数理解析研究所講究録
第 895 巻 1995 年 125-134

共形場のコセット構成

東北大理　池田 岳 (TAKESHI IKEDA)

1. 序

共形場理論の例はいくつか知られている．この論説では Wess-Zumino-Witten model [KZ, TK-2] 及び，Virasoro minimal model [BPZ] を扱う． Virasoro minimal model は，最初に現れた共形場理論の例であるが， WZW model の方がより扱いやすい面がある．というのは， WZW model は Virasoro algebra $\mathcal{V}ir$ の他に Affine Lie 環 $\widehat{\mathfrak{g}}$ の対称性を持ち合わせているからであり，今のところ最も整備された共形場理論といえるだろう．

WZW model は 単純 Lie 環 $\mathfrak{g}$ と，レベル k を決めると一つ定まる．ただし，k は複素数で $\mathfrak{g}$ の dual Coxter number とは異なるとする．とくに本論説では， $\widehat{\mathfrak{g}}$ の可積分表現のみを扱うので，k は正の整数の場合を考えることになる．このとき，Sugawara 構成による Virasoro algebra の central charge は，1 よりも大きい有理数（$\mathfrak{g}$ が $\mathfrak{sl}_2$ のときは，$\frac{3k}{k+2}$ ）であることに注意する．

一方 Virasoro minimal model に対しては，その central charge は 1 よりも小さい有理数となる．特に，unitarizable な表現に話を限る場合，

$$c(k) := 1 - \frac{6}{(k+2)(k+3)}, \quad (k\text{は正の整数})$$

という値が対応する．

いま k という文字をここでも使ったのは訳がある．次節で紹介する Goddard-Kent-Olive の構成 [GKO] によると，$\widehat{\mathfrak{sl}_2}$ の可積分表現から，$\mathcal{V}ir$ の表現が得られるのである．そこで二つの k の関係がはっきりする．

この論説の目的は，今ふれた表現の間の関係を共形場理論の主対象 conformal blocks の関係に拡張することである[I]．GKO の構成を利用すると，$\widehat{\mathfrak{sl}_2}$ の可積分表現に関する WZW model から unitarizable minimal model の conformal blocks が構成できることを説明する．得られた写像は同型であることが予想され，特に $k=1$ のときは予想が正しいことが示せる．証明には，自由 fermion により表現が具体的に構成できる事を用いた．

関連する事として，level rank duality に関する研究 [NT] がある．そこでは， GKO 構成で得られる $\mathcal{V}ir$ の表現が $c=0$ である場合が扱われている．

$\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$ の基底 $\{E, H, F\}$ で

$$[H, E] = 2E,\ [H, F] = -2F,\ [E, F] = H.$$

を満たすものをとる．また，$\mathfrak{g}$ 上の双一次形式を $(E|F) = (F|E) = 1, (H|H) = 2$ ，その他の組みあわせは 0 と定める． Affine Lie 環 $\widehat{\mathfrak{sl}_2}$ は $X[n]\,(X \in g, n \in \mathbb{Z}), K$ を基底とし，交換関係

$$[X[n], Y[m]] = [X, Y][n+m] + n(X|Y)\delta_{n+m,0}K,$$
$$[K, X[n]] = 0,$$

により定まるLie 環である．その普遍展開環を $U(\widehat{\mathfrak{g}})$ であらわす． Sugawara operators と呼ばれる次の無限和を考える，

$$S[m] = \frac{1}{2}\sum_{n\in\mathbb{Z}} {}^{\circ}_{\circ}\frac{1}{2}H[-n]H[n+m] + E[-n]F[n+m] + F[-n]E[n+m]{}^{\circ}_{\circ}.$$

ここで，${}^{\circ}_{\circ}\cdot{}^{\circ}_{\circ}$ は

$${}^{\circ}_{\circ}X[n]Y[m]{}^{\circ}_{\circ} = \begin{cases} X[n]Y[m] & n < m \\ \frac{1}{2}(X[n]Y[m] + Y[m]X[n]) & n = m \\ Y[m]X[n] & n > m. \end{cases}$$

と定める．この無限和はもちろん $U(\widehat{sl_2})$ には属さないが，その完備化 $\widehat{U}(\widehat{sl}_2)$ の元となる．$\widehat{U}(\widehat{sl}_2)$ の定義等はKac の教科書 [K] に従う．ここではひとまず，可積分表現上で well-defined な operator として作用する，ということだけ注意しておけば十分である．

命題.

$$[S[n], X[m]] = -(K+2)mX[n+m]$$

$$[S[n], S[m]] = (K+2)(n-m)S[n+m] + \delta_{n+m,0}\frac{n^3-n}{12}3K(K+2)$$

証明は 例えば [KR] に詳しく書いてある．

したがって，$k \neq -2$ ならば，$\widehat{U}(\widehat{\mathfrak{sl}_2})$ を $K - k\cdot 1 = 0$ で割った algebra $\widehat{U}(\widehat{\mathfrak{sl}_2})_k$ において，

$$T^k[m] := \frac{1}{k+2}S[m]$$

は central charge

$$c = \frac{3k}{k+2}$$

の Virasoro algebra の relations をみたす．

GKO の構成を，ここで用いる場合 $\widehat{\mathfrak{sl}_2}\times\widehat{\mathfrak{sl}_2}\supset\widehat{\mathfrak{sl}_2}$ (対角埋め込み) に即して説明する．余積 $\Delta : U(\widehat{\mathfrak{g}})\to U(\widehat{\mathfrak{g}})\otimes U(\widehat{\mathfrak{g}})$ を通常どうり $\Delta(A)=A\otimes 1+1\otimes A, A\in\widehat{\mathfrak{g}}$ で定義する．そこで，$\widehat{U}(\widehat{\mathfrak{g}})_k\widehat{\otimes}\,\widehat{U}(\widehat{\mathfrak{g}})_1$ の元，

$$T^{GKO}[n]=T^k[n]\otimes 1+1\otimes T^1-\Delta(T^{k+1}[n]),(n\in\mathbb{Z})$$

を考える．ここで，Δ は完備化にまで拡張したものを同じ記号であらわした．

命題． $T^{GKO}[n]$ は次を満たす．

$$[T^{GKO}[n],T^{GKO}[m]]=(n-m)T^{GKO}[n+m]+\frac{n^3-n}{12}\delta_{n+m,0}c(k),$$

$$[\,T^{GKO}[n],\Delta(\widehat{\mathfrak{sl}_2})]=0.$$

以下 k は正の整数とする．レベル k の可積分表現は，$P_k^+:=\{0,1,\ldots,k\}$ で parametrize される．$\lambda\in P_k^+$ に対応する表現を $L_{k,\lambda}$ で表す．今，$\lambda\in P_k^+,\varepsilon\in P_1^+$ をとる．$L_{k,\lambda}\otimes L_{k,\varepsilon}$ は $\Delta(\widehat{\mathfrak{sl}_2})\times\mathcal{V}ir$ 加群となる．ただし，$\mathcal{V}ir$ の作用は $T^{GKO}[n]$ によるものである．

定理 [GKO,TK-1,KW]. $\Delta(\widehat{\mathfrak{sl}_2})\times\mathcal{V}ir$ 加群として，

$$L_{k,\lambda}\otimes L_{1,\varepsilon}\cong\bigoplus_{\substack{\mu\in P_{k+1}^+\\ \lambda+\mu+\varepsilon\equiv 0(mod\ 2)}}L_{k+1,\mu}\otimes V_{c(k),h_{\lambda+1,\mu+1}}.$$

ここで，

$$h_{r,s}=\frac{((k+3)r-(k+2)s)^2-1}{4(k+2)(k+3)}$$

である．

可積分表現が unitarizable であることより次が従う．

系． $V_{c(k),h_{r,s}},(r=1,\ldots,k+1,s=1,\ldots,k+2)$ は unitarizable である．

3. WZW-MODEL

WZW-model について説明する前に，右 $\widehat{\mathfrak{g}}$ 加群 $L^{\dagger}_{k,\lambda}$ を導入しておくのが便利である．

$$L_{k,\lambda}[d] = \{v \in L_{k,\lambda} \mid T^k[0]v = (h_\lambda + d)v\}$$

と定めると，直和分解 $L_{k,\lambda} = \oplus_{d\geq 0} L_{k,\lambda}[d]$ ができる．ここで，$T^k[0]$ の最低固有値 h_λ は

$$h_\lambda = \frac{\lambda(\lambda+2)}{4(k+2)}$$

で与えられる．$L_{k,\lambda}[0]$ は，$\mathfrak{g}$ 部分加群で，$\lambda+1$ 次元既約表現 L_λ と同型であることも，ここで注意しておく．さて，制限双対空間を

$$L^{\dagger}_{k,\lambda} = \bigoplus_{d\geq 0}(L_{k,\lambda}[d])^*$$

と定めると，$L_{k,\lambda}$ との間の自然な pairing

$$\langle\cdot|\cdot\rangle : L^{\dagger}_{k,\lambda} \times L_{k,\lambda} \longrightarrow \mathbb{C}$$

に関して，

$$\langle ua|v\rangle = \langle u|av\rangle \, (=: \langle u|a|v\rangle) \quad (a \in U(\widehat{\mathfrak{g}}),\ u \in L^{\dagger}_{k,\lambda},\ v \in L_{k,\lambda})$$

を満たす右 $\widehat{\mathfrak{g}}$ 加群の構造が一意的に入る．$L^{\dagger}_{k,\lambda}$ もまた $T^k[0]$ の固有値に関する直和分解

$$L^{\dagger}_{k,\lambda} = \bigoplus_{d\geq 0} L^{\dagger}_{k,\lambda}[d]$$

を持つ．

既に前節で，

$$X(z) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} X[m]z^{-m-1}$$

$$T(z) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} T[m]z^{-m-2}$$

という級数を用いたが，これらは $(L^{\dagger}_{k,\lambda} \otimes L_{k,\lambda})^*$ に値を持つ $\mathbb{C}^\times$ 上の正則関数ともみることができる．というのは，$u \otimes v \in L^{\dagger}_{k,\lambda} \otimes L_{k,\lambda}$ に対して，例えば
$\langle u|X(z)|v\rangle := \sum_{m\in\mathbb{Z}}\langle u\,|X[m]\,|v\rangle z^{-m-1}$ は，$\mathbb{C}[z, z^{-1}]$ の元となるからである．次に，もっと複雑な関数 conformal blocks の定義を与えよう．

定義. $\mathbf{L}_{k,\lambda}^{*} = \left(L_{k,\lambda_3}^{\dagger} \otimes L_{k,\lambda_2} \otimes L_{k,\lambda_1}\right)^{*}$ に値を持つ $\mathbb{C}^{\times}$ 上の多価正則関数 $\phi(z)$ が *Conformal block* とは次の条件を満たすときとする：

（１）$z \in \mathbb{C}^{\times}$ を固定するとき，それぞれ $w^{-1}, w-z, w$ に関する３つの *Laurent* 級数

$$\phi(z\,;\,u_3 X(w) \otimes u_2 \otimes u_1),\phi(z\,;\,u_3 \otimes X(w-z)u_2 \otimes u_1),\phi(z\,;\,u_3 \otimes u_2 \otimes X(w)u_1)$$

が，収束して，$0, \infty, z$ のみに極を持つ１つの有理関数に解析接続される．

（２）微分方程式

$$\frac{d}{dz}\phi(z\,;\,u_3 \otimes u_2 \otimes u_1) = \phi(z\,;\,u_3 \otimes T^k[-1]u_2 \otimes u_1)$$

を満たす．

Remark. $\widehat{L}_{k,\lambda} := \prod_{d \geq 0} L_{k,\lambda}[d]$ とおくと， *canonical* な同型

$$(L_{k,\lambda_3}^{\dagger} \otimes L_{k,\lambda_2} \otimes L_{k,\lambda_1})^{*} \cong Hom_{\mathbb{C}}(L_{k,\lambda_2} \otimes L_{k,\lambda_1}, \widehat{L}_{k,\lambda_3})$$

により，$\phi(z\,;\,u_3 \otimes u_2 \otimes u_1)$ は，$\phi(z\,;\,u_3 \otimes u_2 \otimes u_1) = \langle u_3 | \phi(z\,;\,u_2 \otimes u_1) \rangle$ をみたす $\phi(z\,;\,u_2 \otimes u_1)$ と一対一に対応する．あるいは，u_2 に線型に依存する *operators* の *family* $\phi(z\,;\,u_2)$: $L_{k,\lambda_1} \to \widehat{L}_{k,\lambda_3}$ で，$\phi(z\,;\,u_2 \otimes u_1) = \phi(z\,;\,u_2)u_1$ を満たすもの，として扱う方が便利なときもある．

$\mathbb{P}^1$ 上の３点 $0, z, \infty$ に表現が乗っている場合を考えたが，一般に N 点の場合に conformal block の定義を拡張することもできる．３点のときには vertex operator と呼ぶ事も多い．Vertex operator に対し，点 z にある表現 L_{k,λ_2} を $L_{k,\lambda_2}[0] = L_{\lambda_2}$ に制限して得られる operator を primary field という．

命題. *Primary field* は次を満たす：

$$[X[n], \phi(z\,;v)] = z^n \phi(z\,;Xv),\ (X \in \mathfrak{g},\ n \in \mathbb{Z},\ v \in L_{\lambda_2}),$$

$$[T[n], \phi(z\,;v)] = z^n (z\frac{d}{dz} + (n+1)h_{\lambda_2})\phi(z\,;v), (n \in \mathbb{Z}, v \in L_{\lambda_2}).$$

逆に，この条件を満たす $\phi(z)$ があれば，それを *conformal block* に拡張することができる．しかもその拡張は一意的である．

Conformal blocks のなす局所系を $\mathcal{L}_{k,\lambda}$ で表す．次のことが知られている．

定理[TK]. $\mathcal{L}_{k,\lambda}$ の階数は高々1であり，1となるための必要十分条件は次で与えられる：

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \text{ は } 2k \text{ 以下の偶数},$$

$$(1,2,3) \text{の任意の置換} (i,j,k) \text{に対して} \lambda_i + \lambda_j - \lambda_k \geq 0.$$

定理の条件を満たす $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ 全体の集合をここでは CG_k で表す．Clebsch-Gordan の条件にレベル k による制限がついたものという意味である．

4. Virasoro minimal model

互いに素な二つの正の整数 p, q により central charge が，

$$c = c_{p,q} := 1 - \frac{6(p-q)^2}{pq}$$

と表されるとき，1つの Virasoro minimal model が対応する．そのような c に対し，

$$R_c = \{h_{r,s} \,|\, r, s \in \mathbb{Z},\ 0 < r < q, 0 < s < p\},$$

$$h_{r,s} = \frac{(pr - qs)^2 - (p-q)^2}{4pq}$$

とおく．既約最高ウエイト表現 $V_{c,h}\,(h \in R_c)$ に対する共形場理論が minimal model である．$h_{q-r,p-s} = h_{r,s}$ であるから R_c の元の個数は $\frac{1}{2}(p-1)(q-1)$ であることに注意しておく．
関連する重要な事実として次がよく知られている．

定理[FQS,L]. $0 < c < 1$ のとき，$V_{c,h}$ が *unitarizable* であるための必要条件は，

$$c = c(k) = c_{k+3,k+2}\ (k = 1, 2, \ldots), h \in R_{c(k)}$$

が成り立つことである．

この系列に属する Virasoro minimal model を 特に unitarizable minimal model と呼ぶこともある．
ここでいったん一般の minimal model に話を戻す． conformal block の定義は，$L_{k,\lambda}$ の代わりに $V_{c,h}$，$X(z)$ の代わりに $T(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} L_n z^{-n-2}$ を使って同様に与える．conformal blocks の局所系を $\mathcal{V}_{c,h}$ で表すことにする．

定理[Ku]. $\mathcal{V}_{c,h}$ の階数は高々1であり，1となるための必要十分条件は次が成立することである：ある $r_i, s_i \in \mathbb{Z}\,(1 \le i \le 3)$ が存在して，$h_i = h_{r_i,s_i}$ でかつ，

$$r_1 + r_2 + r_3 \text{ は} 2q-1 \text{ 以下の奇数},$$

$$s_1 + s_2 + s_3 \text{ は} 2p-1 \text{ 以下の奇数},$$

$$(1,2,3)\text{の任意の置換}(i,j,k)\text{に対して } r_i + r_j - r_k \ge 1, s_i + s_j - s_k \ge 1.$$

証明には [FFu] の結果を用いる．

Remark. この結果は，共形場理論の誕生を告げる論文 [BPZ] において既に，証明は抜きではあるが述べられている．

定理の条件を満たす $h = (h_1, h_2, h_3)$ 全体の集合をここでは，BPZ_c で表す．

5. Coset constructions of conformal blocks

第2節で説明したGKO構成を用いることにより，次の結果が得られる．

定理. $\lambda_i + \mu_i + \varepsilon_i \equiv 0\,(mod 2)\ (1 \le i \le 3)$ を満たす $\lambda \in CG_k$, $\mu \in CG_{k+1}$, $\varepsilon \in CG_1$ が与えられたとする． h を $h_i = h_{\lambda_i+1,\mu_i+1}\ (1 \le i \le 3)$ によって定めると， $h \in BPZ_{c(k)}$ であり，自然な局所系の写像

$$\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{\mathbb{C}^\times}}(\mathcal{L}_{k+1,\mu}, \mathcal{L}_{k,\lambda} \otimes \mathcal{L}_{1,\varepsilon}) \to \mathcal{V}_{c(k),h}$$

が存在する．

得られた写像は同型であることが予想されるが，特に $k=1$ のときは Spinor 表現を用いる事により予想が正しいことを証明できる．次節において，その証明の方針を述べる．

Remark. 定理および予想は一般の N 点 *conformal block* に対しても同様に定式化できる．詳しい事は [I]．

6.Spinor 表現

Clifford 代数 $Cl_\delta\ (\delta = 0, 1/2)$ を生成元 $\psi_i[n], \bar{\psi}_i[n]\,, i = 1,2,\ n \in \mathbb{Z} + \delta$, 及び反交換関係

$$\{\psi_i[n], \psi_j[m]\} = \{\bar{\psi}_i[n], \bar{\psi}_j[m]\} = 0,$$

$$\{\psi_i[n], \bar{\psi}_j[m]\} = \delta_{i,j}\delta_{n+m,0}$$

によって定める．その Fock 表現 $\mathcal{F}_\delta$ をそれぞれ, vectors $|\delta\rangle$ により生成され，

$$\psi_i[n]|\delta\rangle = 0 \quad \text{for} \quad n \geq 0,$$

$$\bar{\psi}_i[n]|\delta\rangle = 0 \quad \text{for} \quad n > 0$$

により定まるものとする．さらに $\mathcal{F}_\delta^{even}, \mathcal{F}_\delta^{odd}$ により，生成元の個数に関する even part 及び odd part をそれぞれ表す．

ここで，a, b を ψ_i または $\bar{\psi}_i$ とするとき，$:\cdot:$ を，

$$:a[n]b[m]: = \begin{cases} a[n]b[m] & n < m \\ \frac{1}{2}(a[n]b[m] - b[m]a[n]) & n = m \\ b[m]a[n] & n > m \end{cases}$$

と定義する．

母関数 (free fermion)

$$\psi_i(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}+\delta} \psi_i[n]z^{-n-1/2}, \ \bar{\psi}_i(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}+\delta} \bar{\psi}_i[n]z^{-n-1/2},$$

を導入する．これらは，$Hom_{\mathbb{C}}(\mathcal{F}_\delta, \widehat{\mathcal{F}_\delta})$ に値を持つ $\mathbb{C}^\times$ 上の正則関数ともみなせる．$\delta = 0$ のときは，2価関数である．このような oparators の計算の方法については，例えば [FFr] に詳しく書いてある．ここで，operators

$$E_1(z) = \psi_1(z)\bar{\psi}_2(z), \ F_1(z) = \psi_2(z)\bar{\psi}_1(z), \ H_1(z) = :\psi_1(z)\bar{\psi}_1(z): - :\psi_2(z)\bar{\psi}_2(z):$$

$$E_2(z) = \psi_1(z)\psi_2(z), \ F_2(z) = \bar{\psi}_2(z)\bar{\psi}_1(z), \ H_2(z) = :\psi_1(z)\bar{\psi}_1(z): + :\psi_2(z)\bar{\psi}_2(z):$$

を導入する．$E_1(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} E_1[n]z^{-n-1}$ のように展開すると，

定理 [KP,F]. これらは *Fock* 空間上に $\widehat{\mathfrak{sl}_2} \times \widehat{\mathfrak{sl}_2}$ の表現を定め，

$$\mathcal{F}_{1/2}^{even} \cong L_{1,0} \otimes L_{1,0}, \quad \mathcal{F}_{1/2}^{odd} \cong L_{1,1} \otimes L_{1,1},$$

$$\mathcal{F}_0^{even} \cong L_{1,0} \otimes L_{1,1}, \quad \mathcal{F}_0^{odd} \cong L_{1,1} \otimes L_{1,0}$$

が成り立つ．

GKO construction を $k = 1$ の時に適用すると，

$$L_{1,0} \otimes L_{1,0} \cong L_{2,0} \otimes V_{1/2,0} \oplus L_{2,2} \otimes V_{1/2,1/2}$$

$$L_{1,1}\otimes L_{1,1}\cong L_{2,2}\otimes V_{1/2,0}\oplus L_{2,0}\otimes V_{1/2,1/2}$$
$$L_{1,0}\otimes L_{1,1}\cong L_{2,1}\otimes V_{1/2,1/16}$$
$$L_{1,1}\otimes L_{1,0}\cong L_{2,1}\otimes V_{1/2,1/16}$$

となる．
表現を与える operators は，

$$\psi_\pm(z) := \psi_2(z)\pm\bar{\psi}_2(z)$$

とおくとき，

$$T^{GKO}(z)=\frac{1}{4}:\psi_-(z)\frac{d\psi_-(z)}{dz}:+\frac{1-2\delta}{16}z^{-2}$$

となり， $\Delta(\widehat{\mathfrak{sl}_2})$ の方は

$$E(z)=\psi_1(z)\psi_+(z),\ F(z)=-\bar{\psi}_1(z)\psi_+(z),\ H(z)=2:\psi_1(z)\bar{\psi}_1(z):$$

で与えられる．
例として， $\lambda=\varepsilon=(0,0,0), \mu=(0,0,0),(2,0,2),(2,2,0),(0,2,2)$ の場合について考えてみる．レベル1で $(0,0,0)$ に対応する vertex operator を $[0]_1$ であらわす．

$$\Phi(z) := [0]_1\otimes[0]_1\ :\ \mathcal{F}^{even}_{1/2}\otimes\mathcal{F}^{even}_{1/2}\to\widehat{\mathcal{F}}^{even}_{1/2}$$

と Fock 空間に実現される．
Second factor (つまり点 z にある表現) のベクトル v を固定することにより得られる operator を

$$\Phi^v(z)\ :\ \mathcal{F}^{even}_{1/2}\to\widehat{\mathcal{F}}^{even}_{1/2}$$

で表す．
$v\in L_{2,0}\otimes V_{1/2,0}$ のとき，分解

$$\mathcal{F}^{even}_{1/2}\cong L_{2,0}\otimes V_{1/2,0}\oplus L_{2,2}\otimes V_{1/2,1/2}$$

にあわせて， $\Phi^v(z)$ を成分に分け行列表示すると，

$$\begin{pmatrix}[0]_2\otimes[0]_{1/2} & 0\\ 0 & [0]_2\otimes[0]_{1/2}\end{pmatrix}$$

となる．ここで， $[0]_2$ によって レベル2の vertex operator で second factor が 0 のもの ($\mu=(2,0,2),(0,0,0)$がある) のことを表した．また， $[0]_{1/2}$ で $c=1/2$ の Virasoro minimal model の vertex opeartor で second factor が 0 のものを表した．同様の記号を用いて，
$v\in L_{2,2}\otimes V_{1/2,1/2}$ のときは，

$$\begin{pmatrix}0 & [2]_2\otimes[1/2]_{1/2}\\ [2]_2\otimes[1/2]_{1/2} & 0\end{pmatrix}$$

となる．
$[0]$ は本質的には identity operator で，実際 second factor に最高ウエイトベクトルを代入すると identity となる．同様の意味で， $[1/2]_{1/2}$ は本質的には $\psi_-(z)$ である．その他の vertex operators も free fermion により記述でき， GKO 構成による分解の各成分も決定できる．その結果から， $k=1$ の時に予想が正しい事を示すことができる．

References

[BPZ] Belavin, A.A., Polyakov, A.M., Zamolodchikov, A.B., *Infinite conformal symmetry in two-dimensional quantum field theory*, Nucl. Phys. **B241** (1984), 333-380.

[F] Frenkel, I.B., *Two constructions of affine Lie algebra representations and boson-fermion correspondence in quantum field theory*, Journal of functional analysis **44** (1981), 259-327.

[FFr] Feingold, A.J., Frenkel, I.B., *Classical affine Lie algebras*, Advan.in Math. **56** (1985), 117-172.

[FFu] Feigin, B., Fuchs,D., *Representations of the Virasoro algebra*, Representations of the Lie groups and related topics, Gordon and Breach, New York, 1990, pp. 465-554.

[FQS] Friedan, D., Qiu, Z., Shenker, S., *Conformal invariance,unitarity,and critical exponents in two dimensions*, Phys. Rev. Lett. **52** (1984), 1575-1578.

[GW] Gepner, D., Witten, E., *String theory on group manifolds*, Nucl. Phys. **B278** (1986), 493-549.

[GKO] Goddard, P., Kent, A. Olive, D., *Unitary representations of the Virasoro and super-Virasoro algebras*, Commun. Math. Phys. **103** (1986), 105-119.

[I] Ikeda, T., in preparation.

[K] Kac, V.G., *Infinite dimensional Lie algebras (3rd edition)*, Cambridge University Press, 1990.

[Ku] Kuroki, G., in preparation.

[KP] Kac, V.G., Peterson, D.H., *Spin and wedge representations of infinite-dimensional Lie algebras and groups*, Proc. Natl. Acad. Sci. USA **78** (1981), 3308-3312.

[KR] Kac, V.G., Raina, A.K., *Highest weight representations of infinite dimensional Lie algebras*, Adv. Ser. in Math. Phys. vol.2, World Scientific, 1987.

[KW] Kac, V.G., Wakimoto, M., *Unitarizable highest weight representations of the Virasoro, Neveu-Schwarz and Ramond algebras*, Lecture notes in physics **261** (1986), 345-371.

[KZ] Knizhnik, V.G., Zamolodchikov, A.B., *Current algebra and Wess-Zumino models in two dimensions*, Nucl. Phys. **B247** (1984), 83-103.

[L] Langlands, R.P., *On unitary representations of Virasoro algebra*, Infinite-dimensional Lie algebras and their applications (Vershik,A.M., Zhelobenko, D.P., eds.), World Sci., 1988, pp. 141-159.

[NT] Nakanishi, T., Tsuchiya, A., *Level-rank duality of WZW models in conformal field theory*, Commun. Math. Phys. **144** (1992), 351-372.

[TK-1] Tsuchiya, A., Kanie, Y., *Unitary representations of the Virasoro algebra*, Duke Mathematical Jour. **22** (1986), 1013-1046.

[TK-2] ———, *Vertex operators in conformal field theory on* $\mathbb{P}^1$ *and monodromy representations of braid groups*, Adv. Stud. in Pure Math. **16** (1987), 297-372.