

Schwarz's lemma for circle packings について

東工大理学部 小櫃 邦夫 (Kunio Obitsu)

これは、B. Rodin の論文 [5] についての解説です。以下のようになっています。

- §1. 記号と主結果
- §2. 離散的 Laplacian
- §3. 離散的 Green 函数とその応用
- §4. Circle packings の Schwarz の補題
- §5. 等角写像への応用

§1 記号と主結果

HCP: 等しい半径の円による、平面の regular hexagonal packing

HCP_N: HCP の中で、ある base circle から始まる N 世代以下の円すべて

HCP_N: HCP と組み合わせ同値な、ある *circle packing*

まず、Bárány, Füredi, Pach による次の結果が知られる。

半径の劣調和性[2] 任意の HCP_N について、次の評価が成立。

$$R_0 \leq \frac{1}{6} (r_1 + r_2 + \dots + r_6)$$

ここで、 R_0 は base circle の半径、 r_1, r_2, \dots, r_6 は外側の円の半径

B. Rodin [5] は、これを次のように拡張した。

定理 1 次のような性質をみたす絶対定数 $C (> 0)$ が存在する。

— 任意の自然数 N 、任意の HCP_N packing に対して

$$R_0 \leq \frac{C}{6N} (r_1 + r_2 + \dots + r_{6N}) \quad (1.1)$$

が、成り立つ。ただし、 R_0 は HCP_N の第 0 世代の半径、 r_1, r_2, \dots, r_{6N} は HCP_N の第 N 世代の $6N$ 個の円の半径。

証明は §3 で述べる。さらに、定理 1 を用いて *circle packing* 同型について、Schwarz の補題の類似の性質が得られる。

定理 2 次のような性質をみたす絶対定数 $Q (> 0)$ がある。

— D を HCP_N を含む最小の円板とする。

ある HCP_N が、HCP_N と組み合わせ同値で、 D に含まれる *circle packing* である。 \implies

$$R'_0 \leq Q R_0 \quad (1.2)$$

ただし、 $R_0 (R'_0)$ は、HCP_N (HCP_N) の第 0 世代の円の半径。

この証明は、§4 で述べる。B. Rodin [5] は 定理 2 を応用して

ある等角写像を近似する circle packing 同型によって対応づけられた2つの円の半径の比が、その等角写像の微係数の絶対値に収束するための条件を求めている。これを、§5の中で定理3として述べることにする。

§2. 離散的 Laplacian

$HL(h) = \{hm + hn\omega \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$ mesh h の hexagonal lattice と呼ぶ。

ここで、 $h > 0$, $\omega = e^{\frac{\pi i}{3}}$ である。

$\{\alpha + h\omega^k \mid \alpha \in HL(h), k=0,1,\dots,5\}$: $\alpha \in HL(h)$ の6点近傍と呼ぶ。

Lattice point α が N 世代以下である。 $\stackrel{\text{def}}{\iff}$ Lattice の列 $0 = \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_N = \alpha$ で、 α_j は α_{j-1} の6点近傍の点 ($1 \leq j \leq N$) であるようなものが存在する。

$HL(h, N) \equiv \{HL(h) \text{ の } N \text{ 世代以下の lattice points}\}$

$\partial HL(h, N) \equiv \{N \text{ 世代以下であって } (N-1) \text{ 世代以下ではない lattice points}\}$
と決める。つまり、 $\partial HL(h, N)$ の点は、ちょうど第 N 世代の $6N$ 個の点からなる。

$HL(h), HL(h, N), \partial HL(h, N)$ を略して、 $H, H_N, \partial H_N$ とかく。

U を $\alpha \in H$ とその 6 点近傍上で定義された複素数値関数とする。
 U の α における離散的 Laplacian は、次のような作用である。

$$D_h U(\alpha) \equiv \frac{2}{3h^2} \left\{ \sum_{k=0}^5 U(\alpha + h\omega^k) - 6U(\alpha) \right\} \quad (2.1)$$

(2.1) のように定義する理由は、次のことによる。

$U(z) = U(x, y)$ ($z = x + iy$) を α の 6 点近傍の convex hull 上 C^4 級関数とする。Euclidean Laplacian を $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ とすると、ある定数 $C(U)$ の 4 階偏導関数の convex hull 上の上界が存在して、

$$|D_h U(\alpha) - \Delta U(\alpha)| \leq \frac{Ch^2}{4}$$

となるためである。([5])

$$\text{実数値関数 } U \text{ が } H_N \text{ 上劣調和} \stackrel{\text{def}}{\iff} D_h U(\alpha) \geq 0 \quad (\alpha \in H_N - 2H_N) \quad (2.2)$$

普通の劣調和関数と類似した次の 2 つの性質が示せる。

最大値の原理 $U: H_N$ 上の劣調和関数、とする。

U が $H_N - 2H_N$ 上で最大値をとる。 $\implies U$ は H_N 上定数

(証明) $\alpha \in H_N - 2H_N$ で U が最大値をとる。(2.1), (2.2) と合わせて、

$$0 \leq D_h U(\alpha) = \frac{2}{3h^2} \left\{ \sum_{k=0}^5 U(\alpha + h\omega^k) - 6U(\alpha) \right\} \leq 0$$

$$\therefore U(\alpha + h\omega^k) = U(\alpha) \quad (k=0, 1, 2, \dots, 5)$$

α はその 6 点近傍でも最大値をもつ。よって U は定数。 \square

離散的Dirichlet問題 $f: \partial H_N \rightarrow \mathbb{R}$, $F: H_N - \partial H_N \rightarrow \mathbb{R}$ が与えら

れている。そのとき、Dirichlet問題

$$\begin{cases} u = f & \text{on } \partial H_N \\ D_h u = F & \text{on } H_N - \partial H_N \end{cases} \quad (2.3)$$

は、一意的な解 $u: H_N \rightarrow \mathbb{R}$ をもつ。

(証明) まず、 $u=0$ on ∂H_N , $D_h u = F$ on $H_N - \partial H_N$ を考える。

$\text{Dom}(D_h) = \{u: H_N \rightarrow \mathbb{R} \mid u|_{\partial H_N} = 0\}$, $\text{Range}(D_h) = \{v: H_N \rightarrow \mathbb{R}\}$ とおく。

$D_h: \text{Dom}(D_h) \rightarrow \text{Range}(D_h)$ を考える。

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & & \downarrow \\ u & \longmapsto & D_h(u|_{H_N - \partial H_N}) \end{array}$$

最大値の原理より $\text{Ker}(D_h) = \{0\}$ 。また、 D_h は linear map で、

$\dim \text{Dom}(D_h) = \dim \text{Range}(D_h)$ より、 D_h が全単射であることがわかる。

\therefore 解 $u_0: H_N \rightarrow \mathbb{R}$; $u_0|_{\partial H_N} = 0$, $D_h u_0 = F$ が存在する。

$$\text{次に、 } v \equiv \begin{cases} f & \text{on } \partial H_N \\ 0 & \text{on } H_N - \partial H_N \end{cases} \quad \text{とおく。}$$

解 $v_0: H_N \rightarrow \mathbb{R}$; $v_0|_{\partial H_N} = 0$, $D_h v_0 = D_h v$ が存在する。

すると、 $u = u_0 + v - v_0$ が最初の Dirichlet 問題の解である。

つまり、 $u|_{\partial H_N} = f$, $D_h u = F$ on $H_N - \partial H_N$ をみたす。 \square

§3. 離散的 Green 函数とその応用

この節では、離散的 potential theory を導入して、定理 1 を証明する。まず、 $\alpha \in H_N$, $\beta \in H_{N-1}$ ($N \geq 2$) とする。

H_N 上の離散的 Green 関数 $g_N(\alpha, \beta)$ は、次のように定義される。

$$\begin{cases} g_N(\alpha, \beta) = 0 & \alpha \in \partial H_N \end{cases} \quad (3.1)$$

$$\begin{cases} D_n g_N(\alpha, \beta) = \begin{cases} 0 & \alpha \in H_N - \{\beta\} \\ -\frac{2\sqrt{3}}{3h^2} & \alpha = \beta \end{cases} \end{cases} \quad (3.2)$$

ここで、(3.2) の Laplacian は変数 α に作用している。

(注意) • Dirichlet 問題 (2.3) より、上のような g_N が一意的に存在することがわかる。

• 最大値の原理より、 $g_N(\alpha, \beta) > 0$ ($\alpha, \beta \in H_{N-1}$) がわかる。

• $g_N(\cdot, \cdot)$ の対称性は、あとの補題 2 よりわかる。

定理 1 を示すために、次のことが重要である。

命題 1. ある定数 $b (> 0)$ が存在して、次のことが成り立つ。

$$\text{--- } N \geq 2, \alpha \in \partial H(h, N-1) \implies g_N(\alpha, 0) \leq \frac{b}{N} \quad (3.3)$$

命題 1 を示すために、次の補題が必要となる。

補題 1. $HL(1)$ 上の実数値関数 λ で、次の性質をみたすものが存在する。---

$$(i) \quad D_1 \lambda(0) = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$(ii) \quad D_1 \lambda(\alpha) = 0 \quad (\alpha \in HL(1) - \{0\})$$

$$(iii) \quad \lambda(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \log |\alpha| + \text{const.} + O\left(\frac{1}{|\alpha|}\right) \quad (\alpha \rightarrow \infty, \alpha \in HL(1))$$

$$(略証) \quad \lambda(\alpha) \equiv \frac{3}{8\pi^2} \iint_{\Omega} \frac{(1 - e^{i\text{Re}(\alpha\bar{z})})}{4S(z)} dx dy \quad (\alpha = m + n e^{\frac{\pi}{3}i}) \quad (3.4)$$

$$\text{とおく。ここで、} \quad \begin{cases} \Omega = \{z = x + iy \mid -\pi \leq x \leq \pi, -2\pi - x \leq y\sqrt{3} \leq 2\pi - x\} \\ S(z) = \sin^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x+y\sqrt{3}}{4} + \sin^2 \frac{x-y\sqrt{3}}{4} \end{cases}$$

とする。 $S(z) \geq \frac{3|z|^2}{2\pi^2}$ on Ω を用いて、(3.4)の可積分性がわかる。性質(i),(iii)については、

$$\begin{aligned} D_1 \lambda(\alpha) &= \frac{3}{8\pi^2} \iint_{\Omega} \frac{-D_1 e^{i\text{Re}(\alpha\bar{z})}}{4S(z)} dx dy & D_1 e^{i\text{Re}(\alpha\bar{z})} &= -\frac{8}{3} e^{i\text{Re}(\alpha\bar{z})} S(z) \text{より} \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \iint_{\Omega} e^{i\text{Re}(\alpha\bar{z})} dx dy & u = x, v &= \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y \text{として} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{6\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(mu + nv)} du dv \\ &= \begin{cases} \frac{2\sqrt{3}}{3} & m = n = 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \end{aligned}$$

性質(ii)については、

$$\int_0^1 (1 - \cos u) \frac{du}{u} - \int_1^{\infty} \cos u \frac{du}{u} = \gamma \quad (\text{Euler定数})$$

$$\int_t^{\infty} \cos u \frac{du}{u} = \frac{-\sin t}{t} + \frac{O(1)}{t^2} \quad (0 < t < 1), \quad \left| \int_t^{\infty} \cos u \frac{du}{u} \right| \leq \log \frac{1}{t} + \left| \int_1^{\infty} \cos u \frac{du}{u} \right|$$

($0 < t < 1$) などの式を用いて、かなり長い計算を実行して評価される。 □

命題1の証明

mesh $h=1$ と仮定してよい。

$$E_N \equiv \{(N-1)\omega, (N-1)\omega - 1, \dots, (N-1)\omega - (N-1)\} \quad (3.5)$$

対称性より $\alpha \in \partial H_N$ は、 $\alpha \in E_N$ としてよい。

HL(1, N)の代わりに、

$$\tilde{H}_N = \{ \text{HL}(1, 2N) \text{ から上 } N \text{ 行と下 } N \text{ 行を取り除いたもの} \}$$

を用いる。下図のような状況である。

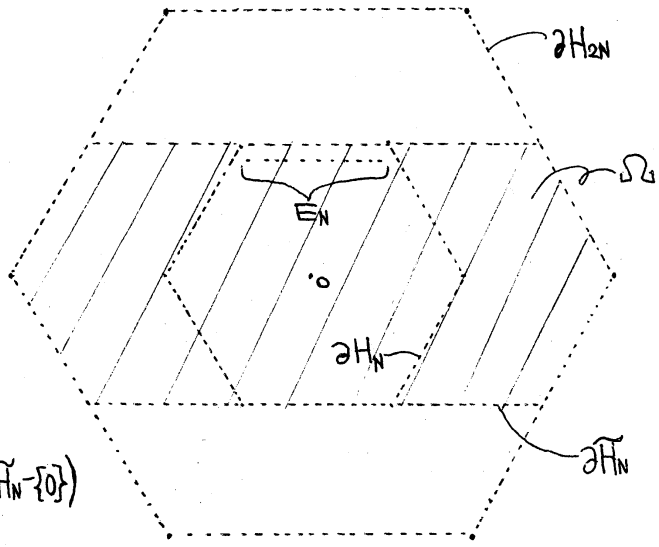
$\Omega = \tilde{H}_N$ の convex hull

\tilde{H}_N 上の離散的 Green 函数

\tilde{g}_N の存在は、 H_N 上の場合と全く同様に言える

つまり、

$$\begin{cases} \tilde{g}_N(\alpha, 0) = 0 & \text{on } \partial \tilde{H}_N \\ D_1 \tilde{g}_N(\alpha, 0) = \begin{cases} 0 & (\alpha \in \tilde{H}_N - \partial \tilde{H}_N - \{0\}) \\ -\frac{2\sqrt{3}}{3} & (\alpha = 0) \end{cases} \end{cases}$$



をみたしている。最大値の原理により、 $\tilde{g}_N(\alpha, 0) \leq \tilde{g}_N(\alpha, 0)$ ($\alpha \in H_N$)

であるから、結局、 $\tilde{g}_N(\alpha, 0) \leq \frac{\text{const}}{N}$ ($\alpha \in E_N$) (3.6)

を示せばよい。

$G(z, 0): 0$ で pole をもつ Ω 上の古典的 Green 函数とする。

($G(z, 0) = -\frac{1}{2\pi} \log |z| + O(1)$ ($|z| \rightarrow 0$) の特異部をもつ、とする。)

(3.6) の代わりにまず、 $G(a, 0) \leq \frac{\text{const}}{N}$ ($a \in E_N$ の convex hull) (3.7)

を示したい。

$\Omega_1 = \Omega$ を原点を中心に $\frac{1}{N}$ 倍した domain (i.e. H_1 の convex hull)

$\phi: \Omega_1 \rightarrow \text{unit disk}$, $\phi(0) = 0$ を Riemann map とする。

そのとき、 $G(a,0) = -\frac{1}{2\pi} \log|\phi(\frac{a}{N})|$ とかける。

$$M = \max_{N\zeta \in \{H_N \text{のconvex hull}\}} |\phi'(\zeta)| = \max_{\zeta \in \{H_1 \text{のconvex}\}} |\phi'(\zeta)| < \infty \quad \text{がわかる。}$$

(⊙鏡像の原理より、 H_1 での微係数が有界であることがわかる)

$a \in \{E_N \text{のconvex hull}\}$, $z_0 \in \{H_N \text{のconvex hullの上辺}\}$, $|z_0 - a| \leq 1$ とする。

$$|1 - \phi(\frac{a}{N})| \leq |\phi(\frac{z_0}{N}) - \phi(\frac{a}{N})| \leq \left| \int_{\frac{a}{N}}^{\frac{z_0}{N}} \phi'(\zeta) d\zeta \right| \leq \frac{M}{N}$$

を使えば、 N を十分大きくすると、

$$2\pi G(a,0) = -\log|\phi(\frac{a}{N})| \leq -\log|1 - \frac{M}{N}| \leq \frac{2M}{N}$$

となる。 $2M$ を適当な定数で置き換えれば、上式は任意の N について成立するので、(3.7)が示せた。

$$\text{あとは、} |\tilde{g}_N(\alpha,0) - G(\alpha,0)| \leq \frac{\text{const}}{N} \quad (\alpha \in E_N) \quad (3.8)$$

を示せば、(3.7)と合わせて(3.6)がわかる。

ここで、次をみたす $HL(1) - \{0\}$ 上の離散的調和関数 λ_0 を使う。

$$\lambda_0(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \log|\alpha| + O\left(\frac{1}{|\alpha|}\right) \quad (\alpha \in HL(1) - \{0\}, \alpha \rightarrow \infty) \quad (3.9)$$

この λ_0 は、補題1の λ に定数を加えれば作れる。

$P_d[f]$: 境界値 f をもつ H_N 上の離散的Dirichlet問題の解

$P_c[f]$: " " " " 古典的 " " " " とおく。

$$G(z,0) = \frac{1}{2\pi} \log|z| - P_c\left[\frac{1}{2\pi} \log|z|\right](z) \quad \text{とかき表せる。}$$

すると、次の3つの評価から(3.8)が従う。 $\alpha \in E_N$ とする。

$$|\tilde{g}_N(\alpha,0) + \lambda_0(\alpha) - P_d\left[\frac{1}{2\pi} \log|z|\right](\alpha)| \leq \frac{\text{const}}{N} \quad (3.10)$$

$$|P_c[\frac{1}{2\pi} \log \frac{1}{|z|}](\alpha) - P_d[\frac{1}{2\pi} \log \frac{1}{|z|}](\alpha)| \leq \frac{\text{const}}{N} \quad (3.11)$$

$$|\lambda_0(\alpha) - \frac{1}{2\pi} \log |\alpha|| \leq \frac{\text{const}}{N} \quad (3.12)$$

まず、(3.12)は(3.9)より自明。

$$(3.10) \text{ について } \begin{cases} D_1(\text{左辺}) = 0 \\ (\text{左辺})(\beta) = \lambda_0(\beta) - \frac{1}{2\pi} \log |\beta| \quad (\beta \in \partial \widehat{H}_N) \\ \stackrel{(3.9)}{=} O\left(\frac{1}{|\beta|}\right) = O\left(\frac{1}{N}\right) \end{cases}$$

となるから、最大値の原理より(3.10)が従う。

(3.11)については、Laasonen[3]の結果より、離散的解と古典的解の差は、広義一様に $O(h)$ のorderであることがわかる。

$$\left(\Omega, \widehat{H}_N (\text{mesh}=1) \xleftrightarrow{z_1 \rightarrow \frac{z}{N}} \Omega', \widehat{H}_N' (\text{mesh}=\frac{1}{N}) \right)$$

$P_d, P_c: \Omega, \widehat{H}_N$ の離散的(古典的) Dirichlet問題の解 とおくと、

$$\text{Laasonenより } \|P_c[\frac{1}{2\pi} \log \frac{1}{|z|}] - P_d[\frac{1}{2\pi} \log \frac{1}{|z|}]\|_K = O\left(\frac{1}{N}\right) \quad (K \subseteq \Omega')$$

$$P_{c(d)}[\frac{1}{2\pi} \log \frac{1}{|z|}]\left(\frac{w}{N}\right) = P_{c(d)}[\frac{1}{2\pi} \log \frac{1}{|z|}](w) + \frac{1}{2\pi} \log N \quad \text{だから、}$$

$$\therefore |P_c[\frac{1}{2\pi} \log \frac{1}{|z|}] - P_d[\frac{1}{2\pi} \log \frac{1}{|z|}]| = O\left(\frac{1}{N}\right) \quad \text{on } E_N \quad \square$$

次は Green 函数の対称性を与える。

補題 2 $u, v: HL(h, N) \rightarrow \mathbb{R}$ 函数とする。 \implies

$$\sum_{\alpha \in \widehat{H}_{N-1}} \{v(\alpha) D_n u(\alpha) - u(\alpha) D_n v(\alpha)\} = \frac{1}{3h^2} \sum_{(\alpha, \beta)} \{v(\alpha) u(\beta) - u(\alpha) v(\beta)\} \quad (3.13)$$

ここで、 (α, β) は「 $\alpha \in \partial H_{N-1}, \beta \in \partial H_N$ かつ α は β の6点近傍の点」であるようなペア全体を走る。

(証明) 初等的計算により示せる。 \square

離散的 Green 函数の対称性

$\alpha, \beta, \gamma, \delta \in H_N$ とする。 $u(\gamma) = g_N(\gamma, \beta)$, $v(\delta) = g_N(\delta, \alpha)$ とする。

$$\text{性質 } D_h u(\gamma) = \begin{cases} 0 & \gamma \in H_N - \{\beta\} \\ \frac{-2\sqrt{3}}{3h^2} & \gamma = \beta \end{cases}, \quad D_h v(\delta) = \begin{cases} 0 & \delta \in H_N - \{\alpha\} \\ \frac{-2\sqrt{3}}{3h^2} & \delta = \alpha \end{cases}$$

に注意して、 $u(\gamma)$, $v(\delta)$ に補題 2 を適用すると、 $u(\alpha) = v(\beta)$ \square

ここで、定理 1 を示すために必要な次の結果を得る。

命題 2. 次の性質をもつ絶対定数 $C (> 0)$ が存在する。

—— $U: HL(1, N) \rightarrow \mathbb{R}$ が正値劣調和函数

$$\implies U(0) \leq \frac{C}{6N} (U(\beta_1) + U(\beta_2) + \dots + U(\beta_{6N})) \quad (3.14)$$

ただし、 $\{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{6N}\} = \partial H_N$ である。

(証明) $v(\alpha) = g_N(\alpha, 0)$ とおく。 u, v に補題 2 を適用すると、

$$(\text{正値函数}) + \frac{2\sqrt{3}}{3h^2} u(0) = \frac{2}{3h^2} \sum_{(\alpha, \beta)} g_N(\alpha, 0) u(\beta) = (*)$$

$\beta \in \partial H_N$ について、ペア (α, β) に現れる α は高々 2 個。

$$\text{また、命題 1 より } g_N(\alpha, 0) \leq \frac{b}{N} \quad (\alpha \in E_N)$$

$$\text{よって、 } (*) \leq \frac{2}{3h^2} \frac{2b}{N} \sum_{\beta \in \partial H_N} u(\beta) \quad C = \frac{12b}{\sqrt{3}} \text{ とおけばよい。 } \square$$

定理 1 の証明

circle packing HCPN を考える。

$$\begin{cases} 0 \in \text{HL}(1, N) \longleftrightarrow \text{HCP}_N \text{ の第 } 0 \text{ 世代 circle} \\ 1 \in \text{HL}(1, N) \longleftrightarrow \text{HCP}_N \text{ の第 } 1 \text{ 世代 circle の } 1 \text{ つ} \end{cases}$$

と対応を決めれば、あとは circle packing 同型に従って、
 $\text{HL}(1, N) \longrightarrow \text{HCP}_N$: 自然な同型対応が得られる。

$r(\alpha) \equiv (\alpha \in \text{HL}(1, N) \text{ に対応する } \text{HCP}_N \text{ の円の半径})$
と定義する。半径の劣調和性より、 $r(\alpha)$ は、正值劣調和であるから、命題 2 を適用して (1.1) の評価を得る。 \square

§4. Circle packing の Schwarz の補題

定理 2 の証明

R_0 : HCP_N の第 0 世代の円の半径
 $r_j = (1 \leq j \leq 6R) \text{HCP}_N$ の第 R 世代の $6R$ 個の円の半径、とおく。

$$\left(\sum_{j=1}^{6R} r_j \right)^2 \leq 6R \sum_{j=1}^{6R} r_j^2$$

この左辺を定理 1 を用いて、評価すると、

$$6R c^2 R_0^2 \leq \sum_{j=1}^{6R} r_j^2$$

$R=1, 2, \dots, N$ までこれらの和をとると、

$$3c^2 R_0^2 N(N+1) \leq \sum_{R=1}^N \sum_{j=1}^{6R} r_j^2 \leq (\text{rad} D)^2 = (2N+1) R_0^2$$

$a^2 = \frac{c^2}{3} \max_{1 \leq N} \left(4 + \frac{1}{N(N+1)} \right) = \frac{3c^2}{2}$ とおけば、(1.2) が成り立つ。 \square

§5. 等角写像への応用

Rodin-Sullivan [6] の議論の状況を考える。

Ω : 有界領域, $z_0, z_1 \in \Omega$ ($z_0 \neq z_1$) とする。

まず、 ε -circles による regular hexagonal packing を作る。

$H_\varepsilon \equiv \{\Omega$ に含まれる、上の packing の ε -circles すべて}

$I_\varepsilon \equiv \{j: \varepsilon$ -circles $\}$ は次の性質をもつ円の列の最後の円

(i) 列の各円 $\in H_\varepsilon$, (ii) 列の各円の 6 点近傍 $\in H_\varepsilon$

(iii) 列の各円は前の円に接する。

(iv) 列の始めの円の flower は、 $z_0 \in \Omega$ を含む。

$B_\varepsilon \equiv \{\text{border circles} \in H_\varepsilon \mid \text{内部の円ではないが、内部の円に接する}\}$

border circles は、各円が前の円と接し、最初と最後の円が接するような円の列に並べることができる。border circles の円の中心を順につないだ polygonal line は、内部の円 I_ε を囲む Jordan 曲線になっている。 $\Omega_\varepsilon = I_\varepsilon \cup B_\varepsilon$ である。

そのとき、Andrew [1] により、unit disk D 内に、 Ω_ε に対応した次のような条件をみたす circle packing D_ε が存在することが、知られている。

(条件) $D_\varepsilon \subset \text{unit disk } D$ かつ

i) $D_\varepsilon \times \Omega_\varepsilon$ は組み合せ的同値

ii) Ω_ε の border circles に対応する D_ε の circles は、 D の境界に接する。

Rodin-Sullivan [6] は、次の Thurston の予想を証明した。

Thurston の予想 Andrew が与えた D_ε について、円対応 $\Omega_\varepsilon \rightarrow D_\varepsilon$ に、適当な正規化を行えば、 D_ε と Ω_ε がなす三角分割に従って作られた正規化された区分的線型写像 f_ε が、Riemann map $f: \Omega \rightarrow D$, $f(z_0)=0$, $f'(z_0)>0$ に収束する。

適当な正規化

\iff ① D の Möbius 変換を作用して、 $z_0 \in \Omega$ を含む flower をもつ一つの円 $(\in \Omega_\varepsilon)$ を 0 を含む flower をもつ円 $(\in D_\varepsilon)$ に対応させる。

② D の回転を作用して、 $z_0 \in \Omega$ を含む flower をもつ円 $(\in \Omega_\varepsilon)$ を、 D の正の実軸上にある円 $(\in D_\varepsilon)$ に対応させる。

命題 3. $K: \Omega$ 内の compact 集合とする。次の性質をみたす定数 $M_K (> 0)$ が存在する。

—— $\varepsilon (> 0)$ 十分小について、適当な正規化された同型 $\Omega_\varepsilon \rightarrow D_\varepsilon: \text{円} \rightarrow \text{円}$ がある。

$$\implies \text{rad} \gamma' / \text{rad} \gamma \leq M_K \quad (\gamma \in \Omega_\varepsilon, \gamma \cap K \neq \emptyset) \quad (5.1)$$

(証明) $\varepsilon (> 0)$ 十分小、 $\gamma \cap K \neq \emptyset$ ($\gamma \in \Omega_\varepsilon$) とする。

$N \equiv \max\{n \in \mathbb{N} \mid \Omega_\varepsilon \ni \gamma \text{ を始点とする HCP}_n\}$ と定める。

Δ : γ を始点とする HCP $_N$ を含む最小の disk、とする。

unit disk を Δ の半径の円に縮めて、定理 2 を用いると、

$$\lambda \text{rad} \gamma' \leq \alpha \text{rad} \gamma \quad (\lambda = \text{rad} \Delta \text{ とした})$$

がいえる。 $\frac{1}{2} \text{dist}(K, \mathbb{C} - \Omega) \leq \lambda$ だから、

$$\therefore \frac{\text{rad} \gamma'}{\text{rad} \gamma} \leq \frac{2\alpha}{\text{dist}(K, \mathbb{C} - \Omega)}$$

□

$$\begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \downarrow & & \downarrow \\ z_1 & \longrightarrow & \frac{\text{rad} \gamma'}{\text{rad} \gamma} \end{array}$$

を考える。

γ : z_1 を含む flower の中の円

γ' : 同型対応 $\Omega_\varepsilon \rightarrow D_\varepsilon$ による γ の像

最後の主結果を述べる。

定理 3 $\varepsilon \rightarrow 0$ のとき、 $z_1 \mapsto \frac{\text{rad} \gamma'}{\text{rad} \gamma}$ が $z_1 \mapsto |f(z_1)|$ に Ω 上 compact 一様収束する。

\iff 各 compact 集合 $K \subset \Omega$ において、

$$\| |f|_{\frac{\Omega \cap \Omega_\varepsilon}{z_1}} - |f| \|_{K, \infty} \longrightarrow 0 \quad (\varepsilon \rightarrow 0) \quad (5.1)$$

ただし、ノルムは、 K 上の essential supremum である。

(証明) 1つの円 $\gamma \in \Omega_\varepsilon$ とそれに接する2つの円を考える。

同型 $\Omega_\varepsilon \rightarrow D_\varepsilon$ により、その3つの円は、半径 r_1, r_2, r_3 の円にう

つる。ただし、 $r_1 = \text{rad} \gamma$ とする。

区分的線型写像 $f_\varepsilon(z) = az + b\bar{z}$ は、次をみたすことがわかる。

$$2\varepsilon^2 \left| \frac{\partial f_\varepsilon}{\partial z} \right|^2 = \frac{1}{12} [(r_1+r_2)^2 + (r_1+r_3)^2 + (r_2+r_3)^2] + \frac{1}{\sqrt{3}} [r_1 r_2 r_3 (r_1+r_2+r_3)]^{1/2} \quad (5.2)$$

$$2\varepsilon^2 \left| \frac{\partial f_\varepsilon}{\partial \bar{z}} \right|^2 = \frac{1}{12} [(r_1+r_2)^2 + (r_1+r_3)^2 + (r_2+r_3)^2] - \frac{1}{\sqrt{3}} [r_1 r_2 r_3 (r_1+r_2+r_3)]^{1/2} \quad (5.3)$$

$N \equiv \max \{n \in \mathbb{N} \mid \Omega_\varepsilon \ni \{\gamma \text{ を始点とする HCP}_N\} \}$ とおく。

$\cap K \neq \emptyset$ ($K \in \Omega$) とする。

$\varepsilon \rightarrow 0$ のとき、 $N \rightarrow \infty$ となる。

McChes, Whipple [4] による Hexagonal packing lemma より、

$$\frac{r_j}{r_1} = 1 + O(S_N) \quad (j=2,3) \quad , \quad S_N \rightarrow 0 \quad (N \rightarrow \infty)$$

がいえる。命題 3. (5.1) $\frac{r_j}{\varepsilon} \leq M_K$ と (5.2)、(5.3) と合わせて次が

わかる。

$$\left| \frac{\partial f_\varepsilon}{\partial z} \right|^2 = \left(\frac{r_1}{\varepsilon} \right)^2 + O(S_N)$$

$$\left| \frac{\partial f_\varepsilon}{\partial \bar{z}} \right|^2 = O(S_N)$$

$$\therefore \frac{\text{rad} \gamma}{\text{rad} \gamma} - \left| \frac{\partial f_\varepsilon}{\partial z} \right| \rightarrow 0 \quad (\varepsilon \rightarrow 0)$$

□

系 擬等角写像 f_ε は、次の性質をもつ。

$\frac{\partial f_\varepsilon}{\partial z}$ は、compact subset 上、 $\varepsilon \rightarrow 0$ のとき L^∞ -ノルムで一様有界。

$\frac{\partial f_\varepsilon}{\partial \bar{z}}$ は、 $''$ 一様に 0

に収束する。

(証明) 定理 3 の中で示されている。

Reference

1. Andreev, E. M. : Convex polyhedra of finite volume in Lobachevskii space; Math. USSR. Sb. 12 (1970), 255-259
2. Bárány, I., Füredi, Z., Pach, J. : Discrete convex functions and proof of the six circle conjecture of Fejes Tóth; Can. J. Math. 36 (1984), 569-576
3. Laasonen, P. : On the degree of convergence of discrete approximations for the solutions of the Dirichlet Problem; Ann. Acad. Sci. Fen. Ser. A. I. 246 (1957), 1-19
4. McCrea, W. H., Whipple, F. J. W. : Random paths in two and three dimensions; Proc. R. Soc. Edinb. Sect. A. 60 (1939-1940), 281-298
5. Rodin, B. : Schwarz's lemma for circle packings; Invent. Math. 89 (1987), 271-289
6. Rodin, B., Sullivan, D. : The convergence of circle packings to the Riemann mapping; J. Diff. Geom. (1987), 349-360