数理解析研究所講究録
第896巻 1995年 26-31

Trivial source modules

大阪市立大学理学部　津島行男（Yukio Tsushima）

G を有限群とし，k を標数 p の代数的閉体とする.

定義1．直既約 kG-加群 V が weight module であるとは，Q=vx(V) とするとき，Green 対応 $f_Q=(G, Q, N_G(Q))$について， $f_Q(V)$ が既約となるときをいう.

このとき，V は自明な source k をもち， $f_Q(V)$ はprojective $k[N_G(Q)/Q]$-moduleである．すなわち $(Q, f_Q(V))$ は Alperin の意味での weight である.

G の block B に対し WM(B) を B に属する weight modules の同型類の代表系とするとき，Alperin's weight conjecture は次のようにも述べられる.

<u>Alperin 予想</u>：#WM(B)= $\ell(B)$

例1．G= $\tilde{G}^F$ を Lie type の有限群，すなわち $\tilde{G}$ はreductive, connected algebraic group/k, F はFrobenius endo.（F ある巾が standard Frobenius endo. となること）．このとき，Alperin 予想は正しく，さらに次の(*) が成り立つ：

（*）

（1）V が weight module ならば，soc(V) は既約である；
（2）二つの weight modules V, W について
$V \simeq W \iff \mathrm{soc}(V) \simeq \mathrm{soc}(W)$.

上の事実は Alperin[1] で実質的に証明されている（文末参照）.

まず，Alperin 予想に関連する次の命題を証明する.

命題1． B をG のブロックとし，その defect group $\delta(B)=D$ はTI-subgroup とする．さらに，任意の $M\in IRR(B)$に対し，$hd(f_D(M))$は既約と仮定する．$N_G(D)$ のブロック b を B の Brauer correspondent とするとき，次が成り立つ．

（1） $\ell(B) \geqq \ell(b)$ ；

（2） $\ell(B) = \ell(b)$ となる必要十分条件は，任意の $V\in WM(B)$ に対し $soc(V)$ が既約となることである．このとき，（∗）が成り立つ．

［証明の概略］ $\delta(B)=D$ が TI-subgroup という仮定から，任意の $M\in IRR(B)$ に対し，$f_D(M)$ は定義可能である．また，任意の $V\in WM(B)$ に対し，その vertex は D となる．このことから，次のことが分かる．

$IRR(b)=\{W_1, W_2, \cdots, W_e\}$，$f_D^{-1}(W_i)=V_i$ $(1\leqq i\leqq e)$ とすると

$$WM(B)=\{V_1, V_2, \cdots, V_e\}.$$

さらに，$H=N_G(D)$，$IRR(B)=\{M_1, M_2, \cdots, M_r\}$ とおくと，Green 対応についてのよく知られた事実より次の同型が成り立つ：

$$Hom_{kG}(M_i, V_j) \simeq Hom_{kH}(f_D(M_i), W_j) \quad \text{for all } i, j.$$

仮定から，$hd(f_D(M_i))=W_{\tau(i)}$ とおくことができる$(1\leqq i\leqq r, 1\leqq \tau(i)\leqq e)$．このとき，上の同型から次のことが分かる．

(i) $M_i \mid soc(V_{\tau(i)})$ with multiplicity one ；

(ii) $M_i \mid soc(V_j)$ ならば，$j=\tau(i)$ ．

まず，(ii) より

$$\tau: \{1, 2, \cdots, r\} \to \{1, 2, \cdots, e\}$$

が surjective であることが分かる．実際，任意の V_j に対し，$M_i \mid soc(V_j)$ となる M_i をとれば，$j=\tau(i)$ である．従って，$\ell(B)=r \geqq e=\ell(b)$ が成り立つ．

$\ell(B) = \ell(b)$　は τ が bijective　であることと同値であり，（2）の後半も明らかである．

注意1．もし，Alperin 予想が正しければ，命題1の仮定のもとで $\ell(B) = \ell(b)$ が成り立つ．

G の　Sylow p-群 P　が巡回群ならば，kN_G (P) は単列環であり，特に，任意の直既約　kN_G (P)-加群 V　に対して，hd(V) は既約である．また，$\ell(B) = \ell(b)$ の成り立つことも周知の通りである．一方，G が単純群で，P が巡回群ならば，P は TI-subgroup である．これは単純群の分類結果を用いて，Blau[2] によって証明されている．従って，命題1より，次のことが分かる．

例2．G が単純群でその　Sylow p-群　が巡回群ならば，（＊）が成り立つ．

Weight module について，一般的な事実を補足しておこう．

注意2（Alperin[1]）.P を G　の　Sylow p-群とする．任意のweight module は誘導加群 $k_P{}^G$ の直和因子である．この事実は例1の証明において本質的な役割を持っている．

注意3（奥山[5]）．既約加群の場合は weight module　であることと，trivial source module であることとは同値である．

上の（＊）がどのような場合に成り立つかを調べるのは今後の課題であろうが，ここで Gが可解群の場合を考えることにする．この場合は奥山，および Dade によって，Alperin 予想が正しいことが知られている．

定義1．G が CR1-group　であるとは，G の任意の characteristic abelian subgroup　は巡回群となることである．

定義2．可解群 G が p'-超可解であるとは G の主組成列剰余群のうち，位数が p と素であるものはすべて巡回群であるときをいう．

以下の二つの命題では，G は可解と仮定する．

命題2． G が p'-超可解ならば，$WM(G)=IRR(G)$．

命題3．任意の素数 $q\neq p$ に対し，G の Sylow q-群が non-abelian CR1-group を involve しないならば，$WM(G)=IRR(G)$ が成り立つ．

いずれの場合も証明は上で注意した奥山の二つの結果より，$IRR(G)\subset WM(G)$，すなわち，既約加群の source が trivial module であることを示せばよい．これは，G の位数に関する帰納法によって証明される（群 H が群 T を involve するとは，H の部分群の列 $L\triangleright M$ があって，$L/M\simeq T$ となることである）．命題3の最も簡単な場合は，任意の素数 $q\neq p$ に対し，G の Sylow q- 群が abelian のときである．もちろん，non-abelian CR1-group を involve しないような非可換 q-群は存在する．

例1の証明

例1は Alperin[1] で実質的には証明されてはいるが，ポイントとなるべき点の説明がいくつか省略されているようなので，それらを埋める意味もこめてここに証明の概略を記しておく．もちろん，Curtis[4] による split BN-pairのもつ群の表現論は仮定せざるを得ない．代数群 $\tilde{G}$ に関する記号，用語は standard なものであり，それらを有限群 $G=\tilde{G}^F$ のほうにも流用する（Carter[4] 参照）．

P を G の Sylow p-群，$B=N_G(P)$ とおく（Borel subgroup)．Φを G の単純ルート系とする．B を含む G の subgroup はΦの適当な subset J によって G_J と表される(parabolic subgroup)．これに関して次のことが知られている：

(a) $G_J = L_J U_J \triangleright U_J$ (normal p-subgroup), $L_J \cap U_J = 1$;

(b) $O_p(L_J) = 1$ (Carter[3], Prop. 2.5.2);

(c) $U_J = O_p(G_J)$ （これは，(a),(b) より明らか）；

(d) $G_J = N_G(U_J)$.

最後の(d) は以下の理由による. $N_G(U_J) \supset G_J \supset B$ より, $N_G(U_J) = G_I$ と書ける ($J \subset I \subset \Phi$). よって, $U_J \subset U_I = O_p(G_I)$. ところが, αが J の線形結合で表されないような positive roots 全体を動くとき, $U_J = \Pi X_\alpha$ であるから, $J \subset I$ ならば, $U_J \supset U_I$ であり, $U_J = U_I$ となる, 従って, $I = J$ である.

M を既約 kG-加群とすると，よく知られているように, $Inv_P(M)$ は k上１次元である（生成元はいわゆる highest weight vector）. よって

$$Hom_{kG}(k_P{}^G, M) \simeq Hom_{kP}(k_P, M) = k$$

となるから,

$$hd(k_P{}^G) = M_1 \oplus \cdots \oplus M_r, \text{ ただし, } IRR(kG) = \{M_1, \cdots, M_r\}.$$

特に $k_P{}^G$ の直既約因子はせいぜい r 個である. 一方, １対１対応

$$IRR(kG) \to \{(G_J, \chi); J \subset \Phi, \chi \in L(G_J)\}$$

がある. ここで, $L(G_J)$ は G_J の linear character 全部の集合である（このとき $M \in IRR(kG)$ に (G_J, χ) が対応しておれば G_J は直線 $Inv_P(M)$ の Gにおける stabilizer である）. St を L_J の Steinberg character とし, $St \cdot \chi$ を $L_J = G_J / U_J = N_G(U_J) / U_J$ の defect 0 の character と見ると, $(U_J, St \cdot \chi)$ は Alperin のいう weight であり, 従って, G の weight module を決める. また, St の Brauer character は（p-正則元上で）0にならないから,

$\chi \neq \chi' \in L(G_J)$ ならば，$St \cdot \chi \neq St \cdot \chi'$ である．以上と注意２より

$$r \leqq \#\mathrm{WM}(kG) \leqq \#\text{indecompsable components of } k_P{}^G \leqq r$$

となり，すべて等号となる．特に，$k_P{}^G$ は丁度 r 個の直既約因子をもち，それらは G の weight modules の代表となり，head はすべて既約である．weight module の dual も weight module であるから，$\#\mathrm{WM}(kG) = \#\mathrm{IRR}(kG)$ であることと（*）が示された．これより，$\#\mathrm{WM}(B)) = \ell(B)$ が G のブロック B について成り立つ．

References

[1] J.L.Alperin:Weights for finite groups,Proc.Symposia in Pure Math.47 (1987),369-379,A.M.S.

[2] H.I.Blau:On trivial intersection of cyclic Sylow subgroups,Proc.Amer. Math.Soc.94(1985),572-576.

[3] R.W.Carter:Finite Groups of Lie type (Conjugacy Classes and Complex Characters),Wiley,1993.

[4] C.W.Curtis:Modular representations of finite groups with split (B,N)-pairs,Springer LN.131.

[5] T.Okuyama:Module correspondence in finite groups,Hokkaido Math.J.10, (1981),299-318.

[6] Y.Tsushima:Notes on trivial source modules,to appear.