数理解析研究所講究録
第 895 巻 1995 年 24-43

座標対称性をもつ完全積分可能な量子系

東大数理 大島 利雄 (Toshio OSHIMA)

1. 可換微分作用素系

互いに可換で自己共役な行列は、同時対角化が可能であり、作用する空間は同時固有空間の直和に分解される。無限次元へ拡張して:

n-変数 $(x_1,\ldots,x_n)$ の空間において、互いに可換で代数的に独立な自己共役な線形微分作用素 $P_1,\ldots,P_n$ があると、$(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)\in\mathbb{C}^n$ に対して

$$P_j\phi_\lambda(x)=\lambda_j\phi_\lambda(x)\quad\text{for } j=1,\ldots,n \tag{1.1}$$

という同時固有値問題が考えられ、任意の x の函数がこの固有函数ϕ_λを使って展開されることが期待される。

$n=1$ の場合は、常微分作用素になり、固有函数による展開定理は Weyl-Stone-Kodaira-Titchmarsh の展開定理として知られているが、(変数分離で 1 変数に帰着されない) 多変数の場合については一般的展開定理は知られていない。

また、$n>1$ の場合は、互いに可換で代数的に独立な非自明な線形微分作用素系 $P_1,\ldots,P_n$を構成することすら容易でなく、知られている例はあまり多くない。

表現論における各種の Plancherel の公式は、このような展開定理の $n>1$ の場合の豊富な例を提供している。すなわち、Peter-Weyl の定理や、Harish-Chandra の実半単純 Lie 群の Plancherel の公式であり、このときの $\phi_\lambda(x)$ は、行列要素、あるいは、球函数と呼ばれる。

一般に (1.1) の解空間は有限次元であり、解ϕ_λには、帯球函数などを一般化した多変数の特殊函数として興味深いものが存在するであろう。

2. root 系との関連

古典力学における完全積分可能系 (cf. [P]) 、あるいは、それを量子化した完全積分可能系は、数理物理において研究されてきたが、知られている例は多くなく完全積分可能系は少ないと考えられる。この場合、ハミルトニアン$\frac{1}{2}\sum p_i^2 + V(q)$ を量子化した Shorödinger 作用素

$$P = -\frac{1}{2}\sum \partial_j^2 + V(x) \tag{2.1}$$

に対し、Pと可換な線形微分作用素Q（すなわち、$[P,Q]=0$）は、P の積分と呼ばれる。Pを含む互いに可換で代数的独立な積分 $P_1 = P, P_2, \ldots, P_n$ が存在するとき、(2.1) の作用素は完全積分可能という。ここで、

$$\partial_j = \frac{\partial}{\partial x_j}$$

とおいた。x の函数 $V(x)$ はポテンシャルと呼ばれる。

系統的に知られている完全積分可能量子系の多くは、root 系と関連して構成されており、次の 2 つのタイプに分けられる（両者の混合したものもある)。$\mathbb{R}^n$は Weyl 群 Wが作用する空間とみなされて (cf. [OP2]) :

1) $V(x)$ も W-不変であり、さらに、積分 P_jも W-不変になる場合。
基本となる函数

I. $v(\xi) = \xi^{-2}$
II. $v(\xi) = \sinh^{-2}\xi$
III. $v(\xi) = \sin^{-2}\xi$
IV. $v(\xi) = \wp(\xi)$
V. $v(\xi) = \xi^{-2} + \omega^2\xi^2$

を用いて

$$V(x) = \sum_{\alpha\in\Sigma^+} m_\alpha v(\langle\alpha, x\rangle) \tag{2.2}$$

と表せる。ただし、Σ^+ は Weyl 群 Wをもつ root 系の正のルート全体で、$m_\alpha \in \mathbb{C}$ は、$m_{w\alpha} = m_\alpha$ $(w \in W)$ を満たす。

Wが A_{n-1}型のときは (cf. [Ca], [M], [Su])

$$V(x) = \sum_{j=1}^{n-1} v(x_j - x_{j+1}) \tag{2.3}$$

2) Toda lattice 系 (nearest neighborhood interaction)

I. non-cyclic case

II. cyclic case

基本となる函数は、$v(\xi) = \exp \xi$ で

$$V(x) = \sum_{\alpha \in \Psi} v(\langle \alpha, x \rangle) \tag{2.4}$$

と表せる。ただし、Ψは Weyl 群 Wをもつ root 系の simple system で、II の場合は、Kac-Moody Lie algebra の simple system をとる。

A_{n-1}の場合は

$$V(x) = \sum_{j=1}^{n-1} \exp(x_j - x_{j+1}) \tag{2.5}$$

で、A_{n-1}の拡大 Dynkin Diagram に対応する II の場合は

$$V(x) = \sum_{j=1}^{n-1} \exp(x_j - x_{j+1}) + \exp(x_n - x_1) \tag{2.6}$$

となる。

ここで、$\wp(z)$ は Weierstrass の楕円函数であり (cf. [WW]) 、その基本周期の半分をω_1, ω_2とおくと

$$\wp(z|2\omega_1, 2\omega_2) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega \neq 0} \left(\frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right) \tag{2.7}$$

と定義される。ただし、和は

$$\omega = 2m_1\omega_1 + 2m_2\omega_2 \quad \text{for } (m_1, m_2) \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$$

と、0 以外の周期を渡る。$\wp$は、ある $g_2, g_3, e_1, e_2, e_3 \in \mathbb{C}^2$ に対し代数的微分方程式

$$(2.8)\qquad \begin{aligned}(\wp')^2 &= 4\wp^3 - g_2\wp - g_3\\ &= 4(\wp - e_1)(\wp - e_2)(\wp - e_3)\end{aligned}$$

を満たす。さらに和公式

$$(2.9)\qquad \begin{vmatrix} \wp(x) & \wp'(x) & 1\\ \wp(y) & \wp'(y) & 1\\ \wp(z) & \wp'(z) & 1\end{vmatrix} = 0 \quad \text{if} \quad x+y+z=0$$

が成立する。退化した場合として、

(2.10)

$$\wp(z|\sqrt{-1}\pi, \infty) = \sinh^{-2} z + \frac{1}{3} \quad \text{when} \quad g_2 = \frac{4}{3} \quad \text{and} \quad g_3 = -\frac{8}{27},$$

$$\wp(z|\infty, \infty) = z^{-2} \quad \text{when} \quad g_2 = g_3 = 0.$$

この (2.10) から、1) のタイプの I, II, III は、IV のパラメータが退化したものと考えて統一的に扱うことができ、II と III とは、$x \leftrightarrow \sqrt{-1}x$ という変換で移り合う。また、V は I を基にして積分を構成する方法が知られている ([OP2]) 。さらに、たとえば 1-II の場合の $V(x)$ に対し、

$$(2.11)\quad -\lim_{N\to\infty} \frac{e^N}{2} V(x_1+N, x_2+2N, \ldots, x_n+nN) = \sum_{j=1}^{n-1} \exp(x_j - x_{j+1})$$

となるので、(2.5) は 1-II の場合の limiting case とみなせる。cyclic Toda lattice 系も 1-IV の limiting case とみなせる ([I]) 。

このことなどから、1-IV が最も一般的で重要な場合と考えられる。その完全積分可能性にいては、A_n-型の場合以外は、特殊なパラメータの時以外は知られていなかったが ([OP2]) 、最近それが証明された (cf. [Ch], [O], §8) 。

3. 球函数との関連

非コンパクト型の Riemann 対称空間 G/K の帯球函数の動径成分の満たす微分方程式で、対称空間の Laplacian から来るものを計算すると

$$\Delta = \sum_{j=1}^{n} \partial_j^2 + \sum_{\alpha\in\Sigma^+} m_\alpha \coth\langle\alpha, x\rangle\partial(\alpha) \tag{3.1}$$

となる。Σ^+ は対称空間に対応する restricted root 系の正のルートの集合、m_α はルート α の重複度で

$$\partial(\alpha)\phi(x) = \frac{d}{dt}\phi(x+t\alpha)\Big|_{t=0} \tag{3.2}$$

とおいた。このとき

$$\begin{aligned} P_1 &= \prod_{\alpha\in\Sigma^+} (\sinh\langle\alpha, x\rangle)^{\frac{m_\alpha}{2}} \circ\Delta\circ \prod_{\alpha\in\Sigma^+} (\sinh\langle\alpha, x\rangle)^{-\frac{m_\alpha}{2}} \\ &\quad - \frac{1}{4}\Big|\sum_{\alpha\in\Sigma^+} m_\alpha\alpha\Big|^2. \\ &= \sum_{j=1}^{n} \partial_j^2 + \frac{1}{4}\sum_{\alpha\in\Sigma^+} m_\alpha(m_\alpha + 2m_{2\alpha} - 2)\sinh^{-2}\langle\alpha, x\rangle \end{aligned} \tag{3.3}$$

となるので、これは§2 の 1-II のタイプの例になっており、高階の積分は対称空間上の高階の不変微分作用素の動径成分で与えられる。特に完全積分可能であり、(1.1) の固有函数による展開定理は、対称空間上の K-不変な函数に対する Plancherel の公式に対応する。

一方、半単純 Lie 群 G が split 群のときは、対称空間上の代わりに Whittaker model の K-不変な函数を考えることにより、2-I のタイプの完全積分可能系が得られる。

対称空間上の帯球函数の満たす微分方程式系は 1-II および 1-III のタイプに対応する。可換なこの微分作用素系のパラメータ m_α を一般の複素パラメータに拡張しようという試みが、最初に[Sj] によって A_n-型のときになされた。その後[H1],[H2], [HO], [Op1], [Op2] の一連の研究によって一般のルート系の場合に拡張され、その性質が研究された。ただし、Heckman-Opdam では、高階の積分の存在は示されたが、その具体型は

与えられていない。BC 型の時の具体型は[D] にあるが、見やすい形とは言い難い。

4. 問題の定式化

有限群 $W \in O(n)$ の作用で不変な $\mathbb{R}^n$ 上の多項式 $\mathbb{C}[x]$ のなす環を $I[x]$ とおき、多項式 $P(x_1,\dots,x_n)$ に対して$\partial_P = P(\partial_1,\dots,\partial_n)$ とおく。このとき、W-不変な定数係数微分作用素環 $I[\partial] = \{\partial_P;\ P \in I[x]\}$ が代数的独立な n 個の元で生成されるための条件は、Wが Coxeter 群 (原点を通る超曲面に関するいくつかの鏡映変換で生成される群) であることが知られている。

Coxeter 群 Wに対し、$\{p_1,\dots,p_n\}$ を homogeneous な多項式からなる $I[x]$ の生成元とする。知られている完全積分可能系を考慮して、以下の 1, 2, 3, 4 を満たす線形微分作用素の環 $\mathbb{C}[P_1,\dots,P_n]$ を考える。

1. P_j は W-不変 $(1 \le i < j \le n)$.

2. $[P_i, P_j] = 0 \quad \text{for } 1 \le i < j \le n.$

3. $P_j = \partial_{p_j} + R_j \quad \text{with } \operatorname{ord} R_j < P_j \quad \text{for } 1 \le j \le n.$

4. $P \equiv -\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} \partial_j^2 + V(x) \in \mathbb{C}[P_1,\dots,P_n].$

たとえば、$p_1 = x_1^2 + \cdots x_n^2$ と仮定してよいが、上記の条件 3 は、$\operatorname{ord} R_1 = 0$ にとれる、すなわち、${}^tP_1 = P_1$という条件と同値である。

問題. 上の条件を満たす $\mathbb{C}[P_1,\dots,P_n]$ を総て決定せよ。

さて、ここではWが既約で古典型の場合を考える。すなわち、A_{n-1}型で $n > 2$ 、または、B_n型で $n > 1$ 、または、D_n型で $n > 3$ としてよい。このとき、Wの $\mathbb{R}^n$への作用は

$$(x_1,\dots,x_n) \mapsto (\varepsilon_1 x_{\sigma(1)},\dots,\varepsilon_n x_{\sigma(n)})$$

という座標変換に対応する。但し、σは集合 $\{1,\dots,n\}$ に対する置換群 $\mathfrak{S}_n$の元であり

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = \cdots = \varepsilon_n = 1 & (A_{n-1}\text{のとき}), \\ \varepsilon_1 = \pm 1, \cdots, \varepsilon_n = \pm 1 & (B_n\text{のとき}), \\ \varepsilon_1 = \pm 1, \cdots, \varepsilon_n = \pm 1,\ \#\{i;\, \varepsilon_i = -1\}\ \text{は偶数} & (D_n\text{のとき}) \end{cases}$$

となる。すると、3. の条件は次のように書いてもよい。

A_{n-1}型のとき

$$(4.1)\quad P_j = \sum_{1\le i_1<\cdots<i_j\le n} \partial_{i_1}\cdots\partial_{i_j} + R_j,\ \operatorname{ord} R_j < j \quad \text{for } 1\le j\le n$$

B_n型のとき

$$(4.2)\quad P_j = \sum_{1\le i_1<\cdots<i_j\le n} \partial_{i_1}^2\cdots\partial_{i_j}^2 + R_j,\ \operatorname{ord} R_j < 2j \quad \text{for } 1\le j\le n$$

D_n型のとき

(4.3)

$$\begin{cases} P_n = \partial_1\cdots\partial_n + R_n,\ \operatorname{ord} R_n < n, \\ P_j = \displaystyle\sum_{1\le i_1<\cdots<i_j\le n} \partial_{i_1}^2\cdots\partial_{i_j}^2 + R_j,\ \operatorname{ord} R_j < 2j \quad \text{for } 1\le j< n \end{cases}$$

さらに状況を簡単にするため、以下の条件を仮定する。

5. ポテンシャル函数 $V(x)$ は、$\mathbb{R}^n$の原点のある連結複素近傍からある解析的真部分集合を除いた集合の上の正則関数に拡張される。

たとえば、A_2の場合を考えてみよう。$Q=\sum_\alpha a_\alpha(x)\partial^\alpha$ に対し、${}^tQ=\sum(-1)^{|\alpha|}\partial^\alpha\circ a_\alpha(x)$ とおくと${}^t[P,Q]=-[{}^tP,{}^tQ]$ が成立する。とくに${}^tQ=(-1)^{\operatorname{ord}Q}Q$ となるとき、Q は natural adjoint property をもつということにする。$V(x)$ を決定するには、必要なら P_3の代わりに $(P_3-{}^tP_3)/2$ を考えることにより

$$(4.4)\quad \begin{aligned} P_3 &= \partial_1\partial_2\partial_3 + \sum a_j(x)\partial_j + b(x), \\ {}^tP_3 &= -P_3 \end{aligned}$$

と仮定してよい。このとき、$[P_3,P]=0$ の ∂_1^2の係数を見れば、$\partial_1 a_j(x)=0$ が分かり、$[P_3,P_1]=0$ と W-不変性と (4.4) より

$$(4.5)\quad P_3 = \partial_1\partial_2\partial_3 + u(x_2-x_3)\partial_1 + u(x_1-x_3)\partial_2 + u(x_2-x_3)\partial_3$$

と、偶函数 $u(t)$ を用いて表せることになる。さらに $[P_3, P]=0$ の$\partial_1\partial_2$の係数を見ると$\partial_3 V(x)+a'(x_2-x_3)+a'(x_1-x_3)=0$ となるので、対称な函数 $V(x)$ は

$$V(x)=u(x_1-x_2)+u(x_2-x_3)+u(x_1-x_3) \tag{4.6}$$

という形をしていると仮定できる。すなわち、ポテンシャル $V(x)$ は 1 変数の偶函数 $u(t)$ を用いて表せることがわかった（一変数化）。

次に $[P_3, P]=0$ の定数項を調べると

$$\begin{aligned} &u(x_1-x_2)\big(u'(x_3-x_1)-u'(x_2-x_3)\big)\\ &\qquad +u(x_2-x_3)\big(u'(x_1-x_3)-u'(x_3-x_1)\big)\\ &\qquad\qquad +u(x_3-x_1)\big(u'(x_2-x_3)-u'(x_1-x_2)\big)=0 \end{aligned}$$

を得る。すなわち

$$\begin{vmatrix} u(x) & u'(x) & 1 \\ u(y) & u'(y) & 1 \\ u(z) & u'(z) & 1 \end{vmatrix}=0 \quad \text{if} \quad x+y+z=0 \tag{4.7}$$

という函数微分方程式を得る。これの解は

$$u(t)=C\wp(t;2\omega_1,2\omega_2)+C' \tag{4.8}$$

であることを示すことができる（ポテンシャルの決定。cf. [WW], [OS]）。但し、C, C'は任意の複素数であり、ω_1, ω_2は $\mathbb{R}$ 上一次独立な任意の複素数で ∞ も許す。

なお、$U(t)$ を $U'(t)=u(t)$ となる奇函数とすると (4.7) は

$$\big(U(x)+U(y)+U(z)\big)^2=F(x)+F(y)+F(z) \quad \text{if} \quad x+y+z=0 \tag{4.9}$$

という函数方程式と同値であることが分かる（これと以下は落合啓之氏による注意）。なお

$$\big(U_1(x)+U_2(y)+U_3(z)\big)^2=F_1(x)+F_2(y)+F_3(z) \quad \text{if} \quad x+y+z=0 \tag{4.10}$$

という函数方程式は、[BP] によって解かれ、その結果を用いると A_2の場合は P_jの W-不変性を落とした場合でも、(4.1) と 2, 3, 4, 5 の下で、§2 で挙げた例に限ることが分かる。

A_2の場合は、上で与えた P_3から完全積分可能系 $\mathbb{C}[P_1, P_2, P_3]$ が構成されることは明らかである（高階積分の存在)。

以下、一般の場合について述べよう。

5. 一変数化

まず、A_2のときと同様、ポテンシャルが 1 変数の函数で表せることが言える。

定理 1 [OS]. §4 での仮定 1-5 の下に、

$$V(x) = \sum_{1\le i<j\le n} u(x_i - x_j) \qquad (A_{n-1}\text{のとき}),$$

$$V(x) = \sum_{1\le i<j\le n} \Big(u(x_i - x_j) + u(x_i + x_j)\Big) + \sum_{1\le j\le n} v(x_j) \quad (B_n\text{のとき}),$$

$$V(x) = \sum_{1\le i<j\le n} \Big(u(x_i - x_j) + u(x_i + x_j)\Big) \qquad (D_n\text{のとき})$$

を満たす偶函数 $u(x)$, $v(x)$ が存在する。

この証明は計算によって初等的にできるが、それは一般の root 系のときに適応できる証明は知らない。

R_jの W-不変性を落とした場合、A_nでは複数の u を用いて同様の結論が得られ、B_nや D_nの場合は、$x_1x_2x_3$のような 3 次の項を除いてやはり同様な結論が得られる。

Wが二面体群の場合も同様な一変数化ができることが、落合啓之氏によって示され、若干の計算がなされている（この場合、1-I の型以外に興味ある可換な系が存在するかどうかの可能性ははっきりしない。むしろ否定的？）

6. 函数微分方程式

A_nのときは P_1, P_2, P_3の可換性から、B_nと D_nのときは P_1と P_2の可換性から、定理 1 の $u(t)$ 、$v(t)$ は以下の条件を満たすことが示される。

定理 2 ([OS]). i) A_{n-1} $(n>3)$ のとき、$u(t)$ は (4.8) を満たす。
ii) B_n $(n>1)$ のとき、$\bigl(u(t),v(t)\bigr)$は以下を満たす。

$$(6.1)\quad \frac{\partial}{\partial y}\bigl(v'(y)(u(x+y)-u(x-y))+2v(y)(u'(x+y)+u'(x-y))\bigr)$$
$$=\frac{\partial}{\partial x}\bigl(v'(x)(u(x+y)-u(x-y))+2v(x)(u'(x+y)-u'(x-y))\bigr).$$

iii) D_n $(n>3)$ のとき、$u(t)$ は $v(t)=u(t)$ と置いたときの (6.1) を満たす。

$U'(t)=u(t)$, $V'(t)=v(t)$ となる奇函数 $U(t)$, $V(t)$ を取ることができて、(6.1) は以下の函数方程式と同値になる。

$$(6.2)\quad V(x)(U(x+y)+U(x-y))+V(y)(U(x+y)-U(x-y))$$
$$=F(x+y)+F(x-y)+G(x)+G(y).$$

定理 3 ([OS], [OO]). $\{t\in\mathbb{R};\ 0<|t|\ll 1\}$ で実解析的な偶函数の中での (6.1) の解$\bigl(u(t),v(t)\bigr)$は、以下の通り。

$$(6.3)\qquad u(t)=C_1,\quad v(t)\ \text{は任意の偶函数},$$

$$(6.3')\qquad v(t)=C_1,\quad u(t)\ \text{は任意の偶函数},$$

$$(6.4)\qquad \begin{cases} u(t)=C_1\wp(t)+C_2,\\ v(t)=\dfrac{C_3\wp(t)^4+C_4\wp(t)^3+C_5\wp(t)^2+C_6\wp(t)+C_7}{\wp'(t)^2} \end{cases}$$

$$(6.4')\qquad \begin{cases} u(t)=\dfrac{C_3\wp(\frac{t}{2})^4+C_4\wp(\frac{t}{2})^3+C_5\wp(\frac{t}{2})^2+C_6\wp(\frac{t}{2})+C_7}{\wp'(\frac{t}{2})^2},\\ v(t)=C_1\wp(t)+C_2 \end{cases}$$

$$(6.5)\qquad \begin{cases} u(t) = C_1\wp(t) + C_2\dfrac{\left(\wp(\frac{t}{2}) - e_3\right)^2}{\wp'(\frac{t}{2})^2} + C_3, \\ v(t) = C_4\wp(t) + \dfrac{C_5}{\wp(t) - e_3} + C_6 \end{cases}$$

ここで、$C_1, C_2, \ldots$ は任意の複素数で、$\wp(t)$ の周期も ∞ を許して任意。

さらにそれぞれの場合に考察を行うことにより以下を得る。

定理 4 ([OS] 、[OO]) .
i) A_{n-1} $(n > 3)$ のとき、$u(t)$ は、(4.8) で与えられる。
ii) B_n $(n > 2)$ のとき、$\big(u(t), v(t)\big)$ は、(6.3), (6.4) の何れか。
iii) B_2 のとき、(6.3), (6.3′), (6.4), (6.4′), (6.5) の何れか。
iv) D_n $(n > 3)$ のとき、$u(t)$ は、(4.8) または

$$(6.6)\qquad u(t) = Ct^{-2} + C't^2 + C''$$

特に、$\wp(t)$ の一方の周期が ∞ の時は、(6.4) は

$$(6.7)\qquad \begin{cases} u(t) = C'_1 \sinh^{-2}\lambda t + C'_2, \\ v(t) = C'_3 \sinh^{-2}\lambda t + C'_4 \sinh^{-2} 2\lambda t \\ \qquad\quad + C'_5 \sinh^2 \lambda t + C'_6 \sinh^2 2\lambda t + C'_7 \end{cases}$$

となり、(6.5) は

$$(6.8)\qquad \begin{cases} u(t) = C'_1 \sinh^{-2}\lambda t + C'_2 \sinh^2 \lambda t + C'_3, \\ v(t) = C'_4 \sinh^{-2}\lambda t + C'_5 \sinh^{-2} 2\lambda t + C'_6 \end{cases}$$

あるいは

$$(6.9)\qquad \begin{cases} u(t) = C'_1 \sinh^{-2}\frac{\lambda}{2}t + C'_2 \sinh^{-2}\lambda t + C'_3, \\ v(t) = C'_4 \sinh^{-2}\lambda t + C'_5 \sinh^2 \lambda t + C'_6 \end{cases}$$

となる。さらに有理函数まで退化した場合は、(6.4) は

$$(6.10)\qquad \begin{cases} u(t) = C'_1 t^{-2} + C'_2, \\ v(t) = C'_3 t^{-2} + C'_4 t^2 + C'_5 t^4 + C'_6 t^6 + C'_7 \end{cases}$$

となり、(6.5) は

(6.11)
$$\begin{cases} u(t) = C_1' t^{-2} + C_2' t^2 + C_3', \\ v(t) = C_4' t^{-2} + C_5' t^2 + C_6' \end{cases}$$

となる。

求めたポテンシャルの一変数の analogy を考え、どのような常微分方程式が出てくるか考察してみよう。そこで最も一般の

(6.12)
$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{C_4\wp(t)^4 + C_3\wp(t)^3 + C_2\wp(t)^2 + C_1\wp(t) + C_0}{\wp'(t)^2} y = 0.$$

を考える。(2.8) より

$$\begin{aligned} \wp'' &= 6\wp^2 - \frac{g_2}{2} \\ &= 2\{(\wp - e_2)(\wp - e_3) + (\wp - e_3)(\wp - e_1) + (\wp - e_1)(\wp - e_2)\}, \end{aligned}$$
$$\frac{\wp''}{[\wp']^2} = \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{\wp - e_1} + \frac{1}{\wp - e_2} + \frac{1}{\wp - e_3}\Big).$$

を得るので $x = \wp(t)$ と置くと $\frac{d}{dt} = \wp'(t)\frac{d}{dx}$ であり

(6.13)
$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} &= [\wp']^2 \frac{d^2}{dx^2} + \wp'' \frac{d}{dx} \\ &= [\wp']^2 \Big\{ \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{\wp - e_1} + \frac{1}{\wp - e_2} + \frac{1}{\wp - e_3}\Big)\Big\} \end{aligned}$$

となる。よって、(6.12) は

(6.14)
$$\begin{aligned} \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{x - e_1} + \frac{1}{x - e_2} + \frac{1}{x - e_3}\Big)\frac{dy}{dx} \\ + \frac{C_4x^4 + C_3x^3 + C_2x^2 + C_1x + C_0}{16(x - e_1)^2(x - e_2)^2(x - e_3)^2} y = 0 \end{aligned}$$

に変換される。

特に、$e_1 \neq e_2 \neq e_3 \neq e_1$ の場合は、

(6.15)
$$B_1 + B_2 + B_3 = 0$$

を満たす複素数 $A_1,\ A_2,\ A_3,\ B_1,\ B_2,\ B_3$によって

$$(6.16)\quad \frac{d^2y}{dx^2}+\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{x-e_1}+\frac{1}{x-e_2}+\frac{1}{x-e_3}\Big)\frac{dy}{dx}$$
$$+\Big(\frac{A_1}{(x-e_1)^2}+\frac{A_2}{(x-e_2)^2}+\frac{A_3}{(x-e_3)^2}+\frac{B_1}{x-e_1}+\frac{B_2}{x-e_2}+\frac{B_3}{x-e_3}\Big)y=0$$

と表せる。これは $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ 上の $e_1,\ e_2,\ e_3,\ \infty$ の 4 点を確定特異点とする 2 階の Fuchs 型方程式で、Huen の方程式 (cf. [WW]) と同値であり、また逆に、$\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ 上の 4 点に確定特異点もつ Fuchs 型方程式は、簡単な変換で (6.16) の形になり、Fuchs の関係式 (6.15) を満たす。

また

$$-\frac{1}{2}\frac{d^2y}{dt^2}+u(t)y=0$$

は、$u(t)$ が (4.8) の場合は Lamè 方程式に、

$$u(t)=C\sinh^{-2}t+C'\sinh^{-2}2t+C''$$

は Gauss の超幾何微分方程式に、

$$u(t)=C\cosh 2t+C'$$

は変形 Mathieu 方程式に、

$$u(t)=Ct^2+C't^{-2}+C''$$

は Whittaker の微分方程式に、

$$u(t)=C\sinh^{-2}t+C$$

は Legendre の微分方程式に、

$$u(t)=Ct^{-2}+C'$$

は Bessel の微分方程式に対応する。

7. 一意性

「(1.1) の P、すなわちポテンシャル $V(x)$ は、§4 で定義した可換微分作用素系 $\mathbb{C}[P_1,\ldots,P_n]$ を一意に決定するか？」ということに関し、ほぼ肯定的な以下の結論が成立する。

定理 5 ([OS], [Ta]).

i) A_2 で $v(t)=Ct^{-2}+C'$ の形の時を除き、$\mathbb{C}[P_1,\ldots,P_n]$ は、$u(t)$ あるいは $(u(t),v(t))$ から一意に定まる。

ii) $\mathbb{C}[P_1,\ldots,P_n]$ の生成元が総て natural adjoint property を持つように取れるならば、$u(t)$ または $\bigl(u(t),v(t)\bigr)$ から $\mathbb{C}[P_1,\ldots,P_n]$ が一意に定まる。

ii) $V(x)$ が有理函数でないならば、$V(x)$ から $\mathbb{C}[P_1,\ldots,P_n]$ が一意に定まる。

上記において、B_n のときは $\bigl(u(t),v(t)\bigr)$ から $V(t)$ への対応は一意ではないが（t^2 の項の不定性)、$\mathbb{C}[P_1,\ldots,P_n]$ を変えずに P_2 の $\partial_1\partial_1$ の係数を $2u(x_1-x_2)-2u(x_1+x_2)$ となるようにとることができる。定理 5 i), ii) の B_n の場合の一意性は、このようにとった場合の一意性を意味している。

A_2 で $v(t)=t^{-2}$ の場合は、生成元が natural adjoint property を持つようににとれないことがあり、一意性が成り立たない (cf. [Ta]) 。

B_n で生成元が natural adjoint property を持つように取れると仮定しても、$u(t)$ 、$v(t)$ が有理函数ならば、$V(x)$ から $\mathbb{C}[P_1,\ldots,P_n]$ が一意に定まるとは限らない（cf. [OS]）。このことは、P と可換で natural adjoint property を持ち、W 不変で、かつ、最高階が定数係数の微分作用素で、互いに可換でないことがあることを意味している。

定理 6 ([OS]).

i) W-不変な微分作用素 Q が、$[Q,P_j]=0$ $(j=1,\ldots,n)$ を満たせば、$Q\in\mathbb{C}[P_1,\ldots,P_n]$.

ii) $C\in\mathbb{C}^n$ に対し $\tau_C(x)=x+C$ とおく。一次独立な $C_1,\ldots,C_n\in\mathbb{C}^n$ で、$V(x)$ が τ_{C_j} 不変となるようなものが存在したとする $(j=1,\ldots,n)$ 。

微分作用素 Q がτ_{C_j}不変で $(j=1,\dots,n)$、$[Q,P]=0$ を満たすならば、$[Q,P_j]=0$ $(j=1,\dots,n)$ が成立する。

8. 高階積分

定理 7.

i) 定理 4 の任意の u または (u,v) に対し、(6.6) の場合以外は、可換な微分作用素系 $\mathbb{C}[P_1,\dots,P_n]$ を具体的に構成できる。したがってこのとき、(1.1) の Pは完全積分可能性である。

ii) $x_j \to q_j$, $\sqrt{-1}\partial_j \to p_j$という置き換え（古典極限）で、$P$に対応する力学系の Hamiltonian

$$H(p,q)=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}p_j^2+V(q) \tag{7.1}$$

は完全積分可能になり、具体的に与えた高階積分 P_jに対応する函数を $\bar{P}_j(p,q)$ と置くと

$$\{H,\bar{P}_j\}=\{\bar{P}_i,\bar{P}_j\}=0 \quad \text{for } 1\le i\le j\le n \tag{7.2}$$

が満たされる。但し、$\{\ ,\}$ は Poisson の括弧式で

$$\{f,g\}=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_i}-\frac{\partial g}{\partial p_i}\frac{\partial f}{\partial q_i}\right) \tag{7.3}$$

で与えられる。

A_nのときは、高階の積分 P_kは

$$\begin{aligned}P_k=\sum_{0\le j\le[\frac{k}{2}]}\frac{1}{2^j j!(k-2j)!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\sigma\Big(&u(x_1-x_2)u(x_3-x_4)\\ &\cdots u(x_{2j-1}-x_{2j})\partial_{2j+1}\partial_{2j+2}\cdots\partial_k\Big)\end{aligned} \tag{7.4}$$

で与えられる (cf. [OP2], [OS]) 。

B_n で最も一般の (6.4) の場合で、基本周期が有限の場合は

$$u(t) = C_5\wp(t), \quad v(t) = \sum_{j=1}^{4} C_j\wp(t+\omega_j) - \frac{C_0}{2} \tag{7.5}$$

$C_0, \ldots, C_5 \in \mathbb{C}$, $\omega_3 = -(\omega_1+\omega_2)$, $\omega_4 = 0$ と置くことができる。このときの P_k は以下のようにして与えられる (cf. [O]) 。

$$P_n(C_0) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!(n-k)!} \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \sigma\Big(q_{\{1,\ldots,k\}}\Delta^2_{\{k+1,\ldots,n\}}\Big) \tag{7.6}$$

を

$$\Delta_{\{1,\ldots,k\}} = \sum_{0\le j\le[\frac{k}{2}]} \frac{1}{2^k j!(k-2j)!} \sum_{w\in W(B_k)} \varepsilon(w)w\Big(u(x_1-x_2)$$
$$u(x_3-x_4)\cdots u(x_{2j-1}-x_{2j})\partial_{2j+1}\partial_{2j+2}\cdots\partial_k\Big),$$
$$q_{\{1,\ldots,k\}} = \sum_{I_1\amalg\cdots\amalg I_\nu=\{1,\ldots,k\}} T_{I_1}\cdots T_{I_\nu}, \quad q_\varnothing = 1,$$
$$T_{\{1,\ldots,k\}} = (-C_5)^{k-1}\Big(\frac{C_0}{2}T^0_{\{1,\ldots,k\}}(1) - \sum_{j=1}^{4} C_j T^0_{\{1,\ldots,k\}}(\wp(t+\omega_j))\Big),$$
$$T^0_{\{1,\ldots,k\}}(\psi) = \sum_{I_1\amalg\cdots\amalg I_\nu=\{1,\ldots,k\}} (-1)^{\nu-1}(\nu-1)!S_{I_1}(\psi)\cdots S_{I_\nu}(\psi),$$
$$S_{\{1,\ldots,k\}}(\psi) = \sum_{w\in W(B_k)} w\Big(\psi(x_1)\wp(x_1-x_2)\wp(x_2-x_3)\cdots\wp(x_{k-1}-x_k)\Big)$$

により定義する。

ここで $W(B_k)$, $W(D_k)$ は B_k 型、D_k 型 Weyl 群でその元を $\mathbb{R}^k$ の座標変換と見なしている。また、$w \in W(B_k)$ に対し、$w \in W(D_k)$ のとき $\varepsilon(w) = 1$ 、それ以外では -1 と置いた。また、$I_1, \ldots, I_\nu$ の和は $\{1,\ldots,k\}$ の全分割を渡り、$\sigma \in \mathfrak{S}_n$, $k = \#I$, $\sigma(\{1,\ldots,k\}) = I$ によって $\Delta_I = \sigma(\Delta_{\{1,\ldots,k\}})$ と定義した。

$P_n(C_0)$ を C_0 の多項式とみたときの C_0^{n-j} の係数として P_j が与えられ、とくに

$$[P_n(C_0), P_n(C_0')] = 0 \tag{7.7}$$

が成立する。

D_n $(n>3)$ で、(4.8) の場合は、上の B_nでの構成で $C_1=C_2=C_3=C_4=0$ と置くことにより P_k $(k=1,\ldots,n-1)$ が得られ、さらに、$P_n=\Delta_n$である。

B_n で (6.4) の場合で、かつ$\wp(t)$ の基本周期が有限の場合は、上記 B_n から極限操作によって P_kが求まる。(6.8) や (6.10) の場合の具体型は[O]にある。

B_n で (6.3) の場合の $\mathbb{C}[P_1,\ldots,P_n]$ は、$\mathbb{C}[-\frac{1}{2}p_1^2+v(x_1),\ldots,-\frac{1}{2}p_n^2+v(x_n)]$ の W不変元の全体である。

D_nで、(6.6) の場合は、条件を満たす $P_1,\ldots,P_n$が存在するとは限らない。

B_2の他の例は[OS], [OO] を参照して下さい。

B_nで (6.4) の場合の構成において重要なのは次の補題である。

補題 8． (7.4) 以下の表記において

$$\text{(7.8)}\quad \begin{cases} T_{\{1\}} &= -2v_1, \\ \partial_k T_{\{1,\ldots,k\}} &= \displaystyle\sum_{j=1}^{k-1}\Big(2T_{\{1,\ldots,k-1\}}\partial_j\psi_{jk}+(\partial_j T_{\{1,\ldots,k-1\}})\psi_{jk}\Big) \\ & \qquad \text{for} \quad k=2,\ldots,n. \end{cases}$$

が満たされるなら$[P_n,P]=\{\bar{P}_n,\bar{P}\}=0.$ が成立する。

この函数微分方程式 (7.8) を解くことにより、$T_{\{1,\ldots,k\}}$を求めることができる (cf. [O]) 。

9. 分解する場合

今まで調べてきた完全積分可能量子系は、帯球函数の言葉で言えば極小放物型部分に対する球函数、すなわち、主系列表現に対する球函数の満たす微分方程式にあたるものである。一般の放物型部分群、すなわち、退化系列表現に対応する帯球函数は、より多くの微分方程式を満たす。それは、可換な微分作用素から決まる微分方程式系が、対応する退化したパラメータのとき可約なことを意味する。

退化した場合の微分方程式を定義する微分作用素は互いに可換とは限らないが、それを一般化することにより、より広い枠組みで超幾何微分作用素を捕らえることができる可能性がある。

ここでは、B_2の場合に、分解する例を挙げるに止める。

補題９． (2.1) の Pに対し

$$[P,Q]=\lambda(x)Q \tag{9.1}$$

を満たす微分作用素Qと函数$\lambda(x)$が存在したとする。このとき$[P,{}^tQQ]=0$ が成立する。

実際 $[P,{}^tQQ]=[P,{}^tQ]Q+{}^tQ[P,Q]=-{}^t[P,Q]Q+{}^tQ[P,Q]=0$ となる。

命題１０． WはB_2型とする。Pは (1.1) の形であり

$$Q=\partial_1\partial_2+a_1(x_1,x_2)\partial_1+a_2(x_1,x_2)\partial_2+b(x_1,x_2) \tag{9.2}$$

は (9.2) を満たし、さらに

$$g(P)=P,\ g(Q)=\varepsilon(g)Q\quad for\quad g\in W(B_2)$$

とする。ただし、ε は、$g(x_1x_2)=\varepsilon(x_1x_2)$ となる $W(B_2)$ の 1 次元表現とする。このための必要十分条件は $c_2c_4=c_3c_4=0$ を満たす複素数 $c_1,\ldots,c_6$によって

$$\begin{aligned}
a(t)&=\frac{c_1(\wp(t)-e_1)(\wp(t)-e_2)+c_2\wp(t)+c_3}{\wp'(t)},\\
u(t)&=c_4\frac{(\wp(\frac{t}{2})-e_3)^2}{\wp'(\frac{t}{2})^2}+c_5\wp(t)+c_6,\\
w(t)&=a'(t)-a^2(t),\\
R(x_1,x_2)&=u(x_1+x_2)+u(x_1-x_2)+w(x_1)+w(x_2),\\
a_0(x_1,x_2)&=a(x_1)a(x_2)+\frac{1}{2}\big(u(x_1+x_2)-u(x_1-x_2)\big),\\
a_1(x_1,x_2)&=a(x_2),\\
a_2(x_1,x_2)&=a(x_1),\\
b(x_1,x_2)&=2a'(x_1)+2a'(x_2)
\end{aligned}$$

となることである。

たとえば、$\wp(t)$ の周期が有限で、$c_4 = 0$ の場合は

$$
\begin{aligned}
a(t) &= \sum_{j=1}^{3} \frac{1}{2} C_j \frac{\wp'(t)}{\wp(t) - e_j}, \\
u(t) &= c_5 \wp(t) + c_6, \\
w(t) &= - \sum_{j=1}^{4} (C_j + C_j^2) \wp(t + \omega_j) \\
&\quad - (C_1^2 - 2C_2C_3)e_1 - (C_2^2 - 2C_3C_1)e_2 - (C_3^2 - 2C_1C_2)e_3, \\
C_4 &= -(C_1 + C_2 + C_3).
\end{aligned}
$$

と表せる。また、$\wp(t)$ の一方の周期のみが有限で、$c_4 = 0$ の場合は

$$
\begin{aligned}
a(t) &= C_1 \coth \lambda t + C_2 \tanh \lambda t + C_3 \sinh 2\lambda t, \\
u(t) &= C_4 \sinh^{-2} \lambda t + C_5, \\
w(t) &= -(C_1\lambda + C_1^2) \sinh^{-2} \lambda t + (C_2 \lambda + C_2^2) \cosh^{-2} \lambda t \\
&\quad + 2(C_3\lambda - C_1C_3 - C_2C_3) \cosh 2\lambda t - C_3^2 \cosh^2 2\lambda t \\
&\quad - (C_1^2 + C_2^2 - C_3^2 + 2C_1C_2 + 2C_1C_3 - 2C_2C_3).
\end{aligned}
$$

と表せる。

References

[BP] V. M. Buchstaber and A. M. Perelomov, *On the functional equation related to the quantum many-body problem*, preprint.

[Ca] F. Calogero, *Solution of the one-dimensional n-body problem with quadratic and/or inversely quadratic pair potentials*, J. Math. Phys. **12** (1971), 419-436.

[Ch] I. Cherednik, *Elliptic quantum many-body problem and double affine Knizhnik-Zamolodchikov equation*, preprint (1994).

[D] A. Debiard, *Systèm différentiel hypergeómétrique et parties radiales des espaces symétriques de type BC_p*, Springer Lecture Notes in Math. **1296** (1988), 42-124.

[Et] P. I. Etingof, *Quantum integrable systems and representations of Lie algebras*, preprint (1993).

[H1] G. J. Heckman, *Root system and hypergeometric functions II*, Comp. Math. **64** (1987), 353-373.

[H2] ———, *An elementary approach to the hypergeometric shift operators of Opdam*, Invent. Math. **103** (1991), 341-350.

[HC] Harish-Chandra, *Representations of semisimple Lie groups IV*, Amer. J. Math. **77** (1955), 743-777.

[HO] G. J. Heckman and E. M. Opdam, *Root system and hypergeometric functions I*, Comp. Math. **64** (1987), 329-352.

[I] V. I. Inozemtsev, *Finite Toda lattice*, Commun. Math. Phys. **121** (1989), 629–638.

[M] J. Moser, *Three integrable Hamiltonian systems connected with isospectral deformations*, Adv. Math **16** (1975), 197-220.

[OO] H. Ochiai and T. Oshima, *Commuting differential operators of type* B_2, preprint, 1994, UTMS 94–65, Dept. of Mathematical Science, University of Tokyo.

[OOS] H. Ochiai, T. Oshima and H. Sekiguchi, *Commuting families of symmetric differential operators*, Proc. Japan Acad. **70 A** (1994), 62-66.

[OP1] M. A. Olshanetsky and A. M. Perelomov, *Classical integrable finite dimensional systems related to Lie algebras*, Phys. Rep. **71** (1981), 313-400.

[OP2] ———, *Quantum integrable systems related to Lie algebras*, ibid. **94** (1983), 313-404.

[Op1] E. M. Opdam, *Root system and hypergeometric functions III*, Comp. Math. **67** (1988), 21-49.

[Op2] ———, *Root system and hypergeometric functions IV*, ibid. **67** (1988), 191-209.

[O] T. Oshima, *Completely integrable systems with a symmetry in coordinates*, preprint, 1994, UTMS 94-6, Dept. of Mathematical Sciences, Univ. of Tokyo.

[OS] T. Oshima and H. Sekiguchi, *Commuting families of differential operators invariant under the action of a Weyl group*, preprint, 1993, UTMS 93-43, Dept. of Mathematical Sciences, Univ. of Tokyo.

[P] A. M. Perelomov, *Integrable Systems of Classical Mechanics and Lie Algebras*, Birkhaüser, 1990.

[Sh] ———, *Radial parts of Casimir operators on semisimple symmetric spaces*, RIMS KôkyûRoku **816** (1992), 155-168. (Japanese)

[Sj] J. Sekiguchi, *Zonal spherical functions on some symmetric spaces*, Rubl. RIMS Kyoto Univ. **12 Suppl.** (1977), 455-459.

[Su] B. Sutherland, *Exact results for a quantum many-body problem in one dimension*, Phys. Rev. **A5** (1972), 1372-1376.

[Ta] K. Taniguchi, 東京大学数理科学研究科修士論文 (1994).

[WW] E. T. Whittaker and G. N. Watson, *A Course of Modern Analysis, 4-th ed.*, Cambridge University Press, 1927.