数理解析研究所講究録
第 895 巻 1995 年 114-124

古典型対称対の量子化と q–直交多項式

野海 正俊 (MASATOSHI NOUMI)
杉谷 哲也 (TETSUYA SUGITANI)

東京大学大学院数理科学研究科

G/K を以下の対称空間、$(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$ を対応するリー環の対とする;

G/K

AI: $SU(n)/SO(n)$

AII: $SU(2n)/Sp(2n)$

AIII: $U(n)/U(l) \times U(n-l)$

BDI: $SO(N)/SO(l) \times SO(N-l)$

CI : $Sp(2n)/U(n)$

CII: $Sp(2n)/Sp(2l) \times Sp(2n-2l)$

DIII: $SO(2n)/U(n)$

これらはいわゆる古典型対称対、即ち古典型既約リーマン対称空間と呼ばれるもののリストである (数学辞典を参照)。

これらの q-deformation である量子対称空間 $(G/K)_q$ を量子群の枠組みに於いて構成するのが我々の問題である。しかもその上の帯球函数として Macdonald 多項式または Koornwinder 多項式が実現される $(G/K)_q$ を導入したい。これまでに AI型で $n = 3$ のときは上野-竹林 [UT]、AI, AII型一般については野海 [N] によって構成されている。rank1 のときは [K1], [K2], [NM], [NYM], [S] を参照。

以下では野海 [N] と同じ formulation の下で $BDI \sim DIII$ の対称空間について議論する ([NS]) ($AIII$型については記号が煩雑になるのを避けるため文中に於いて簡単に触れるにとどめる)。

§0. q-直交多項式

まず以下の記号を固定する;

Σ: root system B_l, C_l, D_l, $BC_l \subset \mathbb{R}^l$

($\mathbb{R}^l$ の canonical basis を $\{\epsilon_j\}$、内積を $\langle \epsilon_i, \epsilon_j \rangle = \delta_{ij}$ で与える。)

Σ^+: positive roots

$P = P(\Sigma)$: integral weights

$W = W(\Sigma)$: Weyl group

$A := \sum_{\lambda \in P} \mathbb{C}x^\lambda \quad x^\lambda = x_1^{\lambda_1} \cdots x_l^{\lambda_l}$

A^W :W-不変部分空間、basis $\{m_\lambda\}$ $\quad m_\lambda = \frac{1}{|W_\lambda|} \sum_{w \in W} x^{w\lambda}$

$\Delta^+ = \prod_{\alpha \in \Sigma^+} \frac{(t_{2\alpha}^{\frac{1}{2}} e^\alpha; q_\alpha)_\infty}{(t_\alpha t_{2\alpha}^{\frac{1}{2}} e^\alpha; q_\alpha)_\infty} \quad e^{\epsilon_j} = x_j$

ただし
$(a;q)_\infty = \prod_{k=0}^{\infty}(1-aq^k)\quad (a,b,c;q)_\infty = (a;q)_\infty(b;q)_\infty(c;q)_\infty$
$q_{\epsilon_i\pm\epsilon_j} = q\ (i<j),\ q_{\epsilon_j} = q,\ q_{2\epsilon_j} = q^2$
$t_\alpha = q_\alpha^{m_\alpha}$: $m_\alpha \geq 0$ s.t. $w\alpha = \beta \Rightarrow m_\alpha = m_\beta\ (^\exists w \in W)$
（上の BC_l のパラメータのとり方は " admissible pair" として (BC_l, B_l) を採用したもの。(BC_l, C_l) については $q_{\epsilon_i\pm\epsilon_j} = q^2\ (i<j)$, $q_{\epsilon_j} = q$, $q_{2\epsilon_j} = q^2$ とする([M2],[K3])。）
Macdonald 多項式とは次で特徴づけられる A^W の basis である（[M2]）。

MACDONALD 多項式.
$^\exists\{P_\lambda\} \in A^W \quad \lambda \in P^+$ basis
(1) $P_\lambda = m_\lambda + \sum_{\mu<\lambda} C_{\lambda\mu} m_\mu$
(2) $D_\sigma P_\lambda = a_\lambda P_\lambda$
ただし記号の意味は以下のとうりである；
$\mu \leqslant \lambda \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \lambda - \mu \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ span Σ^+
$\sigma = \epsilon_1$
$D_\sigma f = \frac{1}{|W_\sigma|}\sum_{w\in W} w(\Phi_\sigma T_\sigma f) \quad f \in A$
$\Phi_\sigma = \frac{T_\sigma(\Delta^+)}{\Delta^+} \quad T_\mu(e^\lambda) = q^{\langle\mu,\lambda\rangle}e^\lambda\ \mu \in P$
$a_\lambda = q^{\langle\sigma,\rho\rangle}\frac{1}{|W_\sigma|}\sum_{w\in W} q^{\langle w\sigma,\lambda+\rho\rangle}$
$\rho = \frac{1}{2}\sum_{\alpha\in\Sigma^+} m_\alpha \alpha$

実は後の結果から推測されることであるが、BC_l 型の対称空間の場合、この Macdonald 多項式より次の Koornwinder が定義した Askey-Wilson 多項式の BC_l型版の方が適当であると考えられる。これは Macdonald の所で Δ^+ のルート ϵ_k, $2\epsilon_k$ に関する部分に次のように real パラメーター a, b, c, d を組み込んだものである。ただし q-差分作用素とそれに伴う固有値は次に換える（[K3]）；

KOORNWINDER 多項式 (Askey-Wilson polynomials for the root system BC).
$\Delta^+ = \prod_{k=1}^{l}\frac{(e^{2\epsilon_k};q)_\infty}{(ae^{\epsilon_k}, be^{\epsilon_k}, ce^{\epsilon_k}, de^{\epsilon_k};q)_\infty}\prod_{\alpha=\epsilon_i\pm\epsilon_j}\frac{(e^\alpha;q)_\infty}{(te^\alpha;q)_\infty}$
$D_\sigma f = \frac{1}{|W_\sigma|}\sum_{w\in W} w(\Phi_\sigma(T_\sigma - 1)f) \quad f \in A$
$a_\lambda = \sum_{j=1}^{l}(q^{-1}abcdt^{2l-j-1}(q^{\lambda_j}-1) + t^{j-1}(q^{-\lambda_j}-1))$

§1. 量子包絡環 $U_q(\mathfrak{g})$ と座標函数環 $A_q(G)$.

最初にも述べたように我々は量子群の枠組みで量子対称空間 $(G/K)_q$ を導入する。そこで、少し舞台設定を行う。
⋆ 量子包絡環 $U_q(\mathfrak{g}) = (U_q(\mathfrak{g}_\mathbb{C}),\ *)$ と L-operators.
$U_q(\mathfrak{g}_\mathbb{C})$ の定義はいろいろな convention が存在するが、ここでは [Lusz], [T] に合わせる。
さて $\mathfrak{g}_\mathbb{C} = \mathfrak{so}_{2n+1}(B_n), \mathfrak{sp}_{2n}(C_n), \mathfrak{so}_{2n}(D_n)$.
V : $N-$dim. vector space $\quad N = \begin{cases} 2n+1 & B_n \\ 2n & C_n,\ D_n \end{cases}$
とするとき、次の $U_q(\mathfrak{g})$ を成分とする $N\times N$ の行列 L^+, L^- が存在する。

Proposition.

$^{\exists}L^+, L^- \in \mathrm{End}_{\mathbf{C}}(V) \otimes U_q(\mathfrak{g})$

s.t. $(\mathrm{id} \otimes \pi_V)(L^+) = R^+$

$(\mathrm{id} \otimes \pi_V)(L^-) = R^{-1}$ π_V standard vector rep.

$\Delta(L^{\pm}_{ij}) = \sum_k L^{\pm}_{ik} \otimes L^{\pm}_{kj}$ and $\varepsilon(L^{\pm}) = \mathrm{id}_V$

commutation relations:

$R^+_{12} L^{\epsilon}_1 L^{\epsilon}_2 = L^{\epsilon}_2 L^{\epsilon}_1 R^+_{12}$ $\epsilon = \pm$

$R^+_{12} L^+_1 L^-_2 = L^-_2 L^+_1 R^+_{12}$

$*$-operation ; cojugate linear,involutive anti-algebra hom.

coalgebra auto. s.t. $(L^{\pm})^* = S(L^{\mp})^t$

ここで π_V は $U_q(\mathfrak{g})$ のベクトル表現で Δ, ε, S は $U_q(\mathfrak{g})$ の comultiplication, counit, antipode である。さらに R は Jimbo's constant R-matrix を表す；

$$R = \sum_{ij} e_{ii} \otimes e_{jj} q^{\delta_{ij} - \delta_{ij'}} + (q - q^{-1}) \sum_{i>j} (e_{ij} \otimes e_{ji} - e_{ij} \otimes e_{i'j'} q^{\rho_i - \rho_j} \kappa_i \kappa_j)$$

$j' := N - j + 1$ $\qquad \in \mathrm{End}_{\mathbf{C}}(V \otimes V)$

$\rho = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in \Sigma^+(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})} \alpha = \sum_{k=1}^n \rho_k \epsilon_k$

B_n, D_n $\kappa_j = 1$

$$C_n \qquad \kappa_j = \begin{cases} 1 & j < j' \\ -1 & j > j' \end{cases}$$

$R^+ := R_{21}$.

この Proposition は universal R-matrix の存在 (quantum double construction) から自動的に導かれる (see e.g. [RTF])。

注意. L^+, L^- はそれぞれ上三角行列、下三角行列であり対角部分には $U_q(\mathfrak{g})$ のトーラス部分、subdiagonal にはそれぞれおよそ Chevalley generator $\{f_j\}$、及び $\{e_j\}$ が現れる。上の Proposition から具体的にベクトル表現を書き下すと次のようになる；

$$\pi_V(L^+_{kk}) = \sum_{j=1}^N e_{jj} q^{\delta_{kj} - \delta_{kj'}}$$

$$\pi_V(L^+_{ij}) = (q - q^{-1})(e_{ji} - e_{i'j'} q^{-\rho_i + \rho_j} \kappa_i \kappa_j) \quad (i < j)$$

$$\pi_V(L^-_{kk}) = \pi_V(L^+_{kk})^{-1}$$

$$\pi_V(L^-_{ij}) = -(q - q^{-1})(e_{ji} - e_{i'j'} q^{\rho_i - \rho_j} \kappa_i \kappa_j) \quad (i > j)$$

$\star$ 座標函数環 $A_q(G)$.

以下 M を有限次元 P_G $(= P \cap (\mathbb{Z}\epsilon_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}\epsilon_n))$- weighted $U_q(\mathfrak{g})$-module とする。すると M は完全可約かつ unitarizable (i.e. $^{\exists}$positive definite, nondegenerate hermitian form $\langle\ ,\ \rangle$: $M \times M \to \mathbb{C}$, s.t. $\langle u, a.v\rangle = \langle a^*.u, v\rangle$ $a \in U_q(\mathfrak{g})$) である。

今、表現 $\pi : U_q(\mathfrak{g}) \xrightarrow{\pi} \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(M)$ に対して、写像 $U_q^\vee \xleftarrow{\pi^t} \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(M)^\vee$ （$^\vee$ は dual の意味）が自然に引き起こされる。そこで $A_q(G) = \sum_{M:\mathrm{irred.}} \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(M)^\vee$ と置くと次の pairing により $A_q(G)$ に Hopf $*$-algebra の構造が誘導される；

pairing of Hopf $*$-algebras

$(\, , \,) : U_q(\mathfrak{g}) \times A_q(G) \longrightarrow \mathbb{C}$

$(a, \varphi\psi) = (\Delta(a), \varphi \otimes \psi), \quad (a, 1) = \varepsilon(a)$

$(a \otimes b, \Delta(\varphi)) = (ab, \varphi), \quad \varepsilon(\varphi) = (1, \varphi)$

$(a, S(\varphi)) = (S(a), \varphi), \ (a, \varphi^*) = \overline{(\tau(a), \varphi)} \quad \tau = * \circ S$

この $A_q(G)$ が G 上の正則函数環の q-アナログである。このとき自然な写像 $A_q(G) \longrightarrow U_q(\mathfrak{g})^\vee$ は単射となる。さらに両側 $U_q(\mathfrak{g})$-module の構造を次で定めると以下の分解が成り立つ；

$$a.\varphi = (\mathrm{id} \otimes (a, \cdot))\Delta(\varphi)$$
$$\varphi.a = ((a, \cdot) \otimes \mathrm{id})\Delta(\varphi)$$

Peter-Weyl decomposition

$$\begin{aligned} A_q(G) &= \oplus_{\lambda \in P_G^+} W(\lambda) \\ W(\lambda) &\simeq V(\lambda)^\vee \otimes V(\lambda) \\ &\simeq V(\lambda)^\circ \otimes V(\lambda) \\ P_G^+ &= P^+ \cap P_G. \end{aligned}$$

即ち $W(\lambda)$ は highest weight λ の既約表現 $V(\lambda)$ の表現行列で張られる $\mathbb{C}$-ベクトル空間で $V(\lambda)^\vee \otimes V(\lambda)$ に同型、しかも unitarizability により $V(\lambda)^\circ \otimes V(\lambda)$ に同型。ただし $V(\lambda)^\circ$ は $V(\lambda)$ を以下のように右 module とみなしたもの；

$V(\lambda)^\circ$: right U_q-module ($= V(\lambda)$ as a set)

$v.a := a^*.v \quad v \in V(\lambda).$

§2. 量子対称空間.

全射な Hopf algebra hom. π_K: $A_q(G) \twoheadrightarrow A_q(K)$ が存在すれば量子対称空間 $(G/K)_q$ 上の座標函数環は

$$A_q(G/K) = \{\phi \in A_q(G) \ ; \ (\mathrm{id} \otimes \pi_K \circ \Delta(\phi) = \phi \otimes 1\} = \text{“}A((G/K)_q)\text{”}$$

でこしらえることができる (see e.g. [NYM])。しかしこのような “部分群” $A_q(K)$ は環 $A_q(G)$ が “かたい” 為、見つけられる場合が限られている。むしろ包絡環 $U_q(\mathfrak{g})$ の中にリー環 $\mathfrak{k}$ の対応物を考える方が “部分群 ” の自由度が大きい。

今、行列 $J \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$ に対して

$$M = L^+ - JS(L^-)^t J^{-1} \quad \in \mathrm{End}(V) \otimes U_q(\mathfrak{g})$$

と置いて、さらにこの行列成分で張られる $U_q(\mathfrak{g})$ の $\mathbb{C}$-線型部分空間を $\mathfrak{k}_q$ と置く。$\mathfrak{k}_q$ は自動的に coideal になる（即ち, $\Delta(\mathfrak{k}_q) \subset \mathfrak{k}_q \otimes U_q + U_q \otimes \mathfrak{k}_q$, $\varepsilon(\mathfrak{k}_q) = 0$ ）。また、この行列 J に対して対応する２次のテンソルを $w_J = \sum_{ij} v_i J_{ij} \otimes v_j$ （ $\{v_j\}$ canonical basis in V.) とおくと、$\mathfrak{k}_q.w_J = 0$ となるのは J が反射関係式 (reflection equation) $R_{12}^{+}J_2R_{12}^{+\,t_2}J_1 = J_1R_{12}^{+\,t_2}J_2R_{12}^{+}$ を満たす時に限ることもわかる ($J_1 = J\otimes\mathrm{id}$, $J_2 = \mathrm{id}\otimes J$, t_2 は第2成分に関する転置)。

従って反射関係式の解 J で決まる coideal $\mathfrak{k}_q$ は w_J に対応する2次形式を不変にする G 中の部分群 K のリー環の q-アナログになっていることが期待される。

実際に最初に掲げたリストについてはすべて対応する反射関係式の解が見つかっている ([NS]);

(1) BDI: $SO(N)/SO(l)\times SO(N-l)$ $(l\le[\frac{N}{2}])$

$$J=\sum_{1\le j,j'\le l}e_{jj}a_j+\sum_{l<j<l'}e_{jj'}q^{-\rho_j}+\sum_{j=1}^{l}e_{jj'}(1-q^{2\rho_l})q^{-\rho_j}$$

s.t. $a_1a_{1'}=\cdots=a_la_{l'}=q^{2\rho_l}$.

(2) CI: $Sp(2n)/U(n)$

$$J=\sum_{k=1}^{n}e_{kk}a_k$$

s.t. $a_1a_{1'}=\cdots=a_na_{n'}$.

(3) CII: $Sp(2n)/Sp(2l)\times Sp(2n-2l)$ $(l\le[\frac{n}{2}])$

$$\begin{aligned}J=&\sum_{k=1}^{l}(-e_{2k,2k-1}a_{2k-1}+e_{2k-1,2k}a_{2k}-e_{(2k-1)'(2k)'}a_{(2k)'}+e_{(2k)'(2k-1)'}a_{(2k-1)'})\\&+\sum_{2l<j\le n}e_{jj'}q^{-\rho_j}-\sum_{2l<j\le n}e_{j'j}q^{\rho_j}+\sum_{j=1}^{2l}e_{jj'}(1-q^{2\rho_{2l}-2})q^{-\rho_j}\end{aligned}$$

s.t. $a_{2k-1}=qa_{2k}$, $a_{(2k)'}=qa_{(2k-1)'}$ $(1\le k\le l)$, $a_1a_{1'}=\cdots=a_{2l}a_{(2l)'}=-q^{2\rho_{2l}-2}$.

(4) DIII: $SO(2n)/U(n)$

$$\begin{aligned}J=&\sum_{k=1}^{l}(-e_{2k,2k-1}a_{2k-1}+e_{2k-1,2k}a_{2k}-e_{(2k-1)'(2k)'}a_{(2k)'}+e_{(2k)'(2k-1)'}a_{(2k-1)'})\\&\qquad(n=2l\text{ のとき})\\=&\sum_{k=1}^{l}(-e_{2k,2k-1}a_{2k-1}+e_{2k-1,2k}a_{2k}-e_{(2k-1)'(2k)'}a_{(2k)'}+e_{(2k)'(2k-1)'}a_{(2k-1)'})\\&-e_{n'n}a_n+e_{nn'}a_{n'}\quad(n=2l+1\text{ のとき})\end{aligned}$$

s.t. $a_{2k-1}=qa_{2k}$, $a_{(2k)'}=qa_{(2k-1)'}$ $(1\le k\le l)$, $a_1a_{1'}=\cdots=a_na_{n'}$, $a_n=a_{n'}$ $(n=2l+1)$.

ここで e_{ij} は行列単位、a_k 達は0でない実のパラメーター。

注意: 例えば (2) と (4) に関しては $Sp(2n)\cap SO(2n)\approx U(n)$ (位相同型) であることを念頭に置けば納得されるであろう。$AIII$ 型については coideal の形と、$V^*\otimes V$ 型の反射関係式を考えるところが異なる。

この $\mathfrak{k}$ の対応物を用いて

$$A_q(G/K)=\{\varphi\in A_q(G)\ :\ \mathfrak{k}_q.\varphi=0\}$$

とおくと、$\mathfrak{k}_q$ が coideal であることより $A_q(G)$ の部分環になる。しかもパラメーター $\{a_k\}$ を特殊化すると $*$-subalgebra にもなる。これを $(G/K)_q$ の座標函数環とみなす。

$A_q(G/K)$ については右 $U_q(\mathfrak{g})$-module として multiplicity free に既約分解する；

$$A_q(G/K) \simeq \bigoplus_{\lambda \in P_{\mathfrak{k}}^+} V(\lambda)^\circ$$

ただし $P_{\mathfrak{k}}^+$ は $\lambda \in P_G^+$ で次の条件を満たすものの集合である；

BI: $(\lambda, \alpha_k^\vee) \in 2\mathbb{Z}\ (1 \leq k < l), \quad (\lambda, \alpha_k^\vee) = 0\ (l < k \leq n).$

DI: when $l \neq n-1,\ (\lambda, \alpha_k^\vee) \in 2\mathbb{Z}\ (1 \leq k < l), \quad (\lambda, \alpha_k^\vee) = 0\ (l < k \leq n),$
when $l = n-1,\ (\lambda, \alpha_k^\vee) \in 2\mathbb{Z}\ (1 \leq k < n-1),\ (\lambda, \alpha_{n-1}^\vee - \alpha_n^\vee) = 0.$

CI: $(\lambda, \alpha_k^\vee) \in 2\mathbb{Z} \quad (1 \leq k \leq n).$

CII: $(\lambda, \alpha_{2k-1}^\vee) = 0\ (1 \leq k \leq l), \quad (\lambda, \alpha_k^\vee) = 0\ (2l+1 \leq k \leq n).$

DIII: when $n = 2l,\ (\lambda, \alpha_{2k-1}^\vee) = 0 \quad (1 \leq k \leq l).$
when $n = 2l+1,\ (\lambda, \alpha_{2k-1}^\vee) = 0\ (1 \leq k \leq l)$ and $(\lambda, \alpha_{n-1}^\vee - \alpha_n^\vee) = 0.$

一方、“左側剰余空間” $A_q(K\backslash G)$ は別の coideal を $M' := L^- - K^{-1}S(L^+)^t K$ （ $K = J(a^{-1}; q)^t$）の成分で張られる $\mathfrak{k}_q'$ で作り、その右側不変な $A_q(G)$ の部分環で定義する。この場合 $(\mathfrak{k}_q')^*.w_K = 0$ で、$A_q(G/K)$ の時と同様な分解が成り立つ。

さて、帯球函数（zonal spherical function）を考えるために両側剰余空間を

$$\mathcal{H} = A_q(K\backslash G/K) := \{\varphi \in A_q(G)\ :\ \mathfrak{k}_q.\varphi = 0, \quad \varphi.\mathfrak{k}_q' = 0\}$$

で定義する。$\mathcal{H}$ は $A_q(G)$ の部分環である。$\mathcal{H}$ の構造はトーラスへの制限を考えると見やすい。

実際、次のような全射な Hopf algebra hom. $A_q(G) \longrightarrow A(\mathbb{T}) = \mathbb{C}[z_1^{\pm 1}, \cdots, z_n^{\pm 1}]$ $(\phi \longmapsto \phi|_{\mathbb{T}}$) s.t. $(L_{jj}^{\pm}, z_k) = q^{\pm(\delta_{jk} - \delta_{j'k})}$ が存在して、制限 $|_{\mathbb{T}} : \mathcal{H} \longrightarrow A(\mathbb{T})$ は単射となっている。特に $\mathcal{H}$ は可換環である。

さらにカルタン分解を $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$、$\mathfrak{a}$ を $\mathfrak{p}$ 中の極大可換部分空間、$\mathfrak{g}$ と $\mathfrak{a}$ で決まる対称空間のルート系を $\Sigma = \Sigma(\mathfrak{a})$、monomial x^λ （$\lambda \in P(\Sigma)$: integral weights）を基底とする可換環を $A = \sum_{\lambda \in P(\Sigma)} \mathbb{C}x^\lambda$. と置く。このとき $\mathcal{H}$ の制限 $|_{\mathbb{T}}$ の像は A のワイル群 $W = W(\Sigma)$-不変部分空間に一致する；

$$A_q(K\backslash G/K)|_{\mathbb{T}} = A^{W(\Sigma)}$$

ただし

$$\begin{aligned}
\text{BDI}: &\quad x_1 = z_1^2, \cdots, x_l = z_l^2 \\
\text{CI}: &\quad x_1 = z_1^2, \cdots, x_n = z_n^2 \\
\text{CII}: &\quad x_1 = z_1 z_2, \cdots, x_l = z_{2l-1} z_{2l} \\
\text{DIII}: &\quad x_1 = z_1 z_2, \cdots, x_l = z_{2l-1} z_{2l}.
\end{aligned}$$

§3. 帯球函数 (ZONAL SPHERICAL FUNCTIONS)

$\mathcal{H}$ の直和分解

$$\mathcal{H} = A_q(K\backslash G/K) = \oplus_{\lambda \in P_{\mathfrak{k}}^+} \mathcal{H}(\lambda), \quad \mathcal{H}(\lambda) = W(\lambda) \cap \mathcal{H}$$

は $U_q(\mathfrak{g})$ の中心 $ZU_q(\mathfrak{g})$ による同時固有空間分解を与える。定数倍を除いて決まる $\mathcal{H}(\lambda)$ の元 $\varphi(\lambda)$ （ $\dim \mathcal{H}(\lambda) = 1$ に注意）を既約表現 $V(\lambda)$ に付随する帯球函数と呼ぶ。

トーラスへの制限 $|_{\mathbf{T}}$ は $\mathcal{H}$ 上単射であったから$\varphi(\lambda)|_{\mathbf{T}}$ を見るのが適当である。これを特徴付けるために [RTF] による中心元

$$C_r := \mathrm{tr}(q^{2\rho}(L^+S(L^-)^r) \quad (1 \leq r \leq \mathrm{rank}\mathfrak{g},\ q^{2\rho}\text{の意味は§4 を参照})$$

特に C_1 に関する動径成分 (**radial component**)、即ち下の図式を可換にする q-差分作用素 D_1 を計算する；

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H} & \xrightarrow{C_1} & \mathcal{H} \\ \big\downarrow |_{\mathbf{T}} & & \big\downarrow |_{\mathbf{T}} \\ A^W & \xrightarrow[\exists D_1]{} & A^W \end{array}$$

今のところ計算できているのは次の場合である ([NS])；

$$\begin{aligned}
SO(2n)/SO(n) \times SO(n) &: \quad D_1 = E^{(n)}(1, q^2, 1, 0, 1; q^4) \\
Sp(2n)/U(n) &: \quad D_1 = E^{(n)}(q^2, q^2, 1, 0, 1; q^4) \\
Sp(2n)/Sp(2l) \times Sp(2l)\ (n = 2l) &: \quad D_1 = (q + q^{-1})E^{(l)}(q^3, q^4, 1, 0, 4; q^2) \\
SO(2n)/U(n)\ (n = 2l) &: \quad D_1 = (q + q^{-1})E^{(l)}(q, q^4, 1, 0, 4; q^2) \\
SO(2n)/U(n)\ (n = 2l+1) &: \quad D_1 = (q + q^{-1})E^{(l)}(q, q^4, q^2, 2, 4; q^2) \\
& \qquad + 2\prod_{a=1}^{l} \frac{1 - q^3 x_a}{1 - q x_a} \frac{1 - q^{-3} x_a}{1 - q^{-1} x_a}
\end{aligned}$$

但し、

$$E^{(l)}(s, t, u, m, p; q) := \sum_{k=1}^{l} C_k(s, t, u, m) T_{q, \epsilon_k} + \sum_{k=1}^{l} C_{k'}(s, t, u, m) T_{q, -\epsilon_k},$$

$$C_k(s, t, u, m, p) := t^{-\tilde{\rho}_k/p} \left(\frac{1 - s u x_k}{1 - s x_k}\right)^m \frac{1 - s^2 x_k^2}{1 - x_k^2} \prod_{a=1}^{k-1} \frac{1 - t^{-1} x_a x_k^{-1}}{1 - x_a x_k^{-1}} \prod_{a=k+1}^{l} \frac{1 - t x_k x_a^{-1}}{1 - x_k x_a^{-1}} \times \prod_{\substack{a=1 \\ a \neq k}}^{l} \frac{1 - t x_a x_k}{1 - x_a x_k},$$

$C_{k'}(s, t, u, m, p) := C_k(s^{-1}, t^{-1}, u^{-1}, m, p)$, $T_{q, \pm\epsilon_k}(x^\lambda) = q^{\pm(\epsilon_k, \lambda)} x^\lambda$.
さらに $\tilde{\rho} = \frac{1}{2}\sum_{\alpha \in \Sigma^+} m_\alpha \alpha = \sum_k \tilde{\rho}_k \epsilon_k$ （m_α はルートの重複度）。

上で $SO(2n)/SO(n) \times SO(n)$ が D_n 型の対称空間、$Sp(2n)/U(n)$、

$Sp(2n)/Sp(2l)\times Sp(2l)$ $(n=2l)$、$SO(2n)/U(n)$ $(n=2l)$ がそれぞれ C_n, C_l, C_l 型の対称空間で、これらの場合に付いては本質的に帯球函数は **Macdonald** 多項式で書ける。特に s, t, u はそれぞれルート $2\epsilon_k$、$\epsilon_i\pm\epsilon_j$、ϵ_k に関するパラメーターで、それぞれの q巾の比がその対称空間の対応するルートの重複度のそれに一致していることに注意。

最後の $SO(2n)/U(n)$ $(n=2l+1)$ は BC_l 型の対称空間であって、実は帯球函数は **Macdonald** 多項式ではなくて **Koornwinder** 多項式の方で書けるのである。このことから他の BC 型の対称空間についても帯球函数は **Koornwinder** 多項式で書けると予想されるが、上の場合以外についてはまだ計算ができていない。

§4. $U_q(\mathfrak{g})$ の中心 C_1 の動径成分 D_1 の計算

ホップ **pairing** $(\ ,\ ):\ U_q(\mathfrak{g})\times A_q(G)\longrightarrow\mathbb{C}$ に於いて $(c,a.\varphi.b)=(bca,\varphi)$ $(a,b,c\in U_q(\mathfrak{g}),\ \varphi\in A_q(G)$) に注意すると

$$\varphi\in\mathcal{H}\Leftrightarrow(U_q\mathfrak{k}_q,\varphi)=0 \text{ and } (\mathfrak{k}'_qU_q,\varphi)=0$$

であるから、次の可換図式が得られる；

$$\begin{array}{ccccc}
A_q(K\backslash G/K) & \longrightarrow & A_q(G) & \twoheadrightarrow & A(\mathbb{T})\\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow\\
(U_q(\mathfrak{g})/U_q\mathfrak{k}_q+\mathfrak{k}'_qU_q)^\vee & \longrightarrow & U_q(\mathfrak{g})^\vee & \twoheadrightarrow & U_q(\mathfrak{t})^\vee
\end{array}$$

但し、$U_q(\mathfrak{t}):=\mathbb{C}[\zeta_1^{\pm1},\cdots,\zeta_n^{\pm1}]$ 、$\zeta_k^{\pm1}=L_{kk}^{\pm}=L_{k'k'}^{\mp}$ $(k<k')$ で右側の 2 つの全射な写像 $\twoheadrightarrow$ を除く他の写像は単射である。従って中心 C_1 の $\mathcal{H}$ への作用をトーラスの上で見ることを以下のようにその双対の方で議論できる；

$\mathbb{C}[\zeta^{\pm1}]$ 上の q-差分作用素 $Q=Q(\zeta;T_{q,\zeta})$ に対してその "乗法的フーリエ変換" $\hat{Q}$ を$\widehat{Q_1Q_2}=\hat{Q}_2\hat{Q}_1$、$\hat{\zeta}^{\pm1}=T_{q^{\pm1},z}$、$\hat{T}_{q^{\pm1},\zeta}=z^{\pm1}$ で定めると、任意の $F\in U_q(\mathfrak{t})$、$G\in A(\mathbb{T})$ に対して

$$(Q(\zeta;T_{q,\zeta})F(\zeta),G(z))=(F(\zeta),\hat{Q}(z;T_{q,z})G(z))$$

が成り立つ。従って $U_q(\mathfrak{g})$ の中心元 C に対して

$$F(\zeta)C\equiv Q(\zeta;T_{q,\zeta})F \qquad \text{mod } U_q\mathfrak{k}_q+\mathfrak{k}'_qU_q \quad ({}^\forall F\in U_q(\mathfrak{t}))$$

であれば $C|_{\mathbb{T}}\ :\ \mathcal{H}|_{\mathbb{T}}\longrightarrow\mathcal{H}|_{\mathbb{T}}$ は $(C.\varphi)|_{\mathbb{T}}=\hat{Q}(\zeta;T_{q,\zeta}).\varphi|_{\mathbb{T}}$ $(\varphi\in\mathcal{H})$ で記述されることがわかる。

実際に $SO(2n)/U(n)$ $(n=2l)$ の場合について、中心 C_1 の動径成分の計算がどのように実行されるか見てみる。

$\zeta_k=q^{\epsilon_k}$ と表すと、反射関係式の解 J の形より

$$\mathfrak{k}_q=\mathfrak{k}'_q\ni q^{\epsilon_1}-q^{\epsilon_2},q^{\epsilon_3}-q^{\epsilon_4},\cdots,q^{\epsilon_{n-1}}-q^{\epsilon_n}$$

が直ちにわかる。従って $SO(2n)$ の正ルート$\Delta^+(D_n)=\{\epsilon_i-\epsilon_j,\quad \epsilon_i+\epsilon_j; 1\le i<j\le n\}$ から対称空間のルート系への落ち方は（例えば）次のようになる；

$$\begin{aligned}
&\epsilon_1-\epsilon_3,\quad \epsilon_1-\epsilon_4,\quad \epsilon_2-\epsilon_3,\quad \epsilon_2-\epsilon_4 \;\rightarrow\; \tilde{\epsilon_1}-\tilde{\epsilon_2}\\
&\epsilon_1+\epsilon_3,\quad \epsilon_1+\epsilon_4,\quad \epsilon_2+\epsilon_3,\quad \epsilon_2+\epsilon_4 \;\rightarrow\; \tilde{\epsilon_1}+\tilde{\epsilon_2}\\
&\epsilon_1+\epsilon_2 \;\longrightarrow\; 2\tilde{\epsilon_1} \quad (\tilde{\epsilon_1}=\epsilon_1=\epsilon_2,\ \tilde{\epsilon_2}=\epsilon_3=\epsilon_4)
\end{aligned}$$

ゆえに対称空間 $SO(2n)/U(n)$ $(n=2l)$ のルート系は C_l 型である；

$$\overset{4}{\circ}\!-\!\!-\!\!-\overset{4}{\circ}\!-\!\!-\!\!-\cdots-\!\!-\!\!-\overset{4}{\circ}\Longleftarrow\overset{1}{\circ}$$ (数字はルートの重複度)

さて L-operator 達の交換関係式と coideal $\mathfrak{k}_q$ の形より、行列 $\tilde{R}$ が存在して

$$q^hL_1^+S(L_2^-)^t\tilde{R}\equiv\tilde{R}q^hL_1^+S(L_2^-)^t \quad \mathrm{mod}\ U_q\mathfrak{k}_q+\mathfrak{k}_qU_q \tag{1}$$

（この場合、$\mathfrak{k}_q=\mathfrak{k}_q{}'$）の形になる。$\tilde{R}=R_{12}^{+\,t_2}P_{12}J_2H_1J_1^{-1}H_1$ である（P は flip、$q^h=q^{h_1\epsilon_1+\cdots+h_n\epsilon_n}\in U_q(\mathfrak{t})$、$H=\mathrm{diag}(q^{h_1},\cdots,q^{h_n},q^{-h_n},\cdots,q^{-h_1})$ ）である。

実は中心元 $C_1=\mathrm{tr}q^{2\rho}L^+S(L^-)=\sum_{1\le i,j\le 2n}q^{2\rho_i}L_{ij}^+S(L_{ji}^-)$ $(\rho_i=n-i,\quad \rho_{i'}=-\rho_i\ (i<i'))$ の形から、(1) の "diagonal part" を取り出すことによって必要な情報が得られる。

今、線型空間 $W=\bigoplus_{j=1}^l\mathbb{C}u_j\oplus\bigoplus_{j=1}^l\mathbb{C}u_{j'}\quad (j'=2l-j+1)$ と $\imath$: $W\longrightarrow V\otimes V$ $(\dim V=2n=4l,\quad \dim W=2l$ に注意)、π_W: $V\otimes V\longrightarrow W$ を次のように定める；

$$\begin{aligned}
\imath_W(u_k)&=v_{2k-1}\otimes v_{2k-1}+v_{2k}\otimes v_{2k}\\
\imath_W(u_{k'})&=v_{(2k)'}\otimes v_{(2k)'}+v_{(2k-1)'}\otimes v_{(2k-1)'}\\
\pi_W(v_{2k-1}\otimes v_{2k-1})&=qu_k\\
\pi_W(v_{2k}\otimes v_{2k})&=q^{-1}u_k\\
\pi_W(v_{(2k)'}\otimes v_{(2k)'})&=qu_{k'}\\
\pi_W(v_{(2k-1)'}\otimes v_{(2k-1)'})&=q^{-1}u_{k'}.
\end{aligned}$$

さらに $Z:=\pi_W\circ L_1^+S(L_2^-)^t\circ\imath_W=(Z_{ij})\quad (2l\times 2l)$ を定めると

$$C_1=\sum_{\substack{i\le j\\ i\le l}}Z_{ij}q^{4l-4i+1}+\sum_{l'\le i'\le j'\le 1'}q^{-4l+4i-1}Z_{i'j'} \tag{2}$$

と表せる。例えば $1\le i<j\le l$ のとき、$Z_{ij}=L_{2i-1,2j-1}^+S(L_{2j-1,2i-1}^-)q+L_{2i-1,2j}^+S(L_{2j,2i-1}^-)q+L_{2i,2j-1}^+S(L_{2j-1,2i}^-)q^{-1}+L_{2i,2j}^+S(L_{2j,2i}^-)q^{-1}$ で、これは対称空間のルート $\tilde{\epsilon_i}-\tilde{\epsilon_j}$ に落ちてくる $SO(2n)$ のルート$\epsilon_{2i-1}-\epsilon_{2j-1}$, $\epsilon_{2i-1}-\epsilon_{2j}$, $\epsilon_{2i}-\epsilon_{2j-1}$, $\epsilon_{2i}-\epsilon_{2j}$ に対応するところの L-operator の成分に重みをつけて和をとったものに他ならない（注. $q^hL_{ij}^+q^{-h}=L_{ij}^+q^{-\langle h,\epsilon_i-\epsilon_j\rangle}$, $q^hS(L_{ji}^-)q^{-h}=S(L_{ji}^-)q^{\langle h,\epsilon_i-\epsilon_j\rangle}$ $(1\le i<j\le n=2l)$ ）。

さらに$\pi_W\circ\tilde{R}=\tilde{A}\circ\pi_W$, $\tilde{R}\circ\imath_W=\imath_W\circ\tilde{A}$ となる上半三角行列 $\tilde{A}\in\mathrm{End}(W)$ が存在して

$$q^hZ\tilde{A}\equiv\tilde{A}q^hZ \quad \mathrm{mod}\ U_q\mathfrak{k}_q+\mathfrak{k}_q'U_q \tag{3}$$

となる。行列 $\tilde{A}$ は次で与えられる；

$$\tilde{A} = -q^2 A(q;q^4)$$
$$\times \mathbf{diag}(q^{2\langle h,\epsilon_1+\epsilon_2\rangle},\cdots,q^{2\langle h,\epsilon_{n-1}+\epsilon_n\rangle},q^{-2\langle h,\epsilon_{n-1}+\epsilon_n\rangle},\cdots,q^{-2\langle h,\epsilon_1+\epsilon_2\rangle})$$

$$A(s;t) = \sum_{\substack{1\le j\le l\\ l'\le j\le 1'}} e_{jj'} + \sum_{i<j} e_{ij}(1-t^{-1}) + \sum_{j=1}^{l} e_{jj'}(1-s^{-2}t)st^{-1}t^{-(l-j+\frac{1}{4})}.$$

(2), (3) から中心 C_1 の動径成分の計算は次の問題に帰着する。

<u>問題</u>. 行列 $a(x;s,t) = A(s,t)\times \mathbf{diag}(x_1,\cdots,x_l,x_l^{-1},\cdots,x_1^{-1})$ に対して

$$[A(x;s,t),F(x,\xi;s,t)] = 0$$

となる行列 $F(x,\xi;s,t) = (F_{ij})$ (s.t. $F_{kk}=\xi_k$, $F_{k'k'}=\xi_k^{-1}$ $(k<k')$, $F_{ij}=0$ $(i>j)$, $F_{ij}\in\mathbb{C}(x,s,t)[\xi,\xi^{-1}]$) を求め、その成分の重みつきの和

$$p(x,\xi;s,t) = \sum_{\substack{i<j\\ i\le l}} F_{ij}t^{l-i+\frac{1}{4}} + \sum_{l'\le i'\le j'\le 1'} t^{-l+i-\frac{1}{4}}F_{i'j'}$$

を求めよ (x, ξ は不定元)。

答は §3 の式 $E^{(l)}$ で $T_{q,\pm\epsilon_k}=\xi_k^{\pm1}$, $m=0$ と置いたものになる。

References

[A] S. Araki, *On root systems and an infinitesimal classification of irreducible symmetric spaces*, J. of Math. Osaka City University **13** (1962), 1-34.

[DK] M. S. Dijkhuizen and T. H. Koornwinder, *CQG algebras: a direct algebraic approach to compact quantum groups*, Lett. Math. Phys. (to appear).

[H] T. Hayashi Quantum deformation of classical groups, Publ. RIMS 28 (1992), 57-81.

[J] M. Jimbo, *Quantum R matrix for the generalized Toda system*, Comm. Math. Phys. **102** (1986), 537-548.

[K1] T. H. Koornwinder, *Continuous q-Legendre polynomials as spherical matrix elements of irreducible representations of the quantum SU(2) group*, CWI Quarterly **2** (1989), 171-173.

[K2] ______, *Orthogonal polynomials in connection with quantum groups*, in "Orthogonal Polynomials: Theory and Practice " (P. Nevai, ed.), NATO ASI Series, Kluwer Academic Publishers, 1990, pp. 257-292.

[K3] ______, *Askey-Wilson polynomials for root systems of type BC*, Contemp. Math. **138** (1992), 189-204.

[K4] ______ Compact quantum groups and q-special functions, *Lecture notes for the European School of Group Theory, Trento(Italy)*, July 1993.

[KR] A. N. Kirillov and N. Reshetikhin, *q-Weyl group and a multiplicative formula for universal R-matrices*, Comm. Math. Phys. **134** (1990), 421-431.

[Loos] O. Loos, *Symmetric spaces II*, W. A. Benjamin, Inc., 1969.

[Lusz] G. Lusztig, *Introduction to quantum groups*, Birkhäuser, 1993.

[M1] I.G. Macdonald, *A new class of symmetric functions*, Actes 20ᵉ Séminaire Lotharingien, Publ. I.R.M.A. Strasbourg, 1988, pp. 131-171.

[M2] ______, *Orthogonal polynomials associated with root systems*, preprint (1988).

[N1] M. Noumi, *Macdonald's symmetric polynomials as zonal spherical functions on some quantum homogeneous spaces*, Adv. in Math. (to appear).

[N2] ———, *A realization of Macdonald's symmetric polynomials on quantum homogeneous spaces*, Int. J. Mod. Phys. A (Proc. Suppl.)3A, World Scientific, 1993, pp. 218-223.

[NM] M. Noumi and K. Mimachi, *Askey-Wilson polynomials and the quantum group* $SU_q(2)$, Proc. Japan Acad. **66** (1990), 146-149.

[NS] M. Noumi and S. Sugitani, *in preparation.*

[NYM] M. Noumi, H. Yamada and K. Mimachi, *Finite dimensional representations of the quantum group* $GL_q(n;\mathbb{C})$ *and the zonal spherical functions on* $U_q(n-1)\backslash U_q(n)$, Japanease J. Math. **19** (1993), 31-80.

[R] M. Rosso Algèbres enveloppantes quantifiées, groupes quantiques compacts de matrices et calcul différentiel non commutatif, Duke Math. J. 61 (1990), 11-40.

[RTF] N. Yu. Reshetikhin, L. A. Takhtajan and L. D. Faddeev, *Quantization of Lie groups and Lie algebras*, Algebra and Analysis **1** (1989), 178-206, English transl. in Leningrad Math. J. 1 (1990), 193-225.

[S] T. Sugitani, *Harmonic analysis on quantum spheres associated with representations of* $U_q(\mathfrak{so}_N)$ *and q-Jacobi polynomials*, Compositio Math. (to appear).

[T] T. Tanisaki, *Killing forms, Harish-Chandra isomorphisms, and universal R-matrices for quantum algebras*, Int. J. Mod. Phys. A vol.7 suppl. 1B (1992), 941-961.

[UT] K. Ueno and T. Takebayashi, *Zonal spherical functions on quantum symmetric spaces and Macdonald's symmetric polynomials*, in "Quantum Groups" (P. P. Kulish, ed.), Proceedings of Workshops held in the International Mathematical Institute, Leningrad. Fall 1990, Lecture Notes in Math., vol. 1510, Springer-Verlag, 1992, pp. 142-147.

[W] S. L. Woronowicz, *Compact matrix pseudogroups*, Comm. Math. Phys. **111** (1987), 613-665.

e-mail address: noumi@tansei.cc.u-tokyo.ac.jp / sugitani@tansei.cc.u-tokyo.ac.jp