数理解析研究所講究録
第 897 巻 1995 年 63-65

ε-approximate solutions in vector optimization

新潟経営大学　経営情報学部　横山一憲
(Kazunori Yokoyama)

本報告では、次のベクトル最適化問題を考える。

(P) minimize $f(x)$
subject to $g(x) \leq 0$
where $f=(f_1,\ldots,f_p)$ and $g=(g_1,\ldots,g_m)$,
$f_k(1 \leq k \leq p), g_i(1 \leq i \leq m): R^n \rightarrow R$,
$g(x) \leq 0$ means that $g_i(x) \leq 0$ for each $i=1,\ldots,m$.

許容集合 $\{x \in R^n \mid g(x) \leq 0\}$ を K とおく。このような問題について Loridan[2] は、正数 ε で近似された最適解を与え、次のような結果を示した。

Definition. [2] $f_k(x) \leq f_k(\bar{x})-\varepsilon$, for any $k=1,\ldots,p$ with at least one strict inequality. となるような $x \in K$ が存在しないとき、この $\bar{x} \in K$ を ε -approximate solution for (P) という。

Proposition. [2] $f_k(1 \leq k \leq p)$ が下に有界で $K \neq \emptyset$ ならば ε -approximate solution for (P) が存在する。

ここで、勿論 $\varepsilon=0$ であれば上記の解はよく知られた Pareto solution となり、$p=1$ であればスカラー値問題に対する ε -solution (i.e. $\inf_{x\in K} f(x)+\varepsilon \geq f(\bar{x})$) となる。
最近、Tanaka [4] で Loridan の定義と異なる新しい近似解が提案され、いくつかの結果が示された。

Definition. [4] $f_k(x) \leq f_k(\bar{x})$, for any $k=1,\ldots,p$ with at least one strict inequality. となるような $f(x) \in \{f(x) \mid x \in K, \| f(x)-f(\bar{x}) \| > \varepsilon\}$ が存在しないとき、この $\bar{x} \in K$ を ε -approximal solution for (P) という。

Proposition. [4] $f_k(1 \leq k \leq p)$ が下に有界で $K \neq \emptyset$ ならば ε -approximal solution for (P) が存在する。

Proposition. [4] $\bar{x} \in K$ が ε -approximal solution for (P) であれば ε -approximate solution for (P) となる。

上記の Proposition は ε -approximal solution for (P) が ε -approximate solution for (P) よりも強い近似解の概念であることを表している。また ε -approximate solution と同様に次の性質を持つ。

Proposition. $p=1$ のとき、ε -approximal solution はスカラー値問題に対する ε -solution (i.e. $\inf_{x\in K} f(x)+\varepsilon \geq f(\bar{x})$) となる。

Proof. $\bar{x}$ を ε -approximal solution とする。このとき $\{x \mid f(\bar{x})-\varepsilon > f(x)\} \cap K \neq \emptyset$ と仮定すると、$x \in K$ が存在して $f(\bar{x})-\varepsilon > f(x)$ となる。故に、$| f(x)-f(\bar{x}) | > \varepsilon$ and $f(\bar{x}) > f(x)$ for some $x \in K$ が成立する。これは、$\bar{x}$ が ε -approximal solution であることに矛盾する。故に for any $x \in K, f(\bar{x}) - \varepsilon \not> f(x)$

逆に $\bar{x}$ を ε -solution とする。このとき、$\bar{x}$が ε -approximal solution でないと仮定すると、$x \in K$ が存在して、$| f(x) - f(\bar{x}) | > \varepsilon$ and $f(\bar{x}) > f(x)$. 故に、$f(\bar{x}) > f(x) + \varepsilon$. 矛盾。□

ここで、二つの近似解を得るための十分条件を以下の条件のもとで示す。

Assumption. f_k :convex, bounded from below for each $k = 1, ..., p$.
g_i : convex for each $i = 1, ..., m$.
$K \neq \emptyset$

Proposition. $\bar{x} \in K$ が次の条件を満たすならば $\bar{x} \in K$ はε -approximate solution for (P) となる。

$$\theta \in \partial_{\varepsilon_k^k} f_k(\bar{x}) + \textstyle\sum_{j \neq k} \partial_{\varepsilon_j^k} \mu_j^k f_j(\bar{x}) + \sum_{i=1}^m \partial_{\varepsilon_i^k} \lambda_i^k g_i(\bar{x})$$
$$\textstyle\sum_{j=1}^p \varepsilon_j^k + \sum_{i=1}^m \varepsilon_i^k - \varepsilon \leq \sum_{i=1}^m \lambda_i^m g_i(\bar{x}) + \sum_{j \neq k} \mu_j^k \varepsilon \leq 0 \text{ for each } k = 1, ..., p$$

となる $\varepsilon_j^k \geq 0$ $\varepsilon_i^k \geq 0$ $\mu_j^k \geq 0$,$\lambda_i^k \geq 0 (k, j = 1, ...p \ \ i = 1, ...m)$, が存在する。

Proof.(略証) $\bar{x}$ が ε -approximate solution であることと$\bar{x}$ が ε -soluition for the scalar problem (P_k) for any $k = 1, ..., p$ であることは同値。
(P_k) minimize $f_k(x)$ s.t. $g_i(x) \leq 0, f_j(x) - f_j(\bar{x}) + \varepsilon \leq 0 (j \neq k)$.
[3, Theorem 2.4.] を適用すると命題は証明される。□

Proposition. $\bar{x}$ が次の条件を満たすならば $\bar{x}$ はε -approximal solution for (P) となる。

$$\tfrac{\eta M}{\varepsilon} B^* \subset \textstyle\sum_{k=1}^p \partial_{\eta_k} f_k(\bar{x}) + \sum_{i=1}^m \partial \lambda_i g_i(\bar{x}) \text{ and } \sum_{k=1}^p \eta_k = \eta \text{ for any } \eta \geq 0$$
但し M は f の $\bar{x}$ での locally Lipscitz 定数

となる $\lambda_i \geq 0 (i = 1, ..., m), \eta_k \geq 0 (k = 1, ..., p)$ が存在する。

Proof. (略証) $\bar{x}$ が、optimal solution for the problem
minimize $\sum_{k=1}^p f_k(x) + \delta_K(x) - \delta_G(x)$ where $G = \{x \in R^n \mid M \| x - \bar{x} \| \leq \varepsilon\}$
ならば、$\bar{x}$ は ε -approximal solution for (P) となる。ここで、G は convex なので上記の問題は D.C. problem となる。[1, Theorem 4.1] より、$\bar{x}$ が optimal for the D.C. problem となる十分条件は、
for any $\eta \geq 0, \partial_\eta \delta_G(\bar{x}) \subset \partial_\eta (\sum_{k=1}^p f_k(.) + \delta_K(.))(\bar{x})$,
が成立することである。左辺は次のようになる。

$$\partial_\eta \delta_G(\bar{x}) = \textstyle\bigcup_{0 \leq \bar{\eta} \leq \eta + (\lambda h)(\bar{x})} \partial_{\bar{\eta}} \lambda h(\bar{x}) \text{ where } h(x) = M \| x - \bar{x} \| - \varepsilon$$

$$= \textstyle\bigcup_{0 \leq \bar{\eta} \leq \eta - \lambda \varepsilon} \partial_{\bar{\eta}} \lambda (M \| . - \bar{x} \|)(\bar{x})$$

$$\subset \eta M B^* / \varepsilon$$

右辺は次のようになる。

$$\partial_\eta (\textstyle\sum_{k=1}^p f_k(.) + \delta_K(.))(\bar{x}) = \bigcup_{(\eta_k \geq 0, \sum_{k=1}^{p+1} \eta_k = \eta)} \{\sum_{k=1}^p \partial_{\eta_k} f_k(\bar{x}) + \partial_{\eta_{p+1}} \delta_K(\bar{x})\}$$

$$\supset \textstyle\sum_{k=1}^p \partial_{\eta_k} f_k(\bar{x}) + \partial_0 \delta_K(\bar{x})$$

$\supset \sum_{k=1}^{p} \partial_{\eta_k} f_k(\bar{x}) + \bigcup_{\lambda \geq 0} \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \partial g_i(\bar{x})$

$\supset \sum_{k=1}^{p} \partial_{\eta_k} f_k(\bar{x}) + \sum_{i=1}^{m} \partial \lambda_i g_i(\bar{x})$

従って仮定の包含関係が満足されると$\partial_\eta \delta_G(\bar{x}) \subset \partial_\eta(\sum_{k=1}^{p} f_k(.) + \delta_K(.))(\bar{x})$ が成立するので、命題が証明された。□

References

[1]J.-B.Hiriart Urruty, From convex optimization to nonconvex optimization, Nonsmooth optimization and related topics, F.H.Clarke et al. eds.,Plenum (1989),219-239.

[2]P.Loridan, ε - Solutions in vector minimization problems, J.O.T.A.,Vol.43(1984),256-276

[3]D.D.Strodiot, V.H.Nguyen and N.Heukemes, ε -Optimal solutions in nondifferentiable programming and related questions, Mathematical Programming, Vol. 25(1983),307-328.

[4]T.Tanaka, A new approach to approximation of solutions in vector optimization problems, APORS '94(Fukuoka)(1994)

[5]D.J.White, Epsilon efficiency, J.O.T.A.,Vol.49(1986),319-337

[6]K.Yokoyama, ε -Optimality criteria for vector minimization problems via exact penalty functions, J.M.A.A. Vol.187(1994),296-305.