数理解析研究所講究録
第 899 巻 1995 年 34-37

Some Properties of Reproducing Kernels on an Infinite Network

広島工大 村上 温(Atsushi Murakami)
島根大理 山崎 稀嗣(Maretsugu Yamasaki)

1. 準備

$N=\{X,Y,K,r\}$ を局所有限でセルフループを持たない（高々可算）無限連結グラフとする。ただし，X は点の高々可算集合，Y は弧の高々可算集合，K は点と弧の結合関数，r はY 上の正の実数値関数（抵抗）とする．X 上の実数値関数の全体を $L(X)$，有限集合の外で0となる X 上の実数値関数の全体を $L_0(X)$ で表す．関数 $u\in L(X)$ の離散微分（差分） du とディリクレ和 $D(u)$ を

$$du(y):=-r(y)^{-1}\sum_{x\in X}K(x,y)u(x)$$
$$D(u):=\sum_{y\in Y}r(y)[du(y)]^2$$

と定義する．ディリクレ和が有限な X 上の関数の全体を $D(N)$ で表す．関数$u,v\in D(N)$ の相互ディリクレ和を

$$D(u,v):=\sum_{y\in Y}r(y)[du(y)][dv(y)]$$

と定義する．$D(N)$ は内積：

$$<u,v>:=D(u,v)+u(x_0)v(x_0)$$

($x_0\in X$ は固定）に関してヒルベルト空間となる．この空間内での $L_0(X)$ の閉包を $D_0(N)$ で表し，その要素をディリクレポテンシャルと呼ぶ.

任意に固定された $x_0\in X$ に対して，

$$D(N;x_0):=\{u\in D(N);u(x_0)=0\}$$

は内積：$D(u,v)$ に関してヒルベルト空間となる.

本稿では，$D(N;x_0)$に対する再生核 k_a の性質を利用して，ネットワークの極値的長さに関する三角不等式を証明し，さらにネットワーク上の流れ（フロー）に関する極値問題の研究への $D_0(N)$ の再生核 g_a の応用について報告する．5節の定理8を除けば，本稿の結果は近刊の論文[4]と同じであるので，証明を省略する.

2. $D(N;x_0)$ の再生核 k_a

点 $a\in X_0:=X-\{x_0\}$ を任意に固定するとき，対応: $u\in D(N;x_0)\longrightarrow u(a)$ は連続線形汎関数となることから，リースの定理により

$$u(a) = D(u, k_a) \qquad \forall u \in D(N; x_0)$$

となる関数（再生核）$k_a \in D(N; x_0)$ が存在する．

補助定理１． 全ての $x \in X$ に対して，$0 \leq k_a(x) \leq k_a(a)$ が成り立つ（[3] 参照）．また $k_a/k_a(a)$ は次の極値問題の最適解である：

$$d(x_0, a) := \inf\{D(u); u \in L(X), u(x_0) = 0, u(a) = 1\}$$

更に，$d(x_0, a) = 1/k_a(a)$ が成り立つ．

異なる２点 a, b 間の極値的長さ $\lambda(a, b)$ は，Y 上の非負実数値関数 W のうち容量 rW に関する a, b 間の最小仕事問題（最短経路問題）の値が１以上となるもの，すなわち，a と b を結ぶすべての道 P に対し

$$\sum_{y \in P} r(y)W(y) \geq 1$$

を満たす W についてのエネルギー

$$H(W) := \sum_{y \in Y} r(y)W(y)^2$$

の下限の逆数として定義される．$\lambda(a, b) = d(a, b)^{-1}$ が成り立つ（[6] 参照）．

定理１． 異なる２点 $a, b \in X_0$ について，$u_{ab} := k_b - k_a$ とおく．関数

$$v_{ab} := [u_{ab} - u_{ab}(a)]/D(u_{ab})$$

は極値問題 $d(a, b)$ に対する最適解であり，次の関係式が成り立つ：

$$\lambda(a, b) = k_a(a) - 2k_a(b) + k_b(b)$$

定理２． 異なる３点 x_0, a, b について

$$\lambda(a, b) = \lambda(x_0, a) + \lambda(x_0, b) - 2k_a(b)$$

定理３． 極値的長さは三角不等式を満たす．

有限ネットワークの場合には，文献[1] でこのことが証明されている．

３． $D_0(N)$ に対する再生核 g_a

無限ネットワーク N が双曲型であると仮定すると，任意の点 $a \in X$ に対して条件

$$D(v, g_a) = v(a) \qquad \forall v \in D_0(N)$$

を満たす関数（再生核）$g_a \in D_0(N)$ が存在して一意的である．g_a は a を極とする N のグリーン関数と呼ばれる（[7] 参照）．

定理4．異なる２点　a, b に対し，$u^*_{ab} := g_b - g_a$ とおく．関数 $v^*_{ab} := u^*_{ab}/D(u^*_{ab})$ は次の極値問題の最適解である：

$$\rho(a,b) := \inf\{D(u); u \in D_0(N), u(b) - u(a) = 1\}.$$

４．流れに関する極値問題

条件

$$\sum_{y \in Y} K(x,y)w(y) = 0 \qquad \forall x \in X - \{a,b\}$$

$$I(w) := -\sum_{y \in Y} K(a,y)w(y) = \sum_{y \in Y} K(b,y)w(y)$$

を満たす関数 $w \in L(Y)$ を点 a から点 b への流れ（フロー）といい，その集合を $F(a,b)$ で表す．ヒルベルト空間 $L_2(Y;r) := \{w \in L(Y); H(w) < \infty\}$ における集合 $F(a,b) \cap L_0(Y)$ の閉包を $F_2(a,b)$ として，次の極値問題を考える：

$$d^*(a,b) := \inf\{H(w); w \in F(a,b), I(w) = 1\}$$

$$d^*_0(a,b) := \inf\{H(w); w \in F_2(a,b), I(w) = 1\}$$

関係式 $d(a,b)d^*_0(a,b) = 1$ は既知である（[6] 参照）．

定理5．$\rho(a,b)d^*(a,b) = 1$ が成り立つ．更に，$\tilde{w} := -d(g_b - g_a)$ は $d^*(a,b)$ に対する最適解である．

定理 6．$d^*(a,b) = d^*_0(a,b)$ が成り立つための必要十分条件は $d(g_b - g_a) \in F_2(a,b)$ である．

５．関数としての $\lambda(x_0, x)$

関数 $f(x) := k_x(x) = \lambda(x_0, x)$ $(x \in X - \{x_0\})$, $f(x_0) := 0$ の性質を調べるために，離散ラプラシアンを計算する．

$$\triangle f(a) := -t(a)f(a) + \sum_{x \in X} t(x,a)f(x)$$

$$t(x,a) := \sum_{y \in Y} r(y)^{-1} \mid K(x,y)K(a,y) \mid \ (x \neq a), \qquad t(a,a) := 0$$

$$t(a) := \sum_{y \in Y} r(y)^{-1} \mid K(a,y) \mid$$

定理２から

$$f(x) = \lambda(a,x) - k_a(a) + 2k_a(x) \qquad (x \neq a)$$

であるから，

定理 7. 次の公式が成り立つ：

$$\triangle f(x_0)=\sum_{x\in X} t(x,x_0)\lambda(x,x_0)$$

$$\triangle f(a)=\sum_{x\in X} t(x,a)\lambda(x,a)-2$$

特に，N が２次元格子状領域で $r=1$ の場合には，$t(x,a)=1$，$\lambda(x,a)=1/2$ であるから，

$$\triangle f(x_0)=2, \qquad \triangle f(a)=0\ (x\neq a)$$

が成り立つ。

また特に，N が有限ネットワークの場合には

$$\sum_{x\in X}\triangle u(x)=0 \qquad \forall u\in L(X)$$

であることに注意すると，定理７により

定理８. N が有限ネットワークならば次の関係が成り立つ：

$$\sum_{a\in X}\sum_{x\in X} t(x,a)\lambda(x,a)=2\mid X\mid -2$$

ただし，$\mid X\mid$ は集合 X の要素の個数を表す.

この結果は Foster の平均公式（[5], 定理 2.11 参照）である.

参考文献

[1] R.J. Duffin, Distributed and lumped networks, J. Math. Mech. 8(1959), 793-826.

[2] R.J. Duffin, The extremal length of a network, J. Math. Anal. Appl. 5(1962), 200-215.

[3] A. Murakami, Kuramochi boundaries of infinite network and extremal problems, Hiroshima Math. J. 24(1994), 234-256.

[4] A. Murakami, M. Yamasaki and Y. Yone-e, Some properties of reproducing kernels on an infinite network, Mem. Fac. Sci. Shimane Univ. 28(1994), to appear.

[5] P. Soardi, Potential theory on infinite networks, Lecture Notes in Mathematics 1590, Springer-Verlag, 1994.

[6] M. Yamasaki, Extremum problems on an infinite network, Hiroshima Math. J. 5(1975), 223-250.

[7] M. Yamasaki, Discrete potentials on an infinite network, Mem. Fac. Sci. Shimane Univ. 13(1979), 31-44.