数理解析研究所講究録
第 895 巻 1995 年 135-141

Ｋｉｒｉｌｌｏｖ－Ｋｏｓｔａｎｔ理論によるＫａｃ－Ｍｏｏｄｙ Ｌｉｅ群の表現のＦｅｙｎｍａｎ経路積分による構成

小椋一徳 (Kazunori Ogura)
岡本清郷 (Kiyosato Okamoto)
菅野浩明 (Hiroaki Kanno)
浜田光人 (Mitsuto Hamada)
戸越雄一郎 (Yuichiro Togoshi)

広島大学理学部数学科

§1. 準備

$G=SU(2)$. とし、

$$G=\left\{\begin{pmatrix} u & v \\ -\bar{v} & \bar{u}\end{pmatrix}; |u|^2+|v|^2=1 \quad u,v\in\mathbb{C}\right\}$$

そのＬｉｅ環 $\mathfrak{g}=su(2)$ を

$$\mathfrak{g}=\left\{\begin{pmatrix} \sqrt{-1}a & b+\sqrt{-1}c \\ -b+\sqrt{-1}c & -\sqrt{-1}a\end{pmatrix}; a,b,c\in\mathbb{R}\right\}$$

とする。これらの複素化をそれぞれ $G^{\mathbb{C}}=SL(2,\mathbb{C})$ 、$\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}=sl(2,\mathbb{C})$ とする。

G のループ群を $LG^{\mathbb{C}}$

$$LG^{\mathbb{C}}=\{g; S^1 \longrightarrow G^{\mathbb{C}} : C^\infty\}$$

そのＬｉｅ環を、$L\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$とおく。

$$L\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}=\{X; S^1 \longrightarrow \mathfrak{g}^{\mathbb{C}} : C^\infty\}$$

$LG^{\mathbb{C}}$の［１］による中心拡大を、$\widetilde{LG^{\mathbb{C}}}$とすると、そのＬｉｅ環$\widetilde{L\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}}$は、

$$\widetilde{L\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}}=L\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}+\mathbb{C}c \qquad (c: center)$$

となる。

このとき $X\in\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}, t=e^{i\theta}$に対し、$X\otimes t^k$を、写像

$$S^1\ni e^{i\theta}\longmapsto Xe^{ik\theta}\in\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$$

と同一視して、$X \otimes t^n \in L\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ と見なす。

このとき $L\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$は、$\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} \otimes \mathbb{C}[t, t^{-1}]$ の、$C^\infty - topology$に関する完備化である。

従って $L\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$は、

$$\{X \otimes t^k; X \in \mathfrak{g}^{\mathbb{C}}, k \in \mathbb{Z}\}$$

で張られ、$\widetilde{L\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}}$は、交換子積を、

$$[X \otimes t^k + \zeta c, Y \otimes t^l + \eta c] = [X, Y] \otimes t^{k+l} + ktrXY\delta_{k+l,0}c$$

で定めると、$\widetilde{L\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}}$はＫａｃ－Ｍｏｏｄｙ－Ｌｉｅ環となる。

§2. 無限次元Ｈｅｉｓｅｎｂｅｒｇ群の既約ユニタリー表現の構成

$\widetilde{L\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}} \supset \widetilde{L\mathfrak{h}^{\mathbb{C}}}$ を、

$$\widetilde{L\mathfrak{h}^{\mathbb{C}}} = \left\{ \sum_{k \geq 1} x_k A_k + \sum_{k \geq 1} y_k A_k^* + \lambda c; \{x_k\}, \{y_k\} \text{ は } \mathbb{C} \text{ 値急減少数列、} \lambda \in \mathbb{C} \right\}$$

とする。

ただし $A_k = \begin{pmatrix} 0 & t^{k-1} \\ t^k & 0 \end{pmatrix}$、$A_k^* = \begin{pmatrix} 0 & t^{-k} \\ t^{-k+1} & 0 \end{pmatrix}$ である。

$\widetilde{LH^{\mathbb{C}}} \subset \widetilde{LG^{\mathbb{C}}}$を$\widetilde{L\mathfrak{h}^{\mathbb{C}}}$に対応する部分群。また、$\widetilde{L\mathfrak{h}^{\mathbb{C}}}$のリアルフォーム$\widetilde{L\mathfrak{h}}$を、

$$\widetilde{L\mathfrak{h}} =$$
$$\left\{ \sum_{k \geq 1} (\sqrt{-1}a_k + b_k) A_k + \sum_{k \geq 1} (\sqrt{-1}a_k - b_k) A_k^* + \lambda c \right.$$
$$\left. ; \{a_k\}, \{b_k\} : \mathbb{R} \text{ 値急減少数列}, \lambda \in \sqrt{-1}\mathbb{R} \right\}$$

ととり、$\widetilde{LH} \subset \widetilde{LG^{\mathbb{C}}}$を$\widetilde{L\mathfrak{h}}$に対応する部分群とする。

今、無限次元Ｈｅｉｓｅｎｂｅｒｇ－Ｌｉｅ環を

$$\mathfrak{h} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a_1 & a_2 & \cdots & r \\ & \ddots & & & b_1 \\ & & \ddots & & b_2 \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & 0 \end{pmatrix} ; \{a_k\}, \{b_k\} \text{ は } \mathbb{R} \text{ 値急減少数列 } r \in \mathbb{R} \right\}$$

交換子積 $[X, Y] = XY - YX$

で定義する。

一方$\widetilde{L\mathfrak{h}}$の交換子積は、

$$[\sum_{k\geq 1}(\sqrt{-1}a_k+b_k)A_k+\sum_{k\geq 1}(\sqrt{-1}a_k-b_k)A_k^*+\lambda c,$$

$$\sum_{k\geq 1}(\sqrt{-1}a'_k+b'_k)_kA_k+\sum_{k\geq 1}(\sqrt{-1}a'_k-b'_k)_kA_k^*+\lambda' c]$$

$$=2\sum_{k\geq 1}(2k-1)((\sqrt{-1}a_k+b_k)(\sqrt{-1}a'_k-b'_k)-(\sqrt{-1}a'_k+b'_k)(\sqrt{-1}a_k-b_k))$$

であるので、$\widetilde{L\mathfrak{h}}\cong\mathfrak{h}$

ただし同型対応は、

$$\sum_{k\geq 1}(\sqrt{-1}a_k+b_k)A_k+\sum_{k\geq 1}(\sqrt{-1}a_k-b_k)A_k^*+\lambda c$$

$$\longmapsto\begin{pmatrix} 0 & \cdots & -\sqrt{-1}\sqrt{2k-1}a_k & \cdots & \frac{\sqrt{-1}}{2}\lambda \\ & \ddots & & & \vdots \\ & & \ddots & & \sqrt{2k-1}b_k \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$$

である。

また、

$$\mathfrak{n}^{\mathbb{C}}=\left\{\sum_{k\geq 1}x_kA_k;\{x_k\}\mathbb{C}\text{ 値急減少数列}\right\},\xi=\sqrt{-1}\mathbb{R}c$$

とおくと、$\mathfrak{n}^{\mathbb{C}}\cong\widetilde{L\mathfrak{h}}/\xi$

ただし、同型対応は、

$$\sum_{k\geq 1}x_kA_k\longmapsto\sum_{k\geq 1}x_kA_k+\sum_{k\geq 1}-x_kA_k^*+\xi$$

である。

いま、$\mathfrak{n}^{\mathbb{C}}\ni X=\sum_{k\geq 1}x_kA_k$に対し$X$のノルム$\|X\|$を、

$$\|X\|^2=\sum_{k\geq 1}|x_k|^2$$

で定義する。$\mathbb{E}_c=\mathfrak{n}^{\mathbb{C}}$とおき、このノルムによる完備化を$\mathbb{H}_c$とかく。そして、

$$\mathbb{E}_c^*=\{\rho;\mathbb{E}_c\longrightarrow\mathbb{C}:\text{連続、}\mathbb{C}\text{ 値線形写像 }\}$$

とすると、Ｇｅｌ’ｆａｎｄ　ｔｒｉｐｌｅ

$$\mathbb{E}_c \subset \mathbb{H}_c \subset \mathbb{E}_c^*$$

が得られ、［２］より、次を満たす $\mathbb{E}_c^*$ 上のホワイトノイズメジャー ν_σ が得られる。

$$\int_{\mathbb{E}_c^*} e^{\frac{\sqrt{-1}}{2}\{z(\zeta_1)+\overline{z(\zeta_2)}\}} d\nu_\sigma(z) = e^{-\frac{\sigma}{2}(\zeta_1,\zeta_2)}$$

この時［３］により、$\widetilde{LH^{\mathbb{C}}}$ の $L^2(\mathbb{E}_c^*, \nu_\sigma)$ 上の表現が次のように得られる。

$L^2(\mathbb{E}_c^*, \nu_\sigma) \ni F$ と、

$$\widetilde{LH} \ni g = \exp \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \sqrt{2k-1}a_k & \cdots & r \\ & \ddots & & & \vdots \\ & & \ddots & & \sqrt{2k-1}b_k \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$$

に対し、

$$(U_\sigma(g)F)(z) = e^{\sigma(-\sqrt{-1}r - \frac{1}{4}\|\gamma\|^2 + \frac{1}{2}\sum_{k\geq 1}(2k-1)(b_k - \sqrt{-1}a_k)z_k)} F(z-\gamma)$$

ただし、

$$z = (z_1, z_2, \cdots), a = (a_1, a_2, \cdots), b = (b_1, b_2, \cdots),$$

$$\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \cdots), \gamma_k = \sqrt{-1}a_k + b_k$$

次に経路積分による表現のオペレーターの構成をする。$\widetilde{L\mathfrak{h}} \supset \widetilde{L\mathfrak{h}}_n$ を次で定める。

$$\widetilde{L\mathfrak{h}}_n = \left\{ \sum_{k\geq 1}^{n} x_k A_k - \sum_{k\geq 1}^{n} \overline{x}_k A_k^* + \lambda c; x_k \in \mathbb{C}, \lambda \in \sqrt{-1}\mathbb{R} \right\}$$

すると、$\widetilde{L\mathfrak{h}} \ni Y \longmapsto Y_n \in \widetilde{L\mathfrak{h}}_n$ となる自然な射影が考えられ、$\widetilde{L\mathfrak{h}}_n$ は、有限次元Ｈｅｉｓｅｎｂｅｒｇ　Ｌｉｅ環と同型になる。

$$\text{以後、} Y \in \widetilde{L\mathfrak{h}} \text{は、} \mathfrak{h} \text{の元 } g = \exp \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \sqrt{2k-1}a_k & \cdots & r \\ & \ddots & & & \vdots \\ & & \ddots & & \sqrt{2k-1}b_k \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$$

に対応するものとする。すると経路積分［２］により、$Y_n \in \widetilde{L\mathfrak{h}}_n$ に対して、核関数は、

$$K_{n,Y_n}(w', w, T) = e^{\sigma(-\frac{1}{2}\|w\|^2 + w'(\frac{{}^t\overline{w}}{2} + \frac{{}^t\overline{\gamma}T}{2}) + \gamma T(\frac{{}^t\overline{w}}{2} + \frac{{}^t\overline{\gamma}T}{4}) - \sqrt{-1}cT)}$$

となる。

そこで、

$$\widetilde{K}_{n,Y_n}(w',w,T)=K_{n,Y_n}(w',w,T)e^{\sigma\frac{1}{2}\|w\|^2}$$

$$=e^{\sigma(w'(\frac{{}^t\overline{w}}{2}+\frac{{}^t\overline{\gamma}}{2})+\gamma T(\frac{{}^t\overline{w}}{2}+\frac{{}^t\overline{\gamma}}{4})-\sqrt{-1}cT)}$$

と$\widetilde{K}$を置く。

$F\in L^2(\mathbb{C}^n,\frac{\sigma^n}{(2\pi)^n}e^{-\frac{\sigma}{2}\|w\|^2})$ に対して、$\mathbb{F}\in L^2_n(\mathbb{E}_c^*,\nu_\sigma)$ を、Fによって自然に定義される $\mathbb{E}_c^*$上の関数とする。ただし $L^2_n(\mathbb{E}_c^*,\nu_\sigma)\in L^2(\mathbb{E}_c^*,\nu_\sigma)$ は、n番目までの変数にのみ依存する関数の集合とする。

$(F(w_1,w_2,\cdots,w_n)=\mathbb{F}(w_1,w_2,\cdots,w_n,\cdots))$

また、

$$\mathbb{K}_Y(\zeta',z,T)=e^{\sigma(\zeta'(\frac{{}^t\overline{w}}{2}+\frac{{}^t\overline{\gamma}}{2})+\gamma T(\frac{{}^t\overline{w}}{2}+\frac{{}^t\overline{\gamma}}{4})-\sqrt{-1}cT)}$$

と定義する。ただし、$z\in\mathbb{E}_c^*,\zeta'\in\mathbb{E}_{c,n}\subset\mathbb{E}_c$である。

また、$\mathbb{E}_{c,n}$は、$\mathbb{E}_c$の部分空間で、n+1 番目以降の成分が0のものとする。

すると、

$$\int_{\mathbb{C}^n}\frac{\sigma^n dw d\overline{w}}{(2\pi)^n}e^{-\sigma\frac{1}{2}\|w\|^2}\widetilde{K}_{n,Y_n}(w',w,T)F(w)$$

$$=e^{\sigma(-\sqrt{-1}rT-\frac{1}{4}\sum_{k=1}^n(2k-1)|\gamma_k|^2T^2+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^n(2k-1)(b_k-\sqrt{-1}a_k)w_kT)}F(w-T\gamma)$$

であるので、

$$\int_{\mathbb{E}_c^*}d\nu_\sigma(z)\widetilde{\mathbb{K}}_Y(\zeta',z,T)\mathbb{F}(z)$$

$$=e^{\sigma(-\sqrt{-1}rT-\frac{1}{4}\sum_{k\geq1}^n(2k-1)|\gamma_k|^2T^2+\frac{1}{2}\sum_{k\geq1}(2k-1)(b_k-\sqrt{-1}a_k)z_kT)}\mathbb{F}(z-T\gamma)$$

$$\longrightarrow(U_\sigma(\exp TY)\mathbb{F})(z)\qquad(n\to\infty)\qquad\mathbb{F}\in L^2(\mathbb{E}_c^*,\nu_\sigma)$$

定理1

以上により、無限次元Ｈｅｉｓｅｎｂｅｒｇ群の表現に対応する核関数が、経路積分で得られる。

§3. Ｋａｃ－Ｍｏｏｄｙ－Ｌｉｅ環の表現の構成

命題 2

$$(dU_\sigma(X)F)(z) = \frac{d}{dt}|_{t=0}\,(U_\sigma(\exp tX)F)(z)$$

と dU_σを定義することにより、$\widetilde{L\mathfrak{h}}$の表現を得る。

この表現をコンプレックスリニアーに拡張することにより$\widetilde{L\mathfrak{h}^{\mathbb{C}}}$の表現を得る。

$$dU_\sigma(A) \longmapsto \sum_{k\geq 1}\frac{\partial}{\partial x_k},$$

$$dU_\sigma(A^*) \longmapsto \sigma\sum_{k\geq 1}(2k-1)x_k,$$

$$dU_\sigma(c) \longmapsto \frac{\sqrt{-1}\sigma}{2}I.$$

系 2

dU_σより、π_σを以下のように導く。

$$\begin{array}{ccc}
(\mathbb{E}_c^*, \nu_\sigma) & \longrightarrow & (\mathbb{E}_c^*, \nu_\sigma) \\
{\scriptstyle dU_\sigma}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi_\sigma} \\
(\mathbb{E}_c^*, \nu_\sigma) & \longrightarrow & (\mathbb{E}_c^*, \nu_\sigma)
\end{array}$$

$\sigma = 2$ のとき、π_σは、[4] の表現に等しい。

以上で、[4] の、$A_{1,0}$タイプの表現のオペレーターが計算できた。

$A_{k,1}$タイプについては、表現は以下のようになっている。

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} A_{k,1}U^k \longmapsto \frac{1}{2}(e^{\sum_{k\geq 1} 2u^k z_k} e^{-\sum_{k\geq 1}\frac{2}{k}u^{-k}\frac{\partial}{\partial z_k}} - 1)$$

これを変形して、次の式を得る。

$$2\sum_{k\in\mathbb{Z}} A_{k,1}U^k + c \longmapsto e^{\sum_{k\geq 1} 2u^k z_k} e^{-\sum_{k\geq 1}\frac{2}{k}u^{-k}\frac{\partial}{\partial z_k}}$$

この表現に対応するオペレーターが、§2 の経路積分（$\sigma = 2$ ）を使って、以下のように導かれる。(ただし、Y, Y_nは§2 のとうり。)

$$\lim_{n\to\infty} e^{\sum_{k=1}^n |\gamma_k|^2 T^2}\int_{\mathbb{E}_c^*} d\nu_\sigma(z)\widetilde{\mathbb{K}}_{Y_n}(\zeta', z, T)\mathbb{F}(z)$$

$$= e^{2(-\sqrt{-1}rT - \frac{1}{4}\sum_{k\geq 1}^n (2k-1) + \frac{1}{2}\sum_{k\geq 1}^n (2k-1)(b_k - \sqrt{-1}a_k)z_k T)}\mathbb{F}(z - T\gamma)$$

定理 3

§2 で求めた経路積分を上記のように変形すると、[4] の $A_{k,1}$タイプの表現に対応するオペレーターが得られる。

REFERENCES

1. A.Pressley and G.Segal, *Loop Groups*, Clarendon Press. Oxford (1986).
2. 飛田　武幸, ブラウン運動, 岩波書店 (1975).
3. T.Hashimoto, K.Ogura, K.Okamoto, R.Sawae and H.Yasunaga, *Kirillov-Kostant theory and Feynman path integrals on coadjoint orbits I*, Hokkaido. Math. Jour. **20** (1991), 353–405.
4. V.G.Kac and D.H.Peterson, *Lectures on the infinit wedge-representation and the MKP hierarchy*, Montreal University Press (1986), 140–184.
5. G.S. Agarwal and E.Wolf, *Calculus for functions of noncommuting operators and general phase -space methods in quantum mechanics I. Mapping theorems and ordering of functions of noncommuting operators*, Phys. Rev. D **2** (1970), 2161–2186.
6. R.P. Feynman, *Space–time approach to non–relativistic quantum mechanics*, Rev. Mod. Phys. **20** (1948), 367–387.
7. T.Hashimoto, K.Ogura, K.Okamoto and R.Sawae, *Kirillov-Kostant theory and Feynman path integrals on coadjoint orbits on SU(2) and SU(1,1)*, RIMS-812 **29** (1991), –.
8. L.D.Faddeev, *Introduction to Functional Method*, North-Holland Publishing Company (1976), 1–40.
9. I.B.Frenkel and V.G.Kac, *Basic Representations of Affain Lie Algebras and Dual Resonance Models*, Invent. Math. **62** (1980), 23-66.
10. I.B.Frenkel, *Orbital theory for affine Lie algebras*, Invent. Math. **77** (1984), 301-352.
11. A.Tsuchiya and Y.Kanie, *Unitary Representations of the Virasoro Algebras.*
12. A.Tsuchiya, K.Ueno and Y.Yamada, *Conformal Field Theory on Universal Family of Stable Curves with Guage Symmetries*, Adv.Studies in Pure Math. **19** (1989), 459-566.

Department of Mathematics
Faculty of Science
Hiroshima University