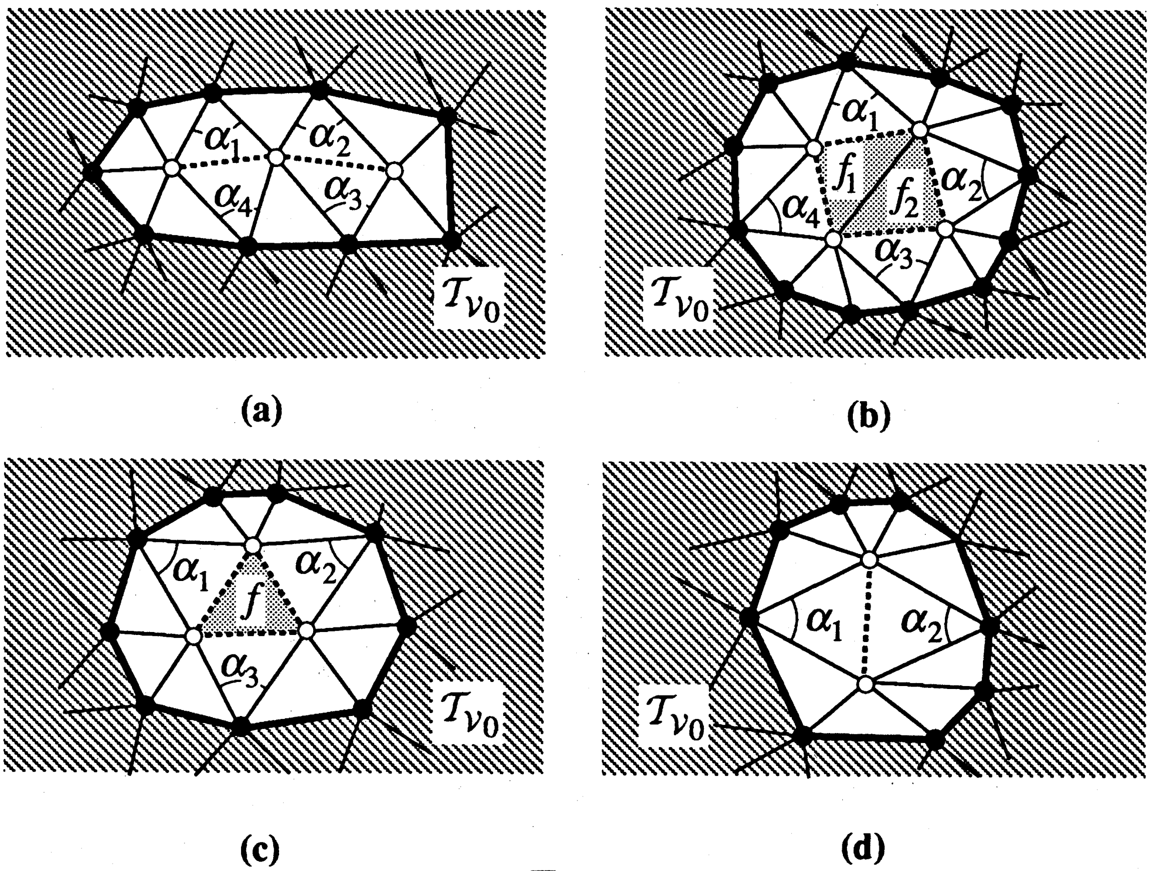

図 20.

補題 7． $\mathcal{V}$ の任意の真部分集合 $\mathcal{V}_0 \neq \emptyset$ に対し，$\mathrm{I}(\mathcal{V}_0) < 0$.

証明． $\mathcal{T}_{\mathcal{V}_0}$ は連結であると仮定できる．連結でないときは，連結成分ごとに議論を進めればよい．$\chi_0 \leq 0$ のとき，明らかに $\mathrm{I}(\mathcal{V}_0) < 0$ である．そこで，$\chi_0 = 1$ すなわち $\mathcal{T}_{\mathcal{V}_0}$ が可縮の場合を考える．$\sum_{\alpha_i \in A}(\pi - \Theta(e(\alpha_i))) \geq \pi|A|/2$ であるから，$|A| \geq 5$ であれば $\mathrm{I}(\mathcal{V}_0) < 0$ が成り立つので，$0 \leq |A| \leq 4$ と仮定する．

$|A| = 4$ のとき，$I(\mathcal{V}_0)$ の定義より，$\sum_{\alpha_i \in A}(\Theta(e(\alpha_i))) < 2\pi$ と $\mathrm{I}(\mathcal{V}_0) < 0$ とは同値である．$|\mathrm{Lk}(\mathcal{T}_{\mathcal{V}_0})^{(1)}| = 2$ または 4 であるが，前者の場合，$S - \mathcal{T}_{\mathcal{V}_0}$ は可縮である．実際，$\mathcal{T}_{\mathcal{V}_0}$ のカラー近傍の境界は「閉じている」(図 20(a) の点線部分は $\mathrm{Lk}(\mathcal{T}_{\mathcal{V}_0})$)．ゆえに，$S$ は $\mathbf{S}^2$ と同相になる．これは矛盾であるから，$|\mathrm{Lk}(\mathcal{T}_{\mathcal{V}_0})^{(1)}| = 4$ である．このとき，もし $\sum_{\alpha_i \in A}(\Theta(e(\alpha_i))) = 2\pi$ であったならば，定理 1 の条件 (ii) より，$\mathrm{Lk}(\mathcal{T}_{\mathcal{V}_0})$ は 2 個の 2-simplices が作る四角形の境界となる．従って，このときも $S - \mathcal{T}_{\mathcal{V}_0}$ は可縮になり，矛盾である．実際，$\mathcal{T}_{\mathcal{V}_0}$ のカラー近傍の境界は 2 個の 2-simplices で「塞がれている」(図 20(b) 参照)．ゆえに，$\sum_{\alpha_i \in A}(\Theta(e(\alpha_i))) < 2\pi$.

$|A| = 3$ のとき，$|\mathrm{Lk}(\mathcal{T}_{\mathcal{V}_0})^{(1)}| = 3$. この場合，$\sum_{\alpha_i \in A}(\Theta(e(\alpha_i))) < \pi$ と $\mathrm{I}(\mathcal{V}_0) < 0$ とは同

値である．$\sum_{\alpha_i\in A}(\Theta(e(\alpha_i)))\ge\pi$であったならば，定理 1 の条件 (i) より，$\mathrm{Lk}(\mathcal{T}_{\mathcal{V}_0})$ はある 2-simplex の境界となる（図 20(c) 参照）．従って，$S-\mathcal{T}_{\mathcal{V}_0}$は可縮であり矛盾が起こる．ゆえに，$\sum_{\alpha_i\in A}(\Theta(e(\alpha_i)))<\pi$.

$|A|=2$ (resp. 0) の場合は，$|\mathrm{Lk}(\mathcal{T}_{\mathcal{V}_0})^{(1)}|=1$ (0) であり，$S-\mathcal{T}_{\mathcal{V}_0}$が明らかに可縮になるので（図 20(d) 参照）起こり得ない．以上で，全ての場合に $\mathrm{I}(\mathcal{V}_0)<0$ が成り立つことが示された． □

II. $\mathbf{r}\to\partial\Delta$のいかなる部分変動も I と異なる場合.

明らかに，E^2-case では I の場合しか起こらない．H^2-case では，II の場合が実際に起こるのを例で示す.

充分小さな$\varepsilon>0$ に対して，$H_\varepsilon^{n-1}=\{(x_2,\dots,x_n)\in\mathsf{R}_+^{n-1};x_2^2+\cdots+x_n^2<\varepsilon\}$ とおく．任意の $\mathbf{r}=(r_1,r_2,\dots,r_n)\in\mathsf{R}_+\times H_\varepsilon^{n-1}\subset\mathsf{R}_+^n$に対応する双曲的 cone-surface $S_\mathbf{r}$を考える．v_1を頂点に持たない 2-simplex $f\in\mathcal{F}$に対して，$f_\mathbf{r}$の各辺の長さは2ε以下である．一方，v_1を頂点に持つ 2-simplex $f\in\mathcal{F}$に対し，r_1をどれだけ大きく取っても，$f_\mathbf{r}$の 1 辺は長さが2ε以下である．従って，全ての $\mathrm{Area}(f_\mathbf{r})$ $(f\in\mathcal{F})$ が任意に小さくなるように$\varepsilon>0$ を選ぶことができる．従って，任意の $\mathbf{r}=(r_1,r_2,\dots,r_n)\in\mathsf{R}_+\times H_\varepsilon^{n-1}$に対して，$\mathrm{Area}(S_\mathbf{r})<-2\pi\chi(S)$ である．特に，$\Delta\cap(\mathsf{R}_+\times H_\varepsilon^{n-1})=\varnothing$(図 21 の斜線部分が $\mathsf{R}_+\times H_\varepsilon^{n-1}$)．任意の $s>0$ に対して，$\mathbf{r}(s)=f(s)\cdot(1,s,\dots,s)\in\Delta$であるように $f(s)>0$ を選ぶことができる.

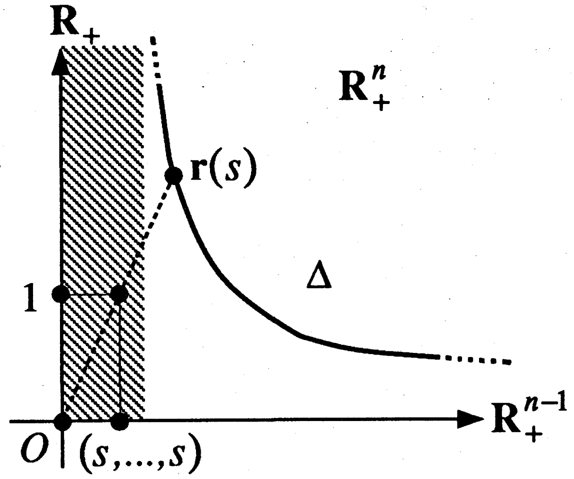

図 21.

$f(s)\cdot(s,\dots,s)\notin H_\varepsilon^{n-1}$であるから，$\mathbf{r}(s)$ の第 i-成分 $(i=2,\dots,n)$ は $r_i(s)=f(s)s\ge\varepsilon/\sqrt{n-1}$ となる．一方，$r_1(s)=f(s)>\varepsilon/(s\sqrt{n-1})\nearrow\infty$ $(s\searrow 0)$ である．従って，$\mathbf{r}(s)$ のどの任意の成分も $\mathbf{r}(s)\to\partial\Delta$のとき，零に近づかないので，I の場合は起こらない.

この例からも分かるように，I の場合が起こらないとき（必要ならば $\mathbf{r}\to\partial\Delta$の部分変動を取ることにより）$\mathbf{r}$ のいくつかの成分に対し $r_i\nearrow\infty$ である．一方，$\mathbf{r}\in\Delta$に対して，

$\mathrm{Area}(S_{\mathbf{r}}) = -2\pi\chi(S)$ であるから，全部の成分が $r_i \nearrow \infty$ とはならない．従って，

$$\mathcal{V}_1 = \{v_i \in \mathcal{V};\ \text{第 } i\text{-成分は } r_i \nearrow \infty \text{ とならない}\}$$

は $\mathcal{V}$の空でない真部分集合である．$\mathbf{r} \in \Delta$のときは，$\sum_{v\in\mathcal{V}} \kappa_{\mathbf{r}}(v) = 0$ であるから補題 3 より，

$$\sum_{v\in\mathcal{V}_1} \kappa_{\mathbf{r}}(v) = -\sum_{v\in\mathcal{V}-\mathcal{V}_1} \kappa_{\mathbf{r}}(v) \searrow \mathrm{II}(\mathcal{V}_1) := -2\pi|\mathcal{V} - \mathcal{V}_1|. \tag{1.11}$$

I, II の場合に関する以上の考察から，F_0の像 $F_0(\Delta)$ を決めることが出来る．$\mathcal{V}$の空でない真部分集合 $\mathcal{V}' = \{v_{i_1}, ..., v_{i_m}\}$ に対して，Zの半空間 $H_{\mathrm{I}}(\mathcal{V}')$, $H_{\mathrm{II}}(\mathcal{V}')$ を

$$\begin{aligned} H_{\mathrm{I}}(\mathcal{V}') &= \{(x_1, ..., x_n) \in Z; x_{i_1} + \cdots + x_{i_m} \geq \mathrm{I}(\mathcal{V}')\}, \\ H_{\mathrm{II}}(\mathcal{V}') &= \{(x_1, ..., x_n) \in Z; x_{i_1} + \cdots + x_{i_m} \geq \mathrm{II}(\mathcal{V}')\} \end{aligned}$$

で定義する．Z内のコンパクト凸多面体 Pを

$$P = \bigcap_{\mathcal{V}'} H_{\mathrm{I}}(\mathcal{V}') \quad (\mathbf{E}^2\text{-case}), \qquad P = \bigcap_{\mathcal{V}'} (H_{\mathrm{I}}(\mathcal{V}') \cap H_{\mathrm{II}}(\mathcal{V}')) \quad (\mathbf{H}^2\text{-case})$$

で定義する．ただし，$\mathcal{V}'$は $\emptyset \neq \mathcal{V}' \subsetneqq \mathcal{V}$をみたすもの全てを取る．補題 7 より，$(0, ..., 0) \in \mathrm{int}H_{\mathrm{I}}(\mathcal{V}')$．$\mathrm{II}(\mathcal{V}') < 0$ より，$(0, ..., 0) \in \mathrm{int}H_{\mathrm{II}}(\mathcal{V}')$．従って，$\mathrm{int}P$は原点 $(0, ..., 0)$ を含む．また，式 (1.10), (1.11) より，$F_0(\Delta) \subset \mathrm{int}P$.

定理 1 の証明. 補題 6 より，F_0は開写像であるから，$F_0(\Delta)$ は $\mathrm{int}P$の開部分集合である．一方，式 (1.10), (1.11) より，$\mathbf{r} \to \partial\Delta$のとき，$F(\mathbf{r}) \to \partial P$である．従って，$F_0(\Delta)$ は $\mathrm{int}P$の閉部分集合でもある．ゆえに，$F_0(\Delta) = \mathrm{int}P$. F_0の単射性（補題 6）および $(0, ..., 0) \in \mathrm{int}P$ より，$F_0(\mathbf{r}) = (0, ..., 0)$ をみたす $\mathbf{r} \in \Delta$が唯一つ存在する．(1.2) で注意したように，この事実は定理 1 の主張と同値である． □

§2. $\chi(S) > 0$ の場合

この節では，$\chi(S) > 0$ すなわち Sが 2-sphere の場合を考える．Rodin-Marden [3] の証明は，Thurston による $\mathbf{E}^2$-case の証明がベースになっている．以下では，$\mathbf{S}^2$-case の証明がどの様にして $\mathbf{E}^2$-case の証明に帰着されるかを説明する．

定理 2． ($\mathbf{S}^2$-case) Sは $\mathbf{S}^2$-構造を持つ 2-sphere であり，写像$\Theta : \mathcal{E} \longrightarrow [0, \pi/2]$ は次の 2 条件 (i), (ii) をみたすとする．

(i) $e_1, e_2, e_3 \in \mathcal{E}$を $e_1 + e_2 + e_3$が S内の loop を表すような任意の 3 組とすると，$\sum_{i=1}^{3} \Theta(e_i) < \pi$.

(ii) $e_1, e_2, e_3, e_4 \in \mathcal{E}$を $e_1 + e_2 + e_3 + e_4$が S内の loop を表すような任意の 4 組とすると，$\sum_{i=1}^{4} \Theta(e_i) < 2\pi$.

このとき，data $\mathcal{T},\Theta$を実現するような circle pattern が S上の等角変換を除いて一意的に存在する．

証明の概略． $f_0 \in \mathcal{F}$を 1 つ固定し，f_0の vertices が v_1, v_2, v_3となるように $\mathcal{V}$の元に順番を付ける．辺の長さが同じ，2 つの E^2-正三角形 T, T'の境界を等長的に貼り合わせて出来た euclidean cone-surface を S_Eとする．S_Eは 2-sphere Sと同相であり，cone-angle が $2\pi/3$ の cone-singular points を 3 個持つ．S_E上の向きを固定する．$h : S \longrightarrow S_E$は向きを保つ同相写像で，$\{v_1, v_2, v_3\}$ を S_Eの cone-singular points の集合上に写すものとする（図 22 参照）．

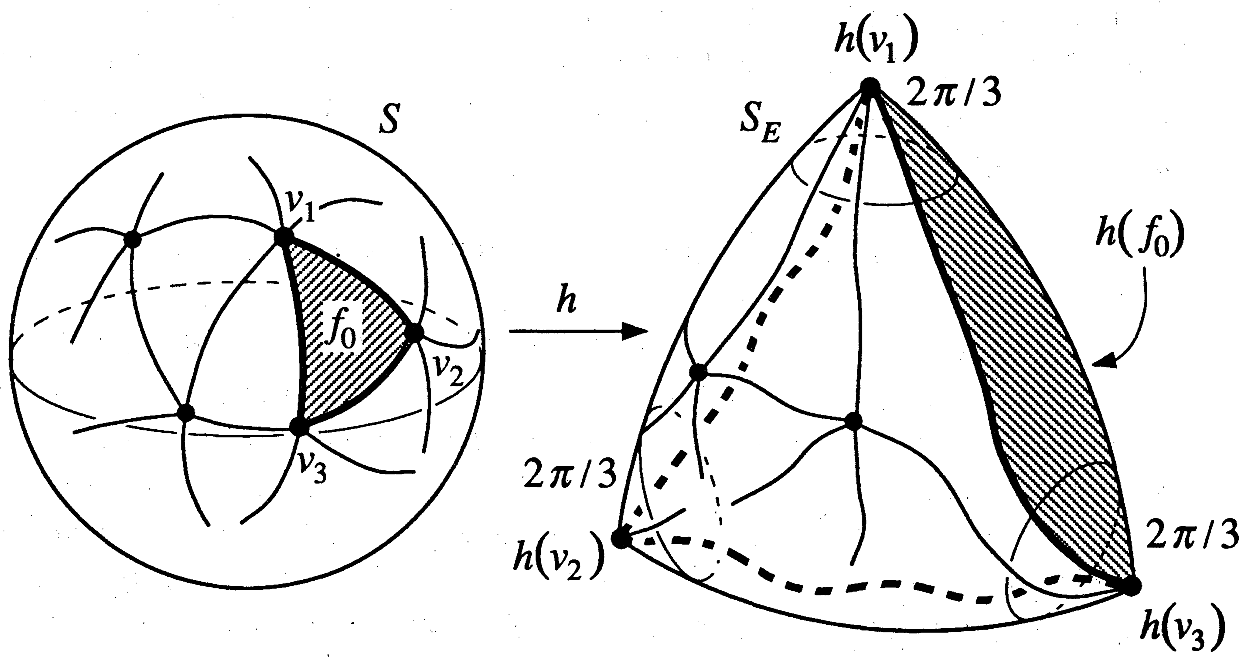

図 22.

各 $h(v_i)$ $(i = 1,2,3)$ における S_Eの curvature は $2\pi - 2\pi/3 = 4\pi/3$ である．$F_0 : \Delta \longrightarrow Z$を第 1 節，(1.6) の E^2-case と同様に定義された単射連続写像とする．特に，$\Delta = \{(x_1, ..., x_n) \in \mathsf{R}^n_+ ; x_1 + \cdots + x_n = 1\}$ である．$\mathbf{r} \in \Delta$に対応する $S_{\mathbf{r}}$が euclidean cone-surface S_Eと一致する為の必要充分条件は

$$F_0(\mathbf{r}) = \mathbf{p} := \left(\frac{4\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, 0, ..., 0\right)$$

である．

補題 8． $\mathbf{p} = (p_1, ..., p_n)$，すなわち $p_i = 4\pi/3$ $(i = 1,2,3)$, $p_j = 0$ $(j = 4, ..., n)$，とおく．このとき，$\mathcal{V}$の任意の真部分集合 $\mathcal{V}_0 = \{v_{i_1}, ..., v_{i_m}\} \neq \emptyset$に対し，

$$p_{i_1} + \cdots + p_{i_m} > \mathrm{I}(\mathcal{V}_0). \tag{2.1}$$

証明． (2.1) の左辺は明らかに零以上である．補題 7 の証明と同様に $\mathcal{T}_{\mathcal{V}_0}$は連結であるとする．$\chi_0 = 1$ かつ $|A| \leq 4$ の場合のみを考える．それ以外の場合は，補題 7 の証明と同様，$\mathrm{I}(\mathcal{V}_0) < 0$ である．

$|A|=4$ とする．$|\mathrm{Lk}(\mathcal{T}_{\mathcal{V}_0})^{(1)}|=4$ のときは，定理 2 の条件 (ii) より $\sum_{\alpha_i\in A}(\Theta(e(\alpha_i)))<2\pi$ であるから，$\mathrm{I}(\mathcal{V}_0)<0$. $|\mathrm{Lk}(\mathcal{T}_{\mathcal{V}_0})^{(1)}|=2$ のとき，$\mathcal{V}-\mathcal{V}_0$は 3 個の元からなる（図 20(a) 参照）．それらの元は $\mathcal{T}$の 2-simplex を張らないので，$\{v_1,v_2,v_3\}$ とは一致しない．よって，v_1,v_2,v_3のうち少なくとも 1 個は $\mathcal{V}_0$に含まれる．従って，$p_{i_1}+\cdots+p_{i_m}\geq 4\pi/3$ である．一方，$\mathrm{I}(\mathcal{V}_0)=-2\pi+\sum_{\alpha_i\in A}\Theta(e(\alpha_i))\leq 0$ であるので，不等式 (2.1) が成立する．

$|A|=3$ のとき，条件 (i) より $\sum_{\alpha_i\in A}(\Theta(e(\alpha_i)))<\pi$である．従って，$\mathrm{I}(\mathcal{V}_0)=-\pi+\sum_{\alpha_i\in A}\Theta(e(\alpha_i))<0$.

$|A|=2$ (resp. 0) とする．$\mathcal{V}-\mathcal{V}_0$は 2 個（1 個）の元からなる（図 20(d) 参照）ので，v_1,v_2,v_3 のうち少なくとも 1 個（2 個）は $\mathcal{V}_0$に含まれている．従って，$p_{i_1}+\cdots+p_{i_m}\geq 4\pi/3$ $(8\pi/3)$ である．一方，$\mathrm{I}(\mathcal{V}_0)=\Theta(e(\alpha_1))+\Theta(e(\alpha_2))\leq\pi$ $(\mathrm{I}(\mathcal{V}_0)=2\pi)$ であるので，不等式 (2.1) が成立する． □

Pを第 1 節の $\mathbf{E}^2$-case と同様に定義された，Z内の凸多面体とする．補題 8 より，$\mathbf{p}\in\mathrm{int}P=F_0(\Delta)$. 従って，$\mathbf{r}_0=F_0^{-1}(\mathbf{p})$ に対応する $S_E=S_{\mathbf{r}_0}$上の circle pattern $\mathcal{C}_0=\{C_1,...,C_n\}$ が data $h(\mathcal{T})$, Θを実現する唯一つのものである．v_1,v_2,v_3を vertices に持つ 2-simplex $f_0\in\mathcal{F}$に対し，$T_0:=(f_0)_{\mathbf{r}_0}$は $h(v_1),h(v_2),h(v_3)$ を vertices に持つ S_E内の geometric 2-simplex である．従って，T_0は正三角形であり，反対側の $T_1:=S_E-\mathrm{int}T_0$も正三角形になる．補題 2 の証明（図 11) と同様に，任意の C_j $(j=4,...,n)$ は T_0と交わらないので $\mathrm{int}T_1$に含まれる．$g:T_1\longrightarrow\mathbf{E}^2=\mathbf{C}$ を，T_1の重心を $\mathbf{C}$ の原点 Oに写す，向きを逆にする等長的埋め込みとする．直観的に言えば，gが向きを逆にする写像なので，T_1は $\mathbf{C}$ 上に「伏せた」状態に置かれる．$\mathcal{C}_0$の T_1への制限 $\mathcal{C}_0|_{T_1}$を考える．正三角形 $T_2:=g(T_1)$ 内の 1/6-円 $g(C_1|_{T_1}),g(C_2|_{T_1}),g(C_3|_{T_1})$ と同じ半径の同心円を D_1,D_2,D_3とする．このとき，

$$\mathcal{C}_1=g(\mathcal{C}_0-\{C_1,C_2,C_3\})\cup\{D_1,D_2,D_3\})$$

は data Θを実現する $\mathbf{C}$ 上の circle pattern である．Sを $\mathbf{R}^3=\mathbf{C}\times\mathbf{R}$ 内の単位円 $\{(z,t)\in\mathbf{C}\times\mathbf{R};|z|^2+(t-1)^2=1\}$ と同一視し，$\varphi:S-\{\mathrm{n.p.}\}\longrightarrow\mathbf{C}$ を stereographic projection とする．このとき，$\mathcal{C}=\varphi^{-1}(\mathcal{C}_1)$ は data $\mathcal{T}$, Θを実現する S上の circle pattern である．$\mathcal{C}_1$は $\mathbf{C}$ 上に「伏せて」置かれていたが，φ の引き戻しによって，それが Sの表側に現れることに注意せよ．

後は，$\mathcal{C}$が Sの等角変換を除いて一意的に存在することを証明すればよい．$\mathcal{C}'$を data $\mathcal{T}$, Θを実現する S上の任意の circle pattern とする．$\mathcal{C}_1'=\varphi(\mathcal{C}')$ 内の，v_1,v_2,v_3に対応する円を D_1',D_2',D_3'とする．D_1,D_2,D_3の間の intersection angles と D_1',D_2',D_3'の間の intersection angles は，ともにΘから決まるものなので，一致する．ゆえに，$\mathbf{C}$ 上の Möbius 変換γで $\gamma(D_i')=D_i$ $(i=1,2,3)$ をみたすものが存在する.（このような Möbius 変換の存在の証明は読者に委ねる．D_i'の中心を D_iの中心に写すような Möbius 変換は存在するが，一般にこの変換はγと一致しない.）$\mathcal{C}_0$の S_E上での一意性より，$\gamma(\mathcal{C}_1')|_{T_2}$の gによる引き戻し $g^{-1}(\gamma(\mathcal{C}_1')|_{T_2})$

は $\mathcal{C}_0|_{T_1}$ と一致する．従って，$\gamma(\mathcal{C}_1')|_{T_2} = g(\mathcal{C}_0|_{T_1}) = \mathcal{C}_1|_{T_2}$. ゆえに，$\gamma(\mathcal{C}_1') = \mathcal{C}_1$ が成り立つ．$\overline{\gamma} : S \longrightarrow S$ を γ に対応する S 上の等角変換とすると，明らかに $\overline{\gamma}(\mathcal{C}') = \mathcal{C}$. これで，一意性も証明できた． □

参考文献

1. E. M. Andreev, Convex polyhedra in Lobacevskii space, Math. USSR Sbornik **10** (1970), 413-440.

2. E. M. Andreev, Convex polyhedra of finite volume in Lobacevskii space, Math. USSR Sbornik **12** (1970), 255-259.

3. A. Marden and B. Rodin, On Thurston's formulation and proof of Andreev's theorem, Computational Method and Function Theory, Proceeding, Valparaiso 1989, Lect. Notes in Math., vol. 1435, Springer-Verlag 1990, pp. 103-115.

4. W. Thurston, The geometry and topology of 3-manifolds, Lect. Notes, Princeton Univ., 1978.