

MINIMAL K -TYPE WHITTAKER FUNCTIONS OF DISCRETE SERIES OF SOME \mathbb{R} -RANK 1 LIE GROUPS

谷口 健二 (Kenji TANIGUCHI)

東京大学数理科学研究科

0. 導入

G を連結半単純 Lie 群、 $G = KAN$ をその岩沢分解、 $\eta : N \rightarrow \mathbb{C}^\times$ を N のユニタリ指標とする。

$$C^\infty(G/N; \eta) := \left\{ \phi : G \xrightarrow{C^\infty} \mathbb{C} ; \phi(gn) = \eta(n)^{-1} \phi(g) \quad (g \in G, n \in N) \right\}$$

という関数空間は左移動により G の表現空間となる。 (π, W) を G の表現としたとき、 (π, W) の $C^\infty(G/N; \eta)$ における実現を (π, W) の Whittaker model という。

Whittaker model を決定することは、 (π, W) から $C^\infty(G/N; \eta)$ への intertwining operator ι を決定することと同値である。

今回の講演では G が $Sp(1, 1), SU(3, 1), SU(4, 1)$ で、 (π, W) がそれらの離散系列表現であるときに、具体的な計算を通じて W の minimal K -type ベクトルの ι による像 (minimal K -type Whittaker 関数と呼ぶ) の explicit な表示を求めたことについて話した。ここでは G が $Sp(1, 1)$ と $SU(n, 1)$ の場合の離散系列表現の minimal K -type Whittaker 関数の explicit な表示について述べさせて頂くことにする。

1. 記号

まず本稿で使う記号をまとめて記述しておく。

G : 連結半単純 Lie 群、中心有限で離散系列表現を持つものとする。

\mathfrak{g} : G の Lie 環。 $\mathfrak{g}_\mathbb{C}$: \mathfrak{g} の複素化。 \mathfrak{g}^* : \mathfrak{g} の双対空間。以下、他の群などについても同様の記法を用いる。

$B(,)$: $\mathfrak{g}_\mathbb{C}$ 上の Killing 形式。

$G = KAN, \mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{a} + \mathfrak{n}$: 岩沢分解。 $M = Z_K(\mathfrak{a})$ 。

θ : \mathfrak{g} の Cartan involution。 $\mathfrak{g}_\mathbb{C}$ 上に複素共役線形に拡張しておく。

$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$: 対応する Cartan 分解。

$\mathfrak{t} \subset \mathfrak{k}$: コンパクト Cartan 部分環。

$\Delta = \Sigma(\mathfrak{t}_\mathbb{C}, \mathfrak{g}_\mathbb{C})$: ルートの集合。

$\mathfrak{g}_\mathbb{C}^\alpha$: $\alpha \in \Delta$ に対応するルート空間。

$\Delta_c = \{\alpha \in \Delta ; \mathfrak{g}_\mathbb{C}^\alpha \subset \mathfrak{t}_\mathbb{C}\}$: コンパクトルートの集合。

$\Delta_n = \Delta - \Delta_c$: ノンコンパクトルートの集合。

$\Delta_c^+ \subset \Delta^+$: それぞれ Δ_c, Δ の positive systems 。

$$\rho = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in \Delta^+} \alpha, \quad \rho_c = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in \Delta_c^+} \alpha$$

$(,)$: Killing 形式より定まる $\mathfrak{t}_c, \mathfrak{t}_c^*$ 上の内積。

\langle, \rangle : ベクトル空間とその双対空間との coupling 。

E_{ij} : (i, j) -成分が 1 で他の成分は 0 である正方行列。

2. Whittaker model の実現方法

まず離散系列表現の基礎知識の復習をしておく。

$\Lambda \in \mathfrak{t}_c^*$ で

(1) $(\Lambda, \alpha) \neq 0$ for any $\alpha \in \Delta$

(2) $\Lambda + \rho$ は K -integral

を満たすものの集合を Ξ_c で表すと、 Δ_c の Weyl 群を W_c として Ξ_c/W_c によって G の離散系列表現は parametrize される。これを G の離散系列表現の Harish-Chandra パラメーターといい、対応する離散系列表現を π_Λ で表す。別の言い方をすれば、 Δ_i^+ ($i = 1, \dots, l$) を Δ_c^+ を含む Δ の positive systems として

$$\Xi_i = \{ \Lambda \in \Xi_c; (\Lambda, \alpha) > 0 \text{ for any } \alpha \in \Delta_i^+ \}$$

と置いたとき、 Ξ_c 上の 1 つの W_c -orbit の中で K -dominant なものを代表元としてとると、 $\Xi_c/W_c = \bigcup_{i=1}^l \Xi_i$ であるので、 $\bigcup_{i=1}^l \Xi_i$ が G の離散系列表現の Harish-Chandra パラメーターの集合となっている。

このとき $\Lambda \in \Xi_i$ に対して

$$\lambda = \Lambda + \rho_i - 2\rho_c$$

(但し $\rho_i = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in \Delta_i^+} \alpha$) とすると、 λ は π_Λ の minimal K -type の highest weight になっている。この λ を π_Λ の Blattner パラメーターという。

η を N のユニタリ指標としたとき、一般に K の有限次元連続表現 (τ, V) に対して

$$C_\tau^\infty(K \backslash G / N; \eta)$$

$$= \left\{ f : G \xrightarrow{C^\infty} \mathbb{C}; f(kgn) = \eta(n)^{-1} \tau(k) f(g) \quad (k \in K, g \in G, n \in N) \right\}$$

という関数空間を考える。

K の \mathfrak{p}_c 上の随伴作用は K の表現となるので、これを $(\text{Ad}, \mathfrak{p}_c)$ と表す。 $\{X_i\}$ を \mathfrak{p} の Killing 形式についての正規直交基底として、

$$\nabla_{\tau, \eta} \phi(g) = \sum_i L_{X_i} \phi(g) \otimes X_i \quad (\phi \in C_\tau^\infty(K \backslash G / N; \eta))$$

(但し $L_{X_i} \phi(g) = \frac{d}{dt} \phi(\exp(-tX_i)g)|_{t=0}$ ($g \in G$)) という微分作用素を考えると、これは $C_r^\infty(K \backslash G/N; \eta)$ から $C_{r \otimes \text{Ad}}^\infty(K \backslash G/N; \eta)$ への写像で、左からの K の作用と可換なものになっている。

(τ_μ, V_μ) で highest weight が μ である K の既約有限次元表現を表す。 λ を G の離散系列表現の Blattner パラメーターで $\Lambda \in \Xi_i$ に対応するものとする、

$$(\tau_\lambda, V_\lambda) \otimes (\text{Ad}, \mathfrak{p}_\mathbb{C}) \simeq (\tau_\lambda^+, V_\lambda^+) \oplus (\tau_\lambda^-, V_\lambda^-)$$

という分解が得られる。但し

$$(\tau_\lambda^\pm, V_\lambda^\pm) = \bigoplus_{\alpha \in \Delta_{i,n}^+} m(\alpha) (\tau_{\lambda \pm \alpha}, V_{\lambda \pm \alpha}) \quad (m(\alpha) = 0, 1)$$

とした。

この分解に即して

$$P : (\tau_\lambda, V_\lambda) \otimes (\text{Ad}, \mathfrak{p}_\mathbb{C}) \longrightarrow (\tau_\lambda^-, V_\lambda^-)$$

という $(\tau_\lambda^-, V_\lambda^-)$ への projection operator P を定め、

$$\mathcal{D}_{\tau_\lambda, \eta} = P \circ \nabla_{\tau_\lambda, \eta} : C_{\tau_\lambda}^\infty(K \backslash G/N; \eta) \longrightarrow C_{\tau_\lambda^-}^\infty(K \backslash G/N; \eta)$$

で作用素 $\mathcal{D}_{\tau_\lambda, \eta}$ を定義する。

定理 ([Y1, Theorem 2.4])

π_Λ^* で π_Λ の反傾表現を表す。 λ が「壁から遠い」とき、つまり任意の $Q \subset \Delta_{i,n}^+$ に対して $\lambda - \sum_{\beta \in Q} \beta$ が Δ_c^+ -dominant であるとき、

$$\text{Hom}_{(\mathfrak{g}_\mathbb{C}, K)}(\pi_\Lambda^*, C^\infty(G/N; \eta)) \simeq \text{Ker } \mathcal{D}_{\tau_\lambda, \eta}$$

という同型が存在する。

更にこの対応

$$\text{Hom}_{(\mathfrak{g}_\mathbb{C}, K)}(\pi_\Lambda^*, C^\infty(G/N; \eta)) \ni \iota \iff F^\iota \in \text{Ker } \mathcal{D}_{\tau_\lambda, \eta}$$

は π_Λ^* の a minimal K -type vector v^* に対して

$$\iota(v^*)(g) = \langle v^*, F^\iota(g) \rangle \quad (g \in G)$$

で与えられる。

この方法を用いて、 $G = Sp(1, 1)$ と $G = SU(n, 1)$ の minimal K -type Whittaker 関数を求める。

以下 \mathbb{R} -rank 1 の群を扱うので、この場合の計算が少し簡素化されることを説明しておく。

G が \mathbb{R} -rank 1 の群の時、 \mathfrak{a}^* の基底として適当な $f \in \mathfrak{a}^*$ を定めておくと、 $\Sigma^+ = \Sigma^+(\mathfrak{a}, \mathfrak{g}) = \{f\}$ または $\{f, 2f\}$ と表される。 $\mathfrak{n}_{\mathbb{C}}$ には

$$(X, Y) = -B(X, \theta Y) \quad (X, Y \in \mathfrak{n}_{\mathbb{C}})$$

により内積が入る。これにより $\mathfrak{n}_{\mathbb{C}}$ と $\mathfrak{n}_{\mathbb{C}}^*$ を同一視する。また N のユニタリ指標の集合 \hat{N} と $\sqrt{-1}\mathfrak{g}_f^*$ は

$$\eta(\exp X) = \exp(\langle \sqrt{-1}\xi, X \rangle) \quad (X \in \mathfrak{n}, \eta \in \hat{N}, \xi \in \mathfrak{g}_f^*)$$

により同一視されるので、この同一視により \hat{N} に内積 $(\ , \)$ を入れることができる。 M の \hat{N} への作用 $\eta \mapsto \eta^m$ ($m \in M$) を $\eta^m(n) = \eta(m^{-1}nm)$ ($n \in N$) で定義すると、

補題

\mathbb{R} -rank $G = 1$ で G は $SL(2, \mathbb{R})$ と同型ではないとき、 M は $S(\hat{N}) = \{\eta \in \hat{N}; (\eta, \eta) = 1\}$ に推移的に作用する。

これより次が得られる。

系

- (1) 任意の $\eta_1, \eta_2 \in S(\hat{N})$ に対して $\eta_1^m = \eta_2$ を満たす $m \in M$ が存在する。
- (2)

$$C^\infty(G/N; \eta) \ni \phi(x) \mapsto \phi^m(x) = \phi(xm) \in C^\infty(G/N; \eta^m)$$

は任意の $m \in M$ に対して G -modules の同型である。

- (3)

$$\text{Hom}_{(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, K)}(\pi_{\Lambda}^*, C^\infty(G/N; \eta)) \simeq \text{Ker } \mathcal{D}_{\tau_{\lambda}, \eta} \ni \phi(x)$$

$$\mapsto \phi^m(x) = \phi(xm) \in \text{Ker } \mathcal{D}_{\tau_{\lambda}, \eta^m} \simeq \text{Hom}_{(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, K)}(\pi_{\Lambda}^*, C^\infty(G/N; \eta^m))$$

は同型である。

よって $\text{Ker } \mathcal{D}_{\tau_{\lambda}, \eta}$ を求めるには「計算し易い」 η の場合について計算すれば十分であることが分かる。

3. $G = Sp(1, 1)$ の場合

まず $Sp(1, 1)$ と $\mathfrak{sp}(1, 1)$ の構造について復習する。

$$J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1_2 \\ -1_2 & 0 \end{pmatrix}, K_{11} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ として、}$$

$$G = Sp(1, 1) = \{g \in SL(4, \mathbb{C}) ; {}^t g J_2 g = J_2, {}^t g K_{11} \bar{g} = K_{11}\}$$

で $Sp(1, 1)$ は定義される。するとそのリー環と極大コンパクト部分群は

$$\mathfrak{sp}(1, 1) = \{X \in \mathfrak{sl}(4, \mathbb{C}); {}^t X J_2 + J_2 X = 0, {}^t X K_{11} + K_{11} \bar{X} = 0\}$$

$$K = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 & 0 & b_1 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & b_2 \\ -\bar{b}_1 & 0 & \bar{a}_1 & 0 \\ 0 & -\bar{b}_2 & 0 & \bar{a}_2 \end{pmatrix}; a_i, b_i \in \mathbb{C}, |a_i|^2 + |b_i|^2 = 1 \right\}$$

$$\simeq SU(2) \times SU(2) = \left\{ \left(\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ -\bar{b}_1 & \bar{a}_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ -\bar{b}_2 & \bar{a}_2 \end{pmatrix} \right) \right\}$$

で表される。以下 K と $SU(2) \times SU(2)$ とを同一視する。

コンパクト Cartan 部分環 \mathfrak{t} を

$$\mathfrak{t} = \{ \sqrt{-1} \text{diag}(x, y, -x, -y) ; x, y \in \mathbb{R} \}$$

とし、 $\mathfrak{t}_{\mathbb{C}}$ の基底を $T_1 = E_{11} - E_{33}$, $T_2 = E_{22} - E_{44}$ で、 $\mathfrak{k}_{\mathbb{C}}$ の基底 $\{e_1, e_2\}$ を $e_i(T_j) = \delta_{ij}$ でそれぞれ定義すると

$$\Delta = \{ \pm 2e_1, \pm 2e_2, \pm e_1 \pm e_2 \}$$

$$\Delta_c = \{ \pm 2e_1, \pm 2e_2 \}$$

となる。 $\Delta_c^+ = \{2e_1, 2e_2\}$ とすると、これを含む Δ の positive systems は

$$\Delta_1 = \{2e_1, 2e_2, e_1 + e_2, e_1 - e_2\}$$

$$\Delta_2 = \{2e_1, 2e_2, e_1 + e_2, e_2 - e_1\}$$

の2つがあるので、

$$\Xi_1 = \{ \Lambda = \Lambda_1 e_1 + \Lambda_2 e_2 ; \Lambda_1 > \Lambda_2 > 0, \Lambda_i \in \mathbb{Z} \}$$

$$\Xi_2 = \{ \Lambda = \Lambda_1 e_1 + \Lambda_2 e_2 ; \Lambda_2 > \Lambda_1 > 0, \Lambda_i \in \mathbb{Z} \}$$

とおくと、 $\Xi_1 \cup \Xi_2$ が Harish-Chandra パラメーターの集合となり、

$$\lambda = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 = \Lambda - e_2 \quad (\Lambda \in \Xi_1)$$

$$\lambda = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 = \Lambda - e_1 \quad (\Lambda \in \Xi_2)$$

が対応する Blattner パラメーターである。

$$\text{一方 } \mathfrak{p} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & z & 0 & w \\ \bar{z} & 0 & w & 0 \\ 0 & \bar{w} & 0 & -\bar{z} \\ \bar{w} & 0 & -\bar{z} & 0 \end{pmatrix} ; z, w \in \mathbb{C} \right\} \text{ であるので、}$$

$$(\text{Ad}, \mathfrak{p}_{\mathbb{C}}) \simeq (\tau_{e_1+e_2}, V_{e_1+e_2})$$

となり、 $\lambda = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2$ に対して

$$(\tau_{\lambda}, V_{\lambda}) \otimes (\text{Ad}, \mathfrak{p}_{\mathbb{C}})$$

$$\simeq (\tau_{\lambda+e_1+e_2}, V_{\lambda+e_1+e_2}) \oplus (\tau_{\lambda-e_1+e_2}, V_{\lambda-e_1+e_2})$$

$$\oplus (\tau_{\lambda+e_1-e_2}, V_{\lambda+e_1-e_2}) \oplus (\tau_{\lambda-e_1-e_2}, V_{\lambda-e_1-e_2})$$

が成り立つ。また \mathfrak{p} の正規直交基底として

$$\frac{E_{12} - E_{43} + E_{21} - E_{34}}{2\sqrt{6}}, \quad \sqrt{-1} \frac{E_{12} - E_{43} - E_{21} + E_{34}}{2\sqrt{6}},$$

$$\frac{E_{14} + E_{23} + E_{32} + E_{41}}{2\sqrt{6}}, \quad \sqrt{-1} \frac{E_{14} + E_{23} - E_{32} - E_{41}}{2\sqrt{6}}$$

が取れるので、 $\nabla_{\tau_\lambda, \eta}$ の計算にはこれを用いることにする。

$H = E_{14} + E_{23} + E_{32} + E_{41}$ とすると、 $\mathfrak{a} = \mathbb{R}H$ は \mathfrak{p} の極大可換部分空間になり、対応するルート系は $\Sigma(\mathfrak{a}, \mathfrak{g}) = \{\pm 2f\}$ である。但し $f \in \mathfrak{a}^*$ を $f(H) = 1$ で定

めた。 $\Sigma^+(\mathfrak{a}, \mathfrak{g}) = \{2f\}$ とすると $\mathfrak{n} = \mathfrak{g}_{2f}$ の基底を $Y_1 = \sqrt{-1} \begin{pmatrix} 1 & & & -1 \\ & 1 & -1 & \\ & & 1 & -1 \\ 1 & & & -1 \end{pmatrix}$,

$Y_2 = \begin{pmatrix} & 1 & -1 & \\ 1 & & & -1 \\ & & & -1 \\ 1 & & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $Y_3 = \sqrt{-1} \begin{pmatrix} & 1 & -1 & \\ -1 & & & 1 \\ -1 & & & 1 \\ & 1 & -1 & \end{pmatrix}$ と取ることができ、「計

算しやすい」 $\eta \in \hat{N}$ として

$$(*) \quad \eta(\exp(x_1 Y_1 + x_2 Y_2 + x_3 Y_3)) = e^{\sqrt{-1} x_1 \xi} \quad (x_i \in \mathbb{R}, \xi \in \mathbb{R}_{>0})$$

を採用する。更に

$$\mathbb{R}_{>0} \ni a \mapsto \exp((\log a)H) \in A$$

で A に座標系をいれる。よく知られているように、highest weight が $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ である $SU(2)$ (または $SL(2, \mathbb{C})$) の既約有限次元表現の基底として $\{v_k^m\}_{0 \leq k \leq m}$ で

$$\begin{aligned} h v_k^m &= (2k - m) v_k^m \\ x v_k^m &= (m - k) v_{k+1}^m \\ \bar{x} v_k^m &= k v_{k-1}^m \end{aligned}$$

を満たすものが取れる。但し h, x, \bar{x} は $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ の基底で

$$h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \bar{x} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

とした。

$K \simeq SU(2) \times SU(2)$ だから、highest weight が $\lambda = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2$ である K の既約有限次元表現の基底として $\{v_k^{\lambda_1} \boxtimes v_l^{\lambda_2}\}_{\substack{0 \leq k \leq \lambda_1 \\ 0 \leq l \leq \lambda_2}}$ が取れる。これを利用して $\phi \in C_{\tau_\lambda}^\infty(K \backslash G/N; \eta)$ を

$$\phi(g) = \sum_{k=0}^{\lambda_1} \sum_{l=0}^{\lambda_2} c_{kl}(g) v_k^{\lambda_1} \boxtimes v_l^{\lambda_2}$$

と表す。この係数関数 $c_{kl}(g)$ を explicit に求めるのが本節の目的である。

ϕ は左からの K の作用と右からの N の作用が決まっているので、 $G = KAN$ より A への制限で完全に決まる。ゆえに $\phi \in \text{Ker } \mathcal{D}_{\tau_\lambda, \eta}$ を求めるには、 $\mathcal{D}_{\tau_\lambda, \eta}$ の A -radial part を $R(\mathcal{D}_{\tau_\lambda, \eta})$ として、 $\phi|_A \in \text{Ker } R(\mathcal{D}_{\tau_\lambda, \eta})$ を求めれば十分である。

以上の準備のもとで $R(\mathcal{D}_{\tau_\lambda, \eta})\phi(a) = 0$ は次のように表される。

命題(1) $\Lambda \in \Xi_1$ のとき

$$\text{Ker}R(\mathcal{D}_{\tau,\eta})\phi(a) = 0$$

$$\begin{aligned} &\iff (\lambda_1 - k) \left(a \frac{d}{da} - \frac{\xi}{a^2} + 2 - 2l + \lambda_1 + \lambda_2 \right) c_{kl}(a) \\ &\quad - 2(k+1)(l+1)c_{k+1,l+1}(a) = 0 \\ &\quad (k+1) \left(a \frac{d}{da} + \frac{\xi}{a^2} + 2 + 2l + \lambda_1 - \lambda_2 \right) c_{k+1,l}(a) \\ &\quad - 2(\lambda_1 - k)(\lambda_2 + 1 - l)c_{k,l-1}(a) = 0 \\ &\quad (0 \leq k \leq \lambda_1 - 1, 0 \leq l \leq \lambda_2) \end{aligned}$$

但し $c_{k,\lambda_2+1}(a) = c_{k,-1}(a) = 0$ とした。(2) $\Lambda \in \Xi_2$ のとき

$$\text{Ker}R(\mathcal{D}_{\tau,\eta})\phi(a) = 0$$

$$\begin{aligned} &\iff (\lambda_2 - l) \left(a \frac{d}{da} - \frac{\xi}{a^2} + 2 - 2k + \lambda_1 + \lambda_2 \right) c_{kl}(a) \\ &\quad - 2(k+1)(l+1)c_{k+1,l+1}(a) = 0 \\ &\quad (l+1) \left(a \frac{d}{da} + \frac{\xi}{a^2} + 2 + 2k + \lambda_2 - \lambda_1 \right) c_{k,l+1}(a) \\ &\quad - 2(\lambda_1 - k + 1)(\lambda_2 - l)c_{k-1,l}(a) = 0 \\ &\quad (0 \leq k \leq \lambda_1, 0 \leq l \leq \lambda_2 - 1) \end{aligned}$$

但し $c_{\lambda_1+1,l}(a) = c_{-1,l}(a) = 0$ とした。

この方程式系を解くと次の結果を得る。

定理 1(1) N の任意の非退化指標 ζ と $\Lambda \in \Xi_1$ に対し、

$$\dim \text{Hom}_{(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, K)}(\pi_{\Lambda}^*, C^{\infty}(G/N; \zeta)) = 2(\lambda_2 + 1) = 2\Lambda_2$$

(2) N の指標 η を (*) のように定めると、 $\phi(g) = \sum_{k=0}^{\lambda_1} \sum_{l=0}^{\lambda_2} c_{kl}(g) v_k^{\lambda_1} \boxtimes v_l^{\lambda_2}$ は $c_{k0}(a)$ ($\lambda_1 - \lambda_2 \leq k \leq \lambda_1$) と $c_{k\lambda_2}(a)$ ($0 \leq k \leq \lambda_2$) で完全に決定される。

(3) (2) と同じ条件の下で、

$$\begin{aligned} c_{k0}(a) &= c_1 a^{\lambda_2 - \lambda_1 - 2} e^{-\frac{\xi}{2a^2}} \quad (\lambda_1 - \lambda_2 \leq k \leq \lambda_1) \\ c_{k\lambda_2}(a) &= c_1 a^{\lambda_2 - \lambda_1 - 2} e^{\frac{\xi}{2a^2}} \quad (0 \leq k \leq \lambda_2) \end{aligned}$$

と表される。但し c_1, c_2 は任意定数。

証明のスケッチ

先ず前の命題の式より $c_{k,\lambda_2}(a)$ ($0 \leq k \leq \lambda_1 - 1$) と $c_{k,0}(a)$ ($1 \leq k \leq \lambda_1$) はすぐに計算できる。次に、命題の式は $c_{k,l}(a)$ から $c_{k+1,l+1}(a)$ を、または逆に $c_{k+1,l+1}(a)$ から $c_{k,l}(a)$ をそれぞれ与える式であるから、この $c_{k,\lambda_2}(a)$ と $c_{k,0}(a)$ を用いれば全ての $c_{k,l}(a)$ を決定することができる。ところがこのようにして $c_{k,l}(a)$ を決めていくとき、 $c_{k,0}(a)$ ($0 \leq k \leq \lambda_1 - \lambda_2 - 1$) から決まる $c_{k+\lambda_2,\lambda_2}(a)$ は $c_{k+\lambda_2,\lambda_2}(a)$ 自身が満たすべき式を満たさないで、結局 $c_{k,0}(a) = 0$ ($0 \leq k \leq \lambda_1 - \lambda_2 - 1$) であることがわかる。以上により定理が示される。

同様にして $\Lambda \in \Xi_2$ に対しても次の結果が得られる。

定理 2

(1) N の任意の非退化指標 ζ と $\Lambda \in \Xi_2$ に対し、

$$\dim \text{Hom}_{(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, K)}(\pi_{\Lambda}^*, C^{\infty}(G/N; \zeta)) = 2(\lambda_1 + 1) = 2\Lambda_1$$

(2) N の指標 η を (*) のように定めると、 $\phi(g) = \sum_{k=0}^{\lambda_1} \sum_{l=0}^{\lambda_2} c_{kl}(g) v_k^{\lambda_1} \boxtimes v_l^{\lambda_2}$ は $c_{0l}(a)$ ($\lambda_2 - \lambda_1 \leq k \leq \lambda_2$) と $c_{\lambda_1,l}(a)$ ($0 \leq l \leq \lambda_1$) で完全に決定される。

(3) (2) と同じ条件の下で、

$$c_{0l}(a) = c_1 a^{\lambda_1 - \lambda_2 - 2} e^{-\frac{\zeta}{2a^2}} \quad (\lambda_2 - \lambda_1 \leq l \leq \lambda_2)$$

$$c_{\lambda_1,l}(a) = c_1 a^{\lambda_1 - \lambda_2 - 2} e^{\frac{\zeta}{2a^2}} \quad (0 \leq l \leq \lambda_1)$$

と表される。但し c_1, c_2 は任意定数。

4. $G = SU(n, 1)$ の場合

$Sp(1, 1)$ のときと同様に、まず $SU(n, 1)$ の構造を復習する。

$$I_{n,1} = \begin{pmatrix} 1_n & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ として}$$

$$G = SU(n, 1) = \{g \in SL(n+1, \mathbb{C}); {}^t \bar{g} I_{n,1} g = I_{n,1}\}$$

で $SU(n, 1)$ は定義される。このとき \mathfrak{g} と K は

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{su}(n, 1) = \{X \in \mathfrak{sl}(n+1, \mathbb{C}); {}^t \bar{X} I_{n,1} + I_{n,1} X = 0\}$$

$$K = G \cap U(n+1) = \left\{ \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & (\det k)^{-1} \end{pmatrix}; k \in U(n) \right\} \simeq U(n)$$

で表される。以下 K と $U(n)$ を同一視する。

\mathfrak{g} のコンパクト Cartan 部分環 \mathfrak{t} を

$$\mathfrak{t} = \left\{ \sqrt{-1} \text{diag}(a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1}); a_i \in \mathbb{R}, \sum_{i=1}^{n+1} a_i = 0 \right\}$$

で定める。 e_i を

$$e_i(\sqrt{-1}\text{diag}(a_1, \dots, a_{n+1})) = \sqrt{-1}a_i$$

で定義すると、

$$\begin{aligned}\Delta &= \{e_i - e_j; 1 \leq i \neq j \leq n+1\} \\ \Delta_c &= \{e_i - e_j; 1 \leq i \neq j \leq n\}\end{aligned}$$

であるので、

$$\Delta_c^+ = \{e_i - e_j; 1 \leq i < j \leq n\}$$

とすると、これを含む Δ の positive systems は $n+1$ 個あって、それらをその simple roots で表すと

$$\begin{aligned}\Delta_1^+ &\iff \Pi_1 = \{e_{n+1} - e_1, e_1 - e_2, \dots, e_{n-1} - e_n\} \\ \Delta_2^+ &\iff \Pi_2 = \{e_1 - e_{n+1}, e_{n+1} - e_2, \dots, e_{n-1} - e_n\} \\ &\dots \\ \Delta_k^+ &\iff \Pi_k = \{e_1 - e_2, \dots, e_{k-1} - e_{n+1}, e_{n+1} - e_k, \dots, e_{n-1} - e_n\} \\ &\dots \\ \Delta_{n+1}^+ &\iff \Pi_{n+1} = \{e_1 - e_2, \dots, e_{n-1} - e_n, e_n - e_{n+1}\}\end{aligned}$$

と表される。

ここで K のルート系と $U(n)$ のルート系を以下のようにして同一視する。 $u(n)$ の Cartan 部分環 \mathfrak{h} は $\mathfrak{h} = \sqrt{-1} \sum_{i=1}^n \mathbb{R}E_{ii}^{\vee}$ で表される ($E_{ij}^{\vee} = (\delta_{ki}\delta_{lj})_{kl} \in u(n) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$)。 $f_i \in \mathfrak{h}_c^*$ を $f_i(E_{jj}^{\vee}) = \delta_{ij}$ で定めると、 K と $U(n)$ の同一視で f_i に対応する \mathfrak{t}_c^* の元は

$$e'_i = e_i - \frac{1}{n+1} \sum_{j=1}^{n+1} e_j$$

となる。これを用いると

$$\Xi_k = \left\{ \Lambda = \sum_{i=1}^n \Lambda_i e'_i; \Lambda_1 > \dots > \Lambda_{k-1} > 0 > \Lambda_k > \dots > \Lambda_n \ (\Lambda_i \in \mathbb{Z}) \right\}$$

とおいたとき、 $\bigcup_{k=1}^{n+1} \Xi_k$ は Harish-Chandra パラメーターの集合となり、対応する Blattner パラメーターは

$$\begin{aligned}\Xi_k &= \left\{ \lambda = \sum_{i=1}^n \lambda_i e'_i = \sum_{i=1}^{k-1} (\Lambda_i + k + i - n - 1) e'_i + \sum_{i=k}^n (\Lambda_i + k + i - n - 2) e'_i \right. \\ &\quad \left. ; \lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_{k-1} \geq 2k - n - 1, 2k - n - 3 \geq \lambda_k \geq \dots \geq \lambda_n \ (\lambda_i \in \mathbb{Z}) \right\}\end{aligned}$$

と書ける。

一方、 $\mathfrak{p} = \left\{ \sum_{i=1}^n (z_i E_{i,n+1} + \bar{z}_i E_{n+1,i}); z_i \in \mathbb{C} \right\}$ であるから、

$$(\text{Ad}, \mathfrak{p}_{\mathbb{C}}) \simeq (\tau_{2e'_1+e'_2+\dots+e'_n}, V_{2e'_1+e'_2+\dots+e'_n}) \oplus (\tau_{-e'_1-\dots-e'_{n-1}-2e'_n}, V_{-e'_1-\dots-e'_{n-1}-2e'_n})$$

が成り立つ。よって K の highest weight $\lambda = \sum_{i=1}^n \lambda_i e'_i$ に対して

$$(\tau_{\lambda}, V_{\lambda}) \otimes (\text{Ad}, \mathfrak{p}_{\mathbb{C}}) \simeq \bigoplus_{i=1}^n (\tau_k^+, V_k^+) \oplus \bigoplus_{i=1}^n (\tau_k^-, V_k^-)$$

と既約分解される。但し、

$$(\tau_k^{\pm}, V_k^{\pm}) = (\tau_{\lambda \pm e_1 \pm \dots \pm e_{k-1} \pm 2e_k \pm \dots \pm e_n}, V_{\lambda \pm e_1 \pm \dots \pm e_{k-1} \pm 2e_k \pm \dots \pm e_n})$$

とした。

一方、 $\frac{E_{i,n+1}+E_{n+1,i}}{2\sqrt{n+1}}, \sqrt{-1} \frac{E_{i,n+1}-E_{n+1,i}}{2\sqrt{n+1}}$ ($1 \leq i \leq n$) を \mathfrak{p} の正規直交基底として採用することができるので、これを $\nabla_{\tau, \eta}$ の計算に用いる。

$H = E_{n,n+1} + E_{n+1,n}$ とすると、 $\mathbb{R}H = \mathfrak{a}$ は \mathfrak{p} の極大可換部分空間で、 $f \in \mathfrak{a}^*$ を $f(H) = 1$ で定義すると、 $\Sigma(\mathfrak{a}, \mathfrak{g}) = \{\pm f, \pm 2f\}$ であるので、 $\Sigma^+(\mathfrak{a}, \mathfrak{g}) = \{f, 2f\}$ とすると、 \mathfrak{g}_f の基底として

$$X_i = E_{in} - E_{i,n+1} - E_{ni} - E_{n+1,i} \quad (1 \leq i \leq n-1)$$

$$Y_i = \sqrt{-1}(E_{in} - E_{i,n+1} + E_{ni} + E_{n+1,i}) \quad (1 \leq i \leq n-1)$$

が、また \mathfrak{g}_{2f} の基底として

$$W = \sqrt{-1}(E_{nn} - E_{n,n+1} + E_{n+1,n} - E_{n+1,n+1})$$

が、それぞれとれる。

ここで「計算しやすい」 $\eta \in \hat{N}$ として

$$(**) \quad \eta \left(\exp \left(\sum_{i=1}^{n-1} (x_i X_i + y_i Y_i) + w W \right) \right) = e^{\sqrt{-1} x_{n-1} \xi} \quad (x_i, y_i, w \in \mathbb{R}, \xi \in \mathbb{R}_{>0})$$

となるものを取り、 A の座標として

$$\mathbb{R}_{>0} \ni a \mapsto \exp((\log a)H) \in A$$

を採用する。

$K \simeq U(n)$ だから highest weight が $\mu = \sum_{i=1}^n \mu_i e'_i$ ($\mu_i \in \mathbb{Z}, \mu_i \geq \mu_{i+1}$) である K の既約有限次元表現 (τ_{μ}, V_{μ}) の基底として Gel'fand-Zetlin 基底 $GZ(\mu) = \{Q\}$ を用いる。

ここで $u(n)$ の、よって $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ の Gel'fand-Zetlin 基底の説明をしておく。

highest weight が $\mu = \sum_{i=1}^n \mu_i e_i'$ である K の既約有限次元表現 V_μ に対して、

$$Q = (q_{ij}) = \begin{pmatrix} q_{1,n} & q_{2,n} & \cdots & q_{n-1,n} & q_{n,n} \\ & q_{1,n-1} & q_{2,n-1} & \cdots & q_{n-1,n-1} \\ & & \cdots & & \\ & & & \cdots & \\ & & & & q_{1,2} & q_{2,2} \\ & & & & & q_{1,1} \end{pmatrix}$$

という形の図形で

$$\begin{cases} q_{i,j} - q_{i,j-1} \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \\ q_{i,j-1} - q_{i+1,j} \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \\ q_{i,n} = \mu_i \quad (1 \leq i \leq n) \end{cases}$$

をみたすものの集合を $GZ(\mu)$ で表すと、これは V_μ の基底をなす。 $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ の元 E_{ij} の作用は、

$$E_{j,j+1}Q = \sum_{i=1}^j a_{i,j}(Q) \sigma_{i,j}Q$$

$$E_{j+1,j}Q = \sum_{i=1}^j b_{i,j}(Q) \tau_{i,j}Q$$

$$E_{jj}Q = \left(\sum_{i=1}^j q_{i,j} - \sum_{i=1}^{j-1} q_{i,j-1} \right) Q$$

で与えられる。但し

$$a_{i,j}(Q) = \sqrt{\frac{\prod_{k=1}^{j+1} (q_{k,j+1} - q_{i,j} - k + i) \prod_{k=1}^{j-1} (q_{k,j-1} - q_{i,j} - k + i - 1)}{\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^j (q_{k,j} - q_{i,j} - k + i) \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^j (q_{k,j} - q_{i,j} - k + i - 1)}}$$

$$b_{i,j}(Q) = \sqrt{\frac{\prod_{k=1}^{j+1} (q_{k,j+1} - q_{i,j} - k + i + 1) \prod_{k=1}^{j-1} (q_{k,j-1} - q_{i,j} - k + i)}{\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^j (q_{k,j} - q_{i,j} - k + i) \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^j (q_{k,j} - q_{i,j} - k + i + 1)}}$$

σ_{ij} : Q の $q_{i,j}$ を $q_{i,j} + 1$ にしたもの

τ_{ij} : Q の $q_{i,j}$ を $q_{i,j} - 1$ にしたもの

とした。一般の $E_{k,l}$ の作用は、 $E_{k,l}$ が $E_{i,i+1}$ または $E_{i+1,i}$ たちの括弧積で表されることを使えば計算することができる。

これを用いて $\phi \in C^\infty(K \backslash G/N; \eta)$ を

$$\phi(g) = \sum_{Q \in GZ(\lambda)} c(Q; g)Q$$

と表す。 $Sp(1, 1)$ のときと同様にして $\phi(g) \in \text{Ker } \mathcal{D}_{\tau_\lambda, \eta}$ を決定するには $\phi|_A \in \text{Ker } R(\mathcal{D}_{\tau_\lambda, \eta})$ を求めれば十分である。

$V_\lambda \otimes \text{Ad}$ から V_k^\pm への射影作用素を P_k^\pm で表し、 V_λ を $U(n+1)$ の、 highest weight が $\tilde{\lambda} = (\lambda_1 + 1)e_1 + \sum_{i=2}^{n+1} \lambda_i e_{i-1}$ (resp. $\hat{\lambda} = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i + (\lambda_n - 1)e_{n+1}$) である既約有限次元表現に

$$\begin{aligned} GZ(\lambda) \ni Q \mapsto \tilde{Q} &= \begin{pmatrix} \lambda_1 + 1 & \lambda_1 & \cdots & \lambda_n \\ & Q & & \end{pmatrix} \in GZ(\tilde{\lambda}) \\ \text{(resp. } GZ(\lambda) \ni Q \mapsto \hat{Q} &= \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & \lambda_n & \lambda_n - 1 \\ & & & Q \end{pmatrix} \in GZ(\hat{\lambda})) \end{aligned}$$

となるように埋め込んでおく。

このとき参考文献 [Kr] の方法を用いて計算をすると、

命題

$$P_k^+(\nabla_{\tau_\lambda, \eta} \phi(a)) = 0 \iff$$

$$\begin{aligned} \sum_{Q \in GZ(\lambda)} a_{k,n}(\tilde{Q}) \left\{ \left(a \frac{d}{da} + \sum_{i=1}^n \lambda_i - 2\lambda_k - \sum_{i=1}^{n-1} q_{i,n-1} + 2k - 2 \right) c(Q; a) \sigma_{kn} Q \right. \\ \left. - \frac{\xi}{a} c(Q; a) \sum_{j=1}^{n-1} \frac{a_{j,n-1}(\sigma_{kn} Q)}{\lambda_k - q_{j,n-1} - k + j + 1} \sigma_{j,n-1} \sigma_{kn} Q \right\} = 0 \end{aligned}$$

$$P_k^-(\nabla_{\tau_\lambda, \eta} \phi(a)) = 0 \iff$$

$$\begin{aligned} \sum_{Q \in GZ(\lambda)} b_{k,n}(\hat{Q}) \left\{ \left(a \frac{d}{da} - \sum_{i=1}^n \lambda_i + 2\lambda_k + \sum_{i=1}^{n-1} q_{i,n-1} - 2k + 2n \right) c(Q; a) \tau_{kn} Q \right. \\ \left. + \frac{\xi}{a} c(Q; a) \sum_{j=1}^{n-1} \frac{b_{j,n-1}(\tau_{kn} Q)}{\lambda_k - q_{j,n-1} - k + j} \tau_{j,n-1} \tau_{kn} Q \right\} = 0 \end{aligned}$$

となる。

すると $\lambda \in \Xi_k$ のとき、 $\mathcal{D}_{\lambda, \eta} \phi(g) = 0$ は

$$\begin{aligned} P_1^-(\nabla_{\tau_\lambda, \eta} \phi(g)) &= \cdots = P_{k-1}^-(\nabla_{\tau_\lambda, \eta} \phi(g)) \\ &= P_k^+(\nabla_{\tau_\lambda, \eta} \phi(g)) = \cdots = P_n^+(\nabla_{\tau_\lambda, \eta} \phi(g)) = 0 \end{aligned}$$

と同値であるから、この命題を使って方程式系をたてて、それを解くと、以下のような結果を得る。

定理 3

- (1) N の任意の非退化指標 ζ に対し、 $\Lambda \in \Xi_1$ または $\Lambda \in \Xi_{n+1}$ のとき、
 $\text{Hom}_{(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, K)}(\pi_{\Lambda}^*, C^{\infty}(G/N; \zeta)) = \{0\}$ 。
 (2) N の任意の非退化指標 ζ に対し、 $\Lambda \in \Xi_k$ ($k = 2, 3, \dots, n$) のとき、

$$\begin{aligned} & \dim \text{Hom}_{(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, K)}(\pi_{\Lambda}^*, C^{\infty}(G/N; \zeta)) \\ &= 2 \sum_{\substack{\lambda_1 \geq \mu_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_{k-2} \geq \mu_{k-2} \geq \lambda_{k-1} \\ \lambda_k \geq \mu_{k-1} \geq \lambda_{k+1} \geq \dots \geq \lambda_{n-1} \geq \mu_{n-2} \geq \lambda_n}} \dim V_{n-2}(\mu_1, \dots, \mu_{n-2}) \end{aligned}$$

が成り立つ。但し $V_{n-2}(\mu_1, \dots, \mu_{n-2})$ は highest weight が $(\mu_1, \dots, \mu_{n-2})$ である $U(n-2)$ の既約有限次元表現である。

- (3) N の指標 η を (**) のように定めると、 $\Lambda \in \Xi_k$ ($2 \leq k \leq n$) のとき、
 $\phi \in \text{Ker} D_{\tau_{\lambda}, \eta}$ は

$$\begin{aligned} q_{1, n-1} &= q_{1, n-2}, \dots, q_{k-2, n-1} = q_{k-2, n-2} \\ q_{k-1, n-1} &= \lambda_{k-1} \\ q_{k-1, n-2} &= q_{k, n-1}, \dots, q_{n-2, n-2} = q_{n-1, n-1} \end{aligned}$$

となる Q に対する $c(Q; a)$ ($a \in A$) を決めればすべて決定される。

- (4) (3) の条件をみたす Q に対し、 $c(Q; a)$ は

$$\begin{aligned} c(Q; a) &= a^{-\sum_{q=1}^{k-1} \lambda_q + \sum_{q=k}^n \lambda_q + \sum_{q=1}^{k-2} q_{q, n-1} - \sum_{q=k}^{n-1} q_{q, n-1} - n + \frac{1}{2}} \\ &\times \left\{ c_1(Q) W_{0, \lambda_{k-1} + n - 2k + 2} \left(\frac{2\xi}{a} \right) + c_2(Q) M_{0, \lambda_{k-1} + n - 2k + 2} \left(\frac{2\xi}{a} \right) \right\} \end{aligned}$$

と表される。但し $c_1(Q), c_2(Q)$ は任意定数、 $W_{\alpha, \beta}(t), M_{\alpha, \beta}(t)$ は Whittaker の合流型超幾何関数である。

証明のスケッチ

まず (3) の $q_{i, j}$ の条件の必要性和 (1) は以下のようにして分かる。

前の命題の式を注意深く見てやれば、 $l (\leq n-1)$ に対して $P_l^+(\nabla_{\tau_{\lambda}, \eta} \phi(a)) = 0$ なら、 $q_{l, n-1} = \lambda_l$ となる Q に対して $c(Q; a) = 0$ となることが分かる。これより再び命題の式を繰り返して用いることにより、 $q_{l-1, n-2} > \lambda_l$ となる Q に対して $c(Q; a) = 0$ であることが分かる。同様に、 $l (\geq 2)$ に対して $P_l^-(\nabla_{\tau_{\lambda}, \eta} \phi(a)) = 0$ なら、 $q_{l-1, n-2} < \lambda_l$ となる Q に対して $c(Q; a) = 0$ であることが分かる。よって $\Lambda \in \Xi_k$ のとき、

$$\begin{aligned} P_1^-(\nabla_{\tau_{\lambda}, \eta} \phi(g)) &= \dots = P_{k-1}^-(\nabla_{\tau_{\lambda}, \eta} \phi(g)) \\ &= P_k^+(\nabla_{\tau_{\lambda}, \eta} \phi(g)) = \dots = P_n^+(\nabla_{\tau_{\lambda}, \eta} \phi(g)) = 0 \end{aligned}$$

であるから、まず (1) が示された。更に命題の式には、 Q の $q_{k, n-1}$ についての差分があるので、これを使えば (3) の必要性が分かる。

(4) は前の命題の式で、 $q_{i, j}$ が (3) の条件を満たすような Q に対する $\sigma_{kn} Q$ と $\tau_{kn} Q$ の係数より得られる方程式系を解くことによって得られる。

(3) の十分性と (2) は松本久義氏による Whittaker model の次元と Bernstein degree の関係式 (参考文献 [M] 参照) と、Chang の計算による \mathbb{R} -rank 1 のリー群の離散系列表現の Bernstein degree の公式 ([C] 参照) を使えば得られる。

REFERENCES

- [C] Chang, J-T., *Characteristic cycles of discrete series for \mathbb{R} -rank one groups*, Transactions of the American mathematical society **341** (1994), 603-622.
- [E] Erdélyi, A et al., *Higher Transcendental Functions*, vol. 1, McGraw-Hill, New York, 1953.
- [G-Z] Gel'fand, I.M. and Zetlin, M.L., *Finite-dimensional representations of the group of unimodular matrices*, Dokl. Akad. Nauk SSSR **71** (1950), 825-828.
- [Kr] Kraljević, H., *Representations of the universal covering group of the group $SU(n, 1)$* .
- [K-O] Koseki, H. and Oda, T., *Whittaker functions for the large discrete series representations of $SU(2, 1)$ and related zeta integrals*, preprint.
- [M] Matumoto, H., *Whittaker vectors and the Goodman-Wallach operators*, Acta mathematica **161** (1988), 183-241.
- [O1] Oda, T., *An explicit integral representation of Whittaker functions on $Sp(2, \mathbb{R})$ for the large discrete series representations* (to appear in Tohoku J. Math).
- [O2] ———, *An explicit integral representation of Whittaker functions for the representations of the discrete series —The case of $SU(2, 2)$ —*, preprint.
- [Y1] Yamashita, H., *Embeddings of discrete series into induced representations of semisimple Lie groups, I —General theory and the case of $SU(2, 2)$ —*, Japan J. Math. **16** (1990), 31-95.
- [Y2] ———, *Embeddings of discrete series into induced representations of semisimple Lie groups, II —Generalized Whittaker models for $SU(2, 2)$ —*, J. Math. Kyoto Univ. **31-2** (1991), 543-571.