数理解析研究所講究録
第 898 巻 1995 年 127-131

EXISTENCE OF NODAL SOLUTIONS FOR SEMILINEAR ELLIPTIC EQUATIONS

宮崎大学工学部　梶木屋龍治　(Ryuji Kajikiya)

§1 序.

本講演では、次の半線形楕円型偏微分方程式の零点を持つ球対称解の存在について報告する。

$$\begin{cases} \Delta u + f(u) = 0, & x \in \Omega, \\ u(x) = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

ここで Ω は 球の外部領域 、又は 全空間 $\boldsymbol{R}^n$, $n \geq 2$ とする。球対称解 $u = u(r)$, $r = |x|$ の満たすべき方程式は、

(1)
$$u'' + \frac{n-1}{r}u' + f(u) = 0,$$

であり、境界条件は $\Omega = \{x : |x| > R\}$ 、$\Omega = \boldsymbol{R}^n$、のときそれぞれ次の条件となる。

(2)
$$u(R) = 0, \qquad \lim_{r\to\infty} u(r) = 0;$$

(3)
$$u'(0) = 0, \qquad \lim_{r\to\infty} u(r) = 0.$$

今後、方程式 (1) と境界条件 (2) を組にしたもの又は、(1) と境界条件 (3) を組にしたものを考える。次の仮定 (f0) $\sim$ (f4) を考える。

(f0)　関数 $f(u)$ は連続であり、$f(0) = 0$ を満たす。さらに方程式 (1) の初期値問題に対する解の一意性を仮定する。

(f1)　十分小さな $|s| > 0$ に対して、$sf(s) < 0$.

(f2)　$\displaystyle\lim_{s\to\pm\infty} \frac{f(s)}{s} = +\infty.$

(f3)　次の条件を満たす正定数 $c_0 > 0$ 、$\delta_0 > 0$ が存在する。

$$0 < F(s) \leq c_0 sf(s), \qquad s \in (-b-\delta_0, -b) \cup (a, a+\delta_0),$$

ただし $a, b, F(u)$ は、次のように定義する。

(4)
$$a = \min\{s > 0 : F(s) = 0\} > 0, \quad b = -\max\{s < 0 : F(s) = 0\} > 0,$$

$$F(u) = \int_0^u f(s)ds.$$

(f4)　$\displaystyle\limsup_{s\to\pm\infty} \frac{sf(s)}{F(s)} < \infty \quad (n = 2 \text{ のとき}), \quad \limsup_{s\to\pm\infty} \frac{sf(s)}{F(s)} < \frac{2n}{n-2} \quad (n \geq 3 \text{ のとき}).$

解の存在を示すときに、shooting method を使うので (f0) を必要とする。もし $f(s)$ が局所 Lipschitz 連続で、$f(0) = 0$ を満たすならば (f0) は成り立つ。しかし、$f(s)$ が局所

Lipschitz 連続でないときにも興味ある方程式（例 1 参照）があるので、仮定 (f0) の形にしておく。仮定 (f3) の定数 $a, -b$ は (f1),(f2) により well-defined である。仮定 (f2),(f4) は、$f(u)$ が $u = \pm\infty$ で それぞれ superlinear, subcritical の増大度を持つことを意味する。(f4) は Ω が球の外部領域のときは必要でない。

以下の結果が得られた。

定理 1. ($\Omega = \{x : |x| > R\}$ の場合) 境界値問題 (1)–(2) を考える。(f0), (f1), (f2), (f3) を仮定する。このとき (1)–(2) の解の列 $\{u_k\}_{k=0}^{\infty}$、$\{v_k\}_{k=0}^{\infty}$ で次の性質を持つものが存在する。各 u_k, v_k は区間 (R, ∞) にちょうど k 個の零点を持ち、かつ $u_k'(R) > 0 > v_k'(R)$ を満たす。

定理 2. ($\Omega = \boldsymbol{R}^n$ の場合) 境界値問題 (1)–(3) を考える。(f0) から (f4) までのすべての条件を仮定する。このとき (1)–(3) の解の列 $\{u_k\}_{k=0}^{\infty}$、$\{v_k\}_{k=0}^{\infty}$ で次の性質を持つものが存在する。各 u_k, v_k は区間 $(0, \infty)$ にちょうど k 個の零点を持ち、かつ $u_k(0) > 0 > v_k(0)$ を満たす。

定理 3. 定理 1 及び 2 の仮定において (f3) を次の条件 (f3') に置き換える。

(f3') $\quad sf(s) > 0, \qquad s \in (-\infty, -b] \cup [a, \infty).$

ここで a, b は (4) によって定義される。このとき定理 1,2 で得られた解の列 $\{u_k\}, \{v_k\}$ は次を満たす。定理 1 において

$$0 < u_0'(R) < u_1'(R) < \cdots \uparrow \infty, \qquad 0 > v_0'(R) > v_1'(R) > \cdots \downarrow -\infty.$$

定理 2 において

$$0 < u_0(0) < u_1(0) < \cdots \uparrow \infty, \qquad 0 > v_0(0) > v_1(0) > \cdots \downarrow -\infty.$$

$\Omega = \boldsymbol{R}^n$ のとき定理 2 に関連した次の結果が知られている ([2, 3, 5])。$f(u)$ が仮定 (f0), (f1), (f2) 及び

($f3_*$) $\quad f(a) \neq 0$ かつ $f(-b) \neq 0$,

($f4_*$) $\quad$ ある $1 < p < (n+2)/(n-2)$ が存在して $u \to \pm\infty$ のとき $f(u) \sim |u|^{p-1}u.$

を満たせば、定理 2 と同じ結論が成り立つ。

定理 1,2 の仮定 (f3), (f4) がそれぞれ ($f3_*$), ($f4_*$) より弱い仮定であることは容易に確かめられる。すなわち定理 2 は従来の結果を拡張し、より広いタイプの方程式についても球対称解の存在を保証してくれる。定理 3 に関連した結果は、ほとんど知られていないように思われる。

例 1. 次のような方程式に定理 1,2,3 が適用できる。

$$\Delta u + u \log |u| = 0,$$

$$\Delta u + |u|^{p-1}u - |u|^{q-1}u = 0,$$

ここで $\Omega=\{x:|x|>R\}$ 又は, $\Omega=\boldsymbol{R}^2$ のときは、$1\le q<p<\infty$ を仮定し、$\Omega=\boldsymbol{R}^n, n\ge 3$ のときは、$1\le q<p<(n+2)/(n-2)$ を仮定する。

例 2.

$$\Delta u+f(u)=0,$$

$$f(u)=\begin{cases}(u-2\pi)^p & (u>2\pi)\\ -|u+2\pi|^p & (u<-2\pi)\\ -\sin u & (|u|\le 2\pi),\end{cases}$$

ここで、p については定理 1 と同じ仮定をおく。この $f(u)$ に対して $a=b=2\pi$, $f(a)=f(-b)=0$ となるので (f3$_*$) は成り立たないが、(f3) は成り立つので定理 1,2 が適用できる。

§2 定理の証明.

定理 1 、2 は shooting method を使って同じ手法で証明できる。以下、定理 2 の証明の概略を説明する。次の初期値問題

$$u''+\frac{n-1}{r}u'+f(u) = 0, \qquad r>0, \tag{5}$$

$$u'(0)=0, \qquad u(0) = \lambda \tag{6}$$

の解を $u(r,\lambda)$ と表すと、これは $r\in[0,\infty)$ 上で定義される。これを示す。まず energy 関数 (= Lyapunov 関数) を次式により定義する。

$$\begin{aligned} E(r) &= E(r,\lambda)\equiv\frac{1}{2}u'(r,\lambda)^2+F(u(r,\lambda)),\\ F(u) &= \int_0^u f(u)du. \end{aligned}$$

今 $u(r)$ が (5) の解だから

$$E'(r)=-\frac{n-1}{r}u'(r)^2\le 0,$$

が成り立ち、$E(r)$ は単調減少関数である。ゆえに、

$$\frac{1}{2}u'(r)^2+F(u(r))=E(r)\le E(0), \qquad (r\ge 0),$$

となる。一方、仮定 (f2) より $F(u)\to+\infty$ $(u\to\pm\infty)$ であるから上式より、ある正定数 Cが存在して、

$$|u(r)|+|u'(r)|\le C \qquad (r\ge 0)$$

が成り立つ。よって $u(r)$ は有界な大域解であることがわかる。次の記号を導入する。

$$N[\lambda]=u(r,\lambda) \text{ が区間 } [0,\infty) \text{ に持つ零点の個数}.$$

$$\underline{u}(\lambda)=\liminf_{r\to\infty}u(r,\lambda), \qquad \overline{u}(\lambda)=\limsup_{r\to\infty}u(r,\lambda).$$

定理 2 の結論のうちで解の列 $\{u_k\}_{k=0}^{\infty}$ の存在についてのみ説明する。そのため、$k \geq 0$ に対して次の集合を定義する。

$$
\begin{aligned}
U_{2k} &= \{\lambda \in (a,\infty) : N[\lambda] = 2k, \quad 0 < \underline{u}(\lambda) \leq \overline{u}(\lambda) < a\}, \\
U_{2k+1} &= \{\lambda \in (a,\infty) : N[\lambda] = 2k+1, \quad -b < \underline{u}(\lambda) \leq \overline{u}(\lambda) < 0\}, \\
V_{2k} &= U_{2k} \cup \{\lambda \in (a,\infty) : N[\lambda] = 2k, \quad \lim_{r\to\infty} u(r,\lambda) = a\}, \\
V_{2k+1} &= U_{2k+1} \cup \{\lambda \in (a,\infty) : N[\lambda] = 2k+1, \quad \lim_{r\to\infty} u(r,\lambda) = -b\}, \\
W_k &= \{\lambda \in (a,\infty) : N[\lambda] = k, \quad \lim_{r\to\infty} u(r,\lambda) = 0\},
\end{aligned}
$$

これらの集合 U_k, V_k, W_k は空集合かも知れない。定理 2 を得るためには、すべての $k \geq 0$ に対して $W_k \neq \emptyset$ を示せばよい。そのために次の四つの補題を準備する。

補題 1. $\lim_{\lambda\to\pm\infty} N[\lambda] = +\infty$ が成り立つ。ゆえに $k \geq 0$ を固定するとき U_k, V_k, W_k は、それぞれ有界集合である。

補題 2. (i) もし $V_k \neq \emptyset$ ならば、$\sup V_k \in \cup_{j=0}^{k} W_j$.
(ii) もし $W_k \neq \emptyset$ ならば、$\sup W_k \in \cup_{j=0}^{k} W_j$.

補題 3. $W_k \neq \emptyset$ かつ $\sup W_k \in W_k$ を仮定する。このとき、ある $\varepsilon_k > 0$ が存在して $(\sup W_k,\ \sup W_k + \varepsilon_k) \subset U_k \cup U_{k+1}$.

補題 4. ある$\varepsilon > 0$ が存在して $(a, a+\varepsilon) \subset V_0$ が成り立つ。

定理 2 の証明. 数学的帰納法により示す。まず補題 4 より $V_0 \neq \emptyset$。補題 1 より V_0 は有界集合なので $\lambda_0 = \sup V_0$ が定義できて、補題 2 (i) より $\lambda_0 \in W_0$. よって $W_0 \neq \emptyset$ となり補題 2 (ii) より $\mu_0 = \sup W_0 \in W_0$. このとき補題 3 の仮定が満足されて、ある $\varepsilon_0 > 0$ に対して

$$(\mu_0, \mu_0 + \varepsilon_0) \subset U_0 \cup U_1 \tag{7}$$

が成り立つ。今、

$$(\mu_0, \mu_0 + \varepsilon_0) \cap U_0 = \emptyset \tag{8}$$

を示そう。この集合が空集合でないと仮定して、ここから一点 λ をとる。一方、$\lambda_0, \mu_0 \in W_0$ であり、$\mu_0 = \sup W_0$ なので$\lambda_0 \leq \mu_0$ となる。ゆえに $\lambda_0 \leq \mu_0 < \lambda$ かつ $\lambda \in U_0 \subset V_0$ となっている。最後の包含関係 $U_0 \subset V_0$ は、U_0, V_0 の定義より明らかである。結局$\lambda_0 < \lambda$ かつ $\lambda \in V_0$ となるが、これは$\lambda_0 = \sup V_0$ に反する。この矛盾により (8) を得る。(7) と (8) により $(\mu_0, \mu_0 + \varepsilon_0) \subset U_1 \subset V_1$ となり $V_1 \neq \emptyset$ となる。よって$\lambda_1 = \sup V_1$ が定義できる。この論法を繰り返して $V_k \neq \emptyset$, $W_k \neq \emptyset$ $(k \geq 0)$ を得る。

(証明終)

定理 3 の証明. (f3') の仮定のもとで、すべての$\lambda \neq 0$ に対して解 $u(r,\lambda)$ は、区間 $[0,\infty)$ に高々有限個の零点しか持たないことが証明できる。もし、定理 2 の $\{u_k(0)\}_{k=0}^{\infty}$ が有界で

あれば、適当な部分列がある極限Λ に収束する。このとき 各 $u_k(r)$ が $[0,\infty)$ に k 個の零点を持つことを使って、$u(r,\Lambda)$ が $[0,\infty)$ に無限に多くの零点を持つことが証明できる。これは、先に示した事実に反している。結局 $\{u_k(0)\}$ は非有界でなければならない。

(証明終)

各補題及び定理の詳細な証明については、[4] を参照されたい。

References

[1] H. Berestycki and P.-L. Lions, Nonlinear scalar field equations, II. Existence of infinitely many solutions, Arch. Rational Mech. Anal. 82 (1983), 347–375.

[2] M. Grillakis, Existence of nodal solutions of semilinear equations in $\boldsymbol{R}^n$, J. Differential Equations 85 (1990), 367–400.

[3] C. Jones and T. Küpper, On the infinitely many solutions of a semilinear elliptic equation, SIAM J. Math. Anal. 17 (1986), 803–835.

[4] R. Kajikiya, Nodal solutions of superlinear elliptic equations in symmetric domains, To appear in Adv. Math. Sci. Appl.

[5] K. McLeod, W. C. Troy and F. B. Weissler, Radial solutions of $\Delta u + f(u) = 0$ with prescribed numbers of zeros, J. Differential Equations 83 (1990), 368–378.

[6] W. A. Strauss, Existence of solitary waves in higher dimensions, Comm. Math. Phys. 55 (1977), 149–162.