数理解析研究所講究録
第 895 巻 1995 年 15-23

量子群とゼータ函数の q-analogue について

上野 喜三雄 (Kimio Ueno) 早大理工
西澤 道知 (Michitomo Nishizawa) 早大理工

1 Introduction

zeta 函数の定義のひとつに、Laplacian 等のスペクトルによる、spectral zeta 函数と呼ばれるものがある。それを量子群上で定義し、性質を調べることは興味ある問題だと思われる。また、この構成の仕方を一般化することにより、種々の zeta 函数の q-analogue を考えることもできる。この稿では、そのような考え方に従い、Hurwitz zeta 函数の q-analogue $\zeta(s,z:q)$ を定義し、それが、Hurwitz zeta 函数の持つ種々の性質の q-analogue を満たすことを示し、それに関する若干の一般化を行なう。

このような、zeta 函数についての考察が、spectral zeta 函数を通した量子群の幾何学の研究に結び付くことが期待される。

2 q-Hurwitz zeta 函数の定義

この稿を通じて、$0<q<1,\quad \Re z>0,\quad \delta=2\pi i/\log q$

$$[z]_q=\frac{1-q^z}{1-q}\qquad (x:q)_\infty=\prod_{n=0}^{\infty}(1-xq^n)$$

とする。

スペクトルの列

$$0\leq\lambda_1\leq\lambda_2\leq\cdots\leq\lambda_n\leq\cdots\to\infty$$

に対し、spectral zeta 函数 $Z(s)$ は

$$Z(s)=\sum_{n=1}^{\infty}{\lambda_n}^{-s}$$

と定められる。これを、$A(SU_q(2))$ を左 $U_q(sl(2))$- 加群と見たときの Casimir 作用素のスペクトル

$$\lambda_n=\left(\frac{q^{\frac{n}{2}}-q^{-\frac{n}{2}}}{q-q^{-1}}\right)^2\quad (\text{重複度 } n^2)$$

で定義する (cf.[8]) 。このときの、spectral zeta 函数 $Z(s:SU_q(2))$ は

$$Z(s:SU_q(2))=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{{\lambda_n}^s}=(1+q^{-1})^{2s}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2q^{ns}}{{[n]_q}^{2s}}$$

となる。これとの比較により $\Re s>0$ において、Hurwitz の zeta 函数

$$\zeta(s,z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(k+z)^s}$$

の q-analogue $\zeta(s,z:q)$ を

$$\zeta(s,z:q)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{q^{s(k+1)}}{[k+z]_q{}^s}$$

で定義する。以後 $\zeta(s,z:q)$ を q-Hurwutz zeta 函数と呼ぶ。このとき、無限和は、広義一様絶対収束なので、$\zeta(s,z:q)$ は s, z に対し正則で、しかも、上の範囲で古典極限 $q\to 1-0$ は、$\zeta(s,z)$ に 一致する。

次に、これを全 s- 平面に解析接続することを考える。$[k+z]_q{}^s$ の $(1-q^{k+z})^s$ の部分を二項展開することにより、$\zeta(s,z:q)$ は、

$$\begin{aligned}\zeta(s,z:q) &= (1-q)^s\sum_{k=0}^{\infty}\left\{q^{(k+1)s}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(s)_r}{r!}q^{(k+z)r}\right\}\\ &= (q-q^2)^s\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(s)_r}{r!}\frac{q^{rz}}{1-q^{r+s}} \qquad (1)\end{aligned}$$

と整理しなおすことができる。ただし、$(s)_r=s(s+1)\cdots(s+r-1)$。(1) の形にすることにより、$\zeta(s,z:q)$ は $\Re s<0$ に解析接続できる。さらに $s=0$ での Laurant 展開を行なうことにより、次の定理を得る。

Theorem 1 *q-Hurwitz zeta* 函数 $\zeta(s,z:q)$ は 全 s- 平面に解析接続できる。極は $s=-r+\delta l \quad (r\in \mathbf{Z}_{\geq 0}, l\in\mathbf{Z})$ で、$s=0$ における *Laurant* 展開は

$$\zeta(s,z:q)=\frac{\alpha_{-1}}{s}+\alpha_0+s\left\{\alpha_1-\log(q^z:q)_\infty\right\}+O(s^2), \qquad (2)$$

where

$$\alpha_{-1}=-\frac{1}{\log q},\quad \alpha_0=\frac{1}{2}-\frac{\log(q-q^2)}{\log q}$$

$$\alpha_1=-\frac{1}{12}\log q+\frac{1}{2}\log(q-q^2)-\frac{1}{2}\frac{\log^2(q-q^2)}{\log q}$$

ただし $\log^k x=(\log x)^k$ とおいた。

3 Euler-MacLaurin 展開

次に、通常の zeta 函数について行なわれているように, Euler-MacLaurin の和公式を用いて、$\zeta(s,z:q)$ を解析する。

Theorem 2 (Euler-MacLaurin の和公式)

$$\begin{aligned}\sum_{r=M}^{N-1}f(r)=\int_M^N f(t)dt &+ \sum_{k=1}^{n}\frac{B_k}{k!}\left\{f^{(k-1)}(N)-f^{(k-1)}(M)\right\}\\ &+ (-1)^{n-1}\int_M^N\frac{\overline{B}_n(t)}{n!}f^{(n)}(t)dt. \qquad (3)\end{aligned}$$

ただし、$B_k(t)$ は

$$\frac{ze^{tz}}{e^z-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n(t)}{n!}z^n$$

で定義される *Bernoulli* 多項式で $B_k=B_k(0)$、$\overline{B}_n(t)=B_n(t-[t])$ である ($[t]$ は *Gauss* 記号)。

ここで

$$f(t)=\frac{q^{(t+1)s}}{(1-q^{t+z})^s}$$

とおいて、$M=0, N=\infty$ として (3) を用いる。超幾何函数の積分公式

$$F(\alpha,\beta,\gamma:x)=\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\beta)}\int_0^1 u^{\beta-1}(1-u)^{\gamma-\beta-1}(1-xu)^{-\alpha}du \tag{4}$$

を用いると、第一項が超幾何函数で表され、

$$\begin{aligned}\zeta(s,z:q) &= (1-q)^s\sum_{k=0}^{\infty}f(k)\\ &= -\frac{(q-q^2)^s}{s\log q}F(s,s,s+1:q^z)+\frac{1}{2}\left(\frac{q-q^2}{1-q^z}\right)^s\\ &+ s\left(\frac{q-q^2}{1-q^z}\right)^s\sum_{k=1}^{m}\frac{B_{2k}}{(2k)!}\left(\frac{\log q}{q^z-1}\right)^{2k-1}P_{2k-1}(q^z;s)\\ &- R_{2m}(s,z:q)\end{aligned} \tag{5}$$

ただし $P_k(x;s)$ は x の多項式で

$$P_0(x;s)=\frac{1}{s},\quad P_1(x;s)=1,$$

$$(x-x^2)P_k'(x;s)+(kx+s)P_k(x;s)=P_{k+1}(x;s).$$

で定義されるもので、

$$R_{2m}(s.z:q)=s\int_0^{\infty}\frac{\overline{B}_{2m}(t)}{(2m)!}\left(\frac{\log q}{q^{t+z}-1}\right)^{2m}\left(\frac{1-q}{1-q^{t+z}}\right)^s q^{s(t+1)}P_{2m}(q^{t+z};s)dt$$

となる。さらに (5) において、$m=1$ としたときの式

$$\begin{aligned}\zeta(s,z:q)= &- \frac{(q-q^2)^s}{s\log q}F(s,s,s+1:q^z)+\frac{1}{2}\left(\frac{q-q^2}{1-q^z}\right)^s\\ &+ \frac{s}{12}\left(\frac{q-q^2}{1-q^z}\right)^s\left(\frac{\log q}{q^z-1}\right)-R_2(s,z:q),\end{aligned}$$

の $R_2(s,z:q)$ に $\overline{B}_2(t)$ の Fourier 展開

$$\overline{B}_2(t)=\frac{1}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2\pi nt)}{n^2}$$

を代入すると、

$$\begin{aligned}R_2(s,z:q) &= (1-q)^s\int_0^{\infty}\frac{\overline{B}_2(t)}{2}f''(t)dt\\ &= \frac{(1-q)^s}{2\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{n^2}\left[f'(t)\cos(2\pi nt)\right]_0^{\infty}+\frac{2\pi}{n}\int_0^{\infty}f'(t)\sin(2\pi nt)dt\right\}\\ &= \frac{s}{12}\left(\frac{q-q^2}{1-q^z}\right)^s\left(\frac{\log q}{q^z-1}\right)+\frac{(q-q^2)^s\log q}{2\pi i}\sum_{l\neq 0}\int_0^{\infty}e^{2\pi ilt}\frac{q^{st}}{(1-q^{t+z})^{s+1}}dt\\ &= \frac{s}{12}\left(\frac{q-q^2}{1-q^z}\right)^s\left(\frac{\log q}{q^z-1}\right)+\frac{s(q-q^2)^s}{2\pi i}\sum_{l\neq 0}\frac{1}{l(s+\delta l)}F(s+1,s+\delta l,s+\delta l+1:q^z)\end{aligned}$$

となり、超幾何函数を成分とする無限級数で表せる。これは $s\neq -r+\delta k \quad (r\in\mathbf{Z}_{\geq 0},\quad k\in\mathbf{Z}_{\neq 0})$ で広義一様絶対収束なので、この表示は全 s- 平面に解析接続できる。

Theorem 3 $s \neq -r + \delta k \quad (r \in \mathbf{Z}_{\geq 0}, \quad k \in \mathbf{Z}_{\neq 0})$ で

$$\begin{aligned}\zeta(s, z : q) &= -\frac{(q-q^2)^s}{s \log q} F(s, s, s+1 : q^z) + \frac{1}{2}\left(\frac{q-q^2}{1-q^z}\right)^s \\ &+ \frac{s(q-q^2)^s}{2\pi i} \sum_{l \neq 0} \frac{1}{l(s+\delta l)} F(s+1, s+\delta l, s+1+\delta l : q^z). \end{aligned} \tag{6}$$

4 古典極限

(6) を用いて $\zeta(s, z : q)$ の古典極限を考える。$q \to 1-0$ での挙動は、超幾何函数の接続公式

$$\begin{aligned} F(\alpha, \beta, \gamma : x) &= \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha+\beta-\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta} F(\gamma-\alpha, \gamma-\beta, \gamma-\alpha-\beta+1 : 1-x) \\ &+ \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)} F(\alpha, \beta, \alpha+\beta-\gamma+1 : 1-x) \end{aligned}$$

を用いて調べることができる。これを Theorem 3 に代入し、整理すると

$$\begin{aligned} \zeta(s, z : q) &+ \frac{(q-q^2)^s q^{-zs}}{\log q} \frac{\pi}{\sin \pi s} \\ &= \frac{1}{1-s}\left(\frac{q-q^2}{1-q^z}\right)^s \left(\frac{q^z-1}{\log q}\right) F(1, 1, 2-s : 1-q^z) + \frac{1}{2}\left(\frac{q-q^2}{1-q^z}\right)^s \\ &+ \sum_{l \neq 0} \frac{1}{l}\left[\left(\frac{q-q^2}{1-q^z}\right)^s \sum_{r=0}^{\infty}\left\{\frac{(\delta l)_r}{(1-s)_r}(1-q^z)^r\right\}\right. \\ &- \left.\frac{\Gamma(1-s)\Gamma(s+\delta l)}{\Gamma(\delta l)}(q-q^2)^s q^{-zs} e^{-2\pi i l}\right] \end{aligned} \tag{7}$$

このとき、

$$\frac{q^z-1}{\log q} \to z \qquad \lim_{q \to 1-0}(1-q)^s \frac{\Gamma(s+\delta l)}{\Gamma(\delta l)} = (-2\pi i l)^s \tag{8}$$

に注意して、極限を求めると

$$\begin{aligned} &\lim_{q \to 1-0}\left\{\zeta(s, z : q) + \frac{(q-q^2)^s q^{-zs}}{\log q} \frac{\pi}{\sin \pi s}\right\} \\ &= \frac{z^{1-s}}{s-1} + \frac{z^{-s}}{2} + \frac{s z^{-s}}{2\pi i} \sum_{l \neq 0} \frac{1}{l} U(1, 1-s : -2\pi i l z). \end{aligned} \tag{9}$$

ただし、$U(\alpha, \gamma : x)$ は合流型超幾何函数

$$F(\alpha, \gamma : z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n}{n!\,(\gamma)_n} z^n$$

を用いて

$$U(\alpha, \gamma : x) = \frac{\Gamma(1-\gamma)}{\Gamma(1+\alpha-\gamma)} F(\alpha, \gamma : x) + \frac{\Gamma(\gamma-1)}{\Gamma(\alpha)} e^x x^{1-\gamma} F(1-\alpha, 2-\gamma : -x)$$

と定義される函数である (cf. [13])。一方でこの函数は積分表示

$$U(\alpha, \gamma : x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} e^{-xu}(1+u)^{\gamma-\alpha-1} du$$

をもち、これを用いれば、$\zeta(s,z)$ の $m=1$ までの Euler-MacLaurin 展開

$$\zeta(s,z)=\frac{z^{1-s}}{s-1}+\frac{z^{-s}}{2}+\frac{s}{12}z^{-s-1}-\frac{s(s+1)}{2!}\int_0^\infty\frac{\overline{B}_2(t)}{(z+t)^{s+2}}dt$$

は、前と同様な方法で

$$\zeta(s,z)=\frac{z^{1-s}}{s-1}+\frac{z^{-s}}{2}+\frac{sz^{-s}}{2\pi i}\sum_{l\neq 0}\frac{1}{l}U(1,1-s:-2\pi ilz)$$

となり、(9) の右辺と一致する。以上より

Theorem 4 s が正整数でないとき、

$$\lim_{q\to 1-0}\left\{\zeta(s,z:q)+\frac{(q-q^2)^s q^{-zs}}{\log q}\frac{\pi}{\sin\pi s}\right\}=\zeta(s,z).$$

5 函数等式との関連

以後

$$\zeta^*(s,z:q)=\zeta(s,z:q)+\frac{(q-q^2)^s q^{-zs}}{\log q}\frac{\pi}{\sin\pi s}$$

とする。$\Re s<0,\quad 0<z\leq 1$ のとき、

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2\pi i}\left(\frac{q-q^2}{1-q^z}\right)^s\sum_{l\neq 0}\frac{1}{l}F(\delta l,1,1-s:1-q^z)\\&=-\frac{1}{s-1}\left(\frac{q-q^2}{1-q^z}\right)^s\frac{q^z-1}{\log q}F(1,1,2-s:1-q^z)-\frac{1}{2}\left(\frac{q-q^2}{1-q^z}\right)^s\end{aligned}$$

が成立する。これと前節の定理を用いると

Theorem 5 $0<z\leq 1,\quad \Re s<0,\quad s\neq -r+\delta l\quad (r\in \mathbf{Z}_{\geq 0},\quad l\in\mathbf{Z}_{\neq 0})$ とすると

$$\zeta^*(s,z:q)=-\frac{1}{2\pi i}(q-q^2)^s q^{-zs}\Gamma(1-s)\sum_{l\neq 0}\frac{1}{l}\frac{\Gamma(s+\delta l)}{\Gamma(\delta l)}e^{-2\pi ilz}\tag{10}$$

がいえる。

Theorem 4 と、(8) より、(10) の古典極限は

$$\zeta(s,z)=\Gamma(1-s)\left\{(2\pi i)^{s-1}\mathcal{L}_{1-s}(z)+(-2\pi i)^{s-1}\mathcal{L}_{1-s}(1-z)\right\}\tag{11}$$

となる。ただし、$\mathcal{L}_s(z)$ は、generalized polylogarithm

$$\mathcal{L}_s(z)=\sum_{n=1}^\infty\frac{e^{2\pi inz}}{n^s}\quad(\Re s>0)$$

である。つまり、Theorem 5 は、Hurwitz の表示の q-analogue であると考えられる (11) 。は $z=1$ とおいたときに Riemann の zeta 函数の函数等式

$$\zeta(s)=2^s\pi^{s-1}\Gamma(1-s)\sin(\frac{\pi s}{2})\zeta(1-s)$$

を与える (cf. [4], [9])。

6 q-Hurwitz zeta 函数と q-gamma 函数

Hurwitz zeta 函数と gamma 函数の間には

$$\left[\frac{d}{ds}\zeta(s,z)\right]_{s=0} = \log\left(\frac{\Gamma(z)}{\sqrt{2\pi}}\right) \tag{12}$$

の関係がある。同様の関係が q-Hurwitz zeta 函数と q-gamma 函数

$$\Gamma(z+1:q) = (1-q)^{-z}\frac{(q:q)}{(q^z:q)}$$

の間にも成立する。Theorem 1 と Theorem 4 の Corollaly として、次が成立する。

Corollary 1

$$\left[\frac{d}{ds}\zeta^*(s,z:q)\right]_{s=0} = \log\left(\frac{q^{\frac{z^2}{2}-z+\frac{5}{12}}e^{\frac{\pi^2}{6\log q}}\Gamma(z:q)}{(1-q)^{\frac{1}{2}}(q:q)_\infty}\right)$$

この式の古典極限は *(12)* となる。

古典論では、Hurwitz zeta 函数の $s=0$ での Laurant 展開と Euler-MacLaurin 展開の s の 1 次の項を比較することにより、Stirling の公式が得られる。ここでも同様なことが考えられるが、古典極限をとるときの挙動が見にくいので、まず、q-shifted factorial$(q^z:q)_\infty$ の漸近的な挙動から考える。$\zeta(s,z:q)$ の 2 通りの表示 (1), (5) の $s=0$ での Laurant 展開の s の 1 次の係数を比較することにより, 次の式が得られる。

$$\begin{aligned}\log(q^z:q)_\infty &= \frac{1}{\log q}Li_2(q^z) - \frac{1}{12}\log q + \frac{1}{2}\log(1-q^z)\\ &- \sum_{k=1}^{m}\frac{B_{2k}}{(2k)!}\left(\frac{\log q}{q^z-1}\right)^{2k-1}P_{2k-1}(q^z) + R_{2m}(z:q)\end{aligned} \tag{13}$$

ただし、

$$R_{2m}(z:q) = \frac{1}{s}R_{2m}(s,z:q)\Big|_{s=0} = \int_0^\infty \frac{\overline{B}_{2m}(t)}{(2m)!}\left(\frac{\log q}{q^{t+z}-1}\right)^{2m}P_{2m}(q^{t+z})dz.$$

で、$P_k(x) = P_k(x,0)$, $Li_2(x)$ は、Euler の dilogarithm

$$Li_2(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}$$

である (q-shifted factrial の $q\to 1$ での漸近的挙動の主要項に dilogarithm が現れることは [5] にも示されている) 。

これより、次の定理が成り立つ。

Theorem 6

$$\begin{aligned}\log\Gamma(z:q) &\sim (z-\frac{1}{2})\log\left(\frac{1-q^z}{1-q}\right) + \log q\int_1^z \xi\frac{q^\xi}{1-q^\xi}d\xi\\ &+ C_1(q) + \frac{1}{12}\log q + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{B_{2k}}{(2k)!}\left(\frac{\log q}{q^z-1}\right)^{2k-1}P_{2k-1}(q^z) \quad (\Re z\to\infty)\end{aligned}$$

ただし、

$$C_1(q) = -\frac{1}{12}\log q - \frac{1}{12}\frac{\log q}{q-1} + \int_0^\infty \frac{\overline{B}_2(t)}{2}\left(\frac{\log q}{q^{t+1}-1}\right)^2 q^{t+1}dt.$$

この漸近展開は $0 < q \leq 1$ で一様に成立する。特に $q = 1$ のとき、これは *Stirling* の公式と一致する。

これは、$\frac{d}{dz}\log\Gamma(z:q)$ に Euler-MacLaurin の和公式を用いて、Stirling の公式の q-analogue を求めた Moak [10] の結果と一致している。

また、q-shifted factorial の漸近的挙動の式 (13) と polylogarithm の展開式 (cf. Lewin [7])

$$\frac{1}{b\log q}Li_2(q^a) = \frac{\pi^2}{6b\log q} - \frac{a}{b}\log a - \frac{a}{b}\log(-\log q) + \frac{a}{b} + O(\log q)$$

を用いることにより、

$$\begin{aligned}\log(q^a:q^b)_\infty = \frac{\pi^2}{6b\log q} &+ \left(\frac{1}{2}-\frac{a}{b}\right)\{\log(-\log q)+\log b\} + \frac{1}{2}\log(2\pi)\\ &- \log\Gamma(\frac{a}{b}) + O(\log q).\end{aligned}$$

がいえる。これより Ramanujan's Notebook の式 (cf.Berndt [3],p.285)

$$\log\frac{1}{(q^2:q^5)_\infty(q^3:q^5)_\infty} = -\frac{\pi^2}{15\log q} - \frac{1}{2}\log\left(\frac{5+\sqrt{5}}{2}\right) + O(\log q)$$

$$\log\frac{1}{(q:q^5)_\infty(q^4:q^5)_\infty} = -\frac{\pi^2}{15\log q} - \frac{1}{2}\log\left(\frac{5-\sqrt{5}}{2}\right) + O(\log q)$$

が導ける。

7 多重化

最後に、今までの考察の一般化について、概略を述べる。Hurwitz zeta 函数の一般化として、多重 zeta 函数

$$\zeta_r(s,z) = \sum_{k_1,k_2,\cdots k_r,=0}^{\infty}\frac{1}{(k_1+k_2+\cdots+k_r+z)^s}$$

が知られている。この q-analogue として、q- 多重 zeta 函数

$$\begin{aligned}\zeta_r(s,z:q) &= \sum_{k_1,k_2,\cdots k_r=0}^{\infty}\frac{q^{s(k_1+k_2+\cdots+k_r+1)}}{[k_1+\cdots+k_r+z]_q{}^s}\\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\binom{k+r-1}{r-1}q^{s(k+1)}}{[k+z]_q{}^s}\end{aligned}$$

が定義できる。このとき、Euler-MacLaurin 展開には、一般化された超幾何函数が生ずる。さらに

$$\left\{\left[\frac{\partial}{\partial s}\zeta_r(s,z)\right]_{s=0}\right\}^{(-1)^{r-1}}$$

を正規化することで、多重 gamma 函数 $G_r(z)$ が定義できる。多重 gamma 函数は Bohr-Morrelup の定理の一般化

1. $G_r(z+1) = G_{r-1}(z)G_r(z)$,
2. $G_r(1) = 1$,
3. $\frac{d^{r+1}}{dz^{r+1}} \log G_r(z+1) \geq 0$ for $z \geq 0$,
4. $G_0(z) = z$

を満たす。これに対し、

1. $G_r(z+1:q) = G_{r-1}(z:q)G_r(z:q)$,
2. $G_r(1:q) = 1$,
3. $\frac{d^{r+1}}{dz^{r+1}} \log G_r(z+1:q) \geq 0$ for $z \geq 0$,
4. $G_0(z;q) = [z]_q$

を満たす q- 多重 gamma 函数を

$$G_0(z+1:q) = [z+1]_q, \qquad G_1(z+1:q) = \Gamma(z+1;q),$$

$$G_r(z+1:q) = (1-q)^{-\binom{z}{r}} \prod_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{1-q^{z+n}}{1-q^n} \right)^{(-1)^r \binom{n+r-2}{r-1}} (1-q^n)^{g_r(z,n)} \right],$$

ただし

$$g_r(z,n) = \sum_{m=1}^{r-1} (-1)^{m-1} \binom{z}{r-m} \binom{n+m-2}{m-1}.$$

で定義することができる (cf.[11])。これと q- 多重 zeta 函数は古典論と同様に関係づけられる。q- 多重 gamma 函数の漸近的挙動には polylogarithm が現れる。

参考文献

[1] E.W.Barnes, *The theory of G-function,* Quat. J. Math 31 (1899) p.264–314

[2] E.W.Barnes, *On the theory of the multiple gamma function,* Trans. Cambridge. Phil. Soc 19 (1904) p.374–425

[3] B.C.Berndt, *Ramanujan's Notebooks Part IV,* Springer-Verlag

[4] J.Dufresnoy and C.Pisot, *Sur la relation fonctionalle* $f(x+1) - f(x) = \phi(x)$, Bull. Soc. Math. Belgique 15 (1963) p.259–270

[5] L.D.Fadeev and R.M.Kashaev, *Quantum Dilogarithm,* Mod. Phys. Lett. A 9 (1994) p.427–434

[6] N.Kurokawa, Lectures delivered at Tokyo Institute of Technology,1993.

[7] L.Lewin *Polylogarithms and Associated Functions,* North Holland

[8] T.Masuda, K.Mimachi, Y.Nakagami, M.Noumi and K.Ueno, *Representation of the Quantum group* $SU_q(2)$ *and the Little q-Jacobi Polynomials,* J. Funct. Anal. 99 (1991), p.357–386

[9] J.Milnor, *On Polylogarithms, Hurwitz Zeta-Functions and the Kubert Identities,* L'Enseignement Math.t.29 (1983), p.281–322

[10] D.S.Moak, *The q-analogue of Stirling Formula,* Rocky Mountain J. Math,14 (1984),p.403–413

[11] M.Nishizawa, *On A q-analogue of Barne's G-function,* preprint

[12] P.Podleś, *Quantum Spheres,* Lett. Math. Phys. 14 (1987),p.193–202

[13] L.J.Slator. *Confluent Hypergeometric Functions,* Cambridge. Univ. Press

[14] K.Ueno, M.Nishizawa. *Quantum groups and zeta-functions* Proc.of the Karpacz Winter School 1994, hep-th/9408143