数理解析研究所講究録
第 899 巻 1995 年 72-79

ファジイ数間のあるパラメトリックな全順序関係とその応用について

創価大・工　　古川　長太 (Nagata Furukawa)

1. はじめに

目的関数がファジイ数で与えられるような最適化問題を、ファジイマックス順序基準の下で解くと、ファジイマックス順序が半順序であるために、一般に最大解（最小解)は存在することなく、非常に多くの極大解（極小解）が存在する。ファジイ線形計画の場合は、クリスプな多目的線形計画問題に変換されるので、極大解（極小解）のすべてを求めることは比較的容易である。これに対してファジイ動的計画問題では、ことはそれほど容易ではない。本報告では、主としてファジイ動的計画問題に有効である最適化基準として、パラメトリックなものを幾つか紹介する。これらを用いて最適化を試みることにより、ファジイマックス順序に関する最大解（最小解）が存在する場合はそれを、存在しない場合は極大解（極小解）のうち重要なものはすべて検出できることが示される。

なお本報告は、参考文献で挙げた報告者自身によるものの続編で、一部分それと重複していることを付記しておく。

2. ファジイ数とファジイマックス順序

一般にファジイ集合 A, B のメンバーシップ関数を μ_A , μ_B で表す。

定義 2.1　μ_A が次の (i), (ii) をみたすとき、Aをファジイ数とよぶ。

(i) $\mu_A : \mathbf{R} \to [0, 1]$,

(ii) 実数 m が一意に存在して次をみたす:

$$\begin{cases} \mu_A(m) = 1, \\ \mu_A(\cdot) \text{ is nondecreasing on } (-\infty, m], \\ \mu_A(\cdot) \text{ is nonincreasing on } [m, +\infty). \end{cases}$$

ファジイ数 A に対して上の (ii) で定まる m を A の center とよび、m_A で表す。同様にファジイ数 B , C の center を m_B , m_C とかく。

ファジイ数の全体を $\mathbf{F}$ で表す。実数はファジイ数の特別な場合であって、

$$\mathbf{R} \subset \mathbf{F}$$

の関係が成立する。

定義 2. 2 $\mathbf{F}$ の要素 A , B に対して

$$A \preceq B \underset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} \text{(i)} \;\; m_A \le m_B , \\ \text{(ii)} \; m_A \le \exists c \le m_B \\ \qquad \text{such that} \\ \qquad \begin{bmatrix} \mu_A(x) \ge \mu_B(x) & \forall x < c , \\ \mu_A(x) \le \mu_B(x) & \forall x > c . \end{bmatrix} \end{cases}$$

上の定義は表現は異なるが、Dubois - Prade が提案した**ファジイマックス順序** (fuzzy max order) と同値である。

補題 2. 1 実数 a, b に定義 3.2 の大小関係を適用すると

$$a \preceq b \Leftrightarrow a \le b .$$

定理 2. 1 定義 2. 2 で導入した大小関係は $\mathbf{F}$ の上で半順序の公理をみたす。

定義 2. 3 $L : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ は次の条件をみたすとする。

(i) $L(x) = L(-x) \quad \forall x \in \mathbf{R}$,

(ii) $L(x) = 1 \quad \text{iff} \quad x = 0$,

(iii) L は $[\,0 , +\infty)$ 上で広義単調減少,

(iv) $x_0 = \inf\{\, x > 0 \mid L(x) = 0 \,\}$ とおくとき $0 < x_0 < +\infty$ が成り立つ。

このとき L を型関数 (shape function)と呼び、(iv) の x_0 を L の零点と呼ぶ。

定義 2. 4 m を任意の実数、 α を任意の正数とする。ファジイ数 A のメンバーシップ関数 μ_A が型関数 L を使って

$$\mu_A(x) = L(\,(x - m)/\alpha\,) \vee 0 , \quad x \in \mathbf{R}, \tag{2.1}$$

と表されるとき、Aを ***L* - ファジイ数**とよぶ。

(2. 1) における m は、定義 2.1 により A の center である。(2.1) における α を A の偏差係数(deviation parameter) とよぶ。$\alpha = 0$ のときは (3.1) 式 は定義出来ないが、そのとき A は 実数 m であると定義する。

簡単のために L -ファジイ数 (3.1) をパラメータで表現して

$$A = (m, \alpha)_L$$

と書く。

定理 2. 2 L を型関数、x_0 をその零点とする。このとき

$$A = (m, \alpha)_L,\ B = (n, \beta)_L,$$
$$\alpha \geq 0, \beta \geq 0,$$

に対して次の関係が成立する。

$$A \preceq B \Leftrightarrow x_0 |\alpha - \beta| \leq (n - m). \tag{2.2}$$

3. パラメトリックな全順序関係

目的関数がファジイ数であるような数理計画問題では、問題のスケールが大きいとファジイマックス順序に関する極大解(極小解)の意味の最適解の個数は、一般に極めて多くなる。これを更にしぼり込むにはいろいろな方法が考えられるが、ここでは L -ファジイ数のパラメータに着目した順序を導入する。

定義 3.1 $0 \leq \lambda \leq 1$ を任意に与えておく。 $A = (m, \alpha)_L,\ B = (n, \beta)_L$ に対して次のように定義する。

$$A \leq_\lambda B \underset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} \text{(i)}\ \ A \preceq B, \\ \quad \text{or} \\ \text{(ii)}\ \ \lambda x_0 |\alpha - \beta| < n - m < x_0 |\alpha - \beta|, \\ \quad \text{or} \\ \text{(iii)}\ \ |n - m| < \lambda x_0 (\beta - \alpha). \end{cases}$$

$$A \leq^{\lambda} B \underset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} \text{(i)} \ \ A \preceq B, \\ \quad \text{or} \\ \text{(ii)} \ \ 0 < \lambda x_0(\beta - \alpha) \leq |n - m| < x_0(\beta - \alpha), \\ \quad \text{or} \\ \text{(iii)} \ \ 0 < n - m < \lambda x_0 |\alpha - \beta|, \\ \quad \text{or} \\ \text{(iv)} \ \ m = n \ \text{ and } \ \alpha < \beta. \end{cases}$$

定義 3. 2 $A=(m,\alpha)_L,\ B=(n,\beta)_L$ に対して、

$$A \succ\!\prec B \underset{\text{def}}{\Leftrightarrow} [\text{neither } A \preceq B \text{ nor } B \preceq A \text{ holds}].$$

補題 3. 1 定義 3.1 の 2 通りの定義のそれぞれにおいて各 case は互いに排反であって、(i) 以外の各 case では $A \succ\!\prec B$ が成立する。

補題 3. 2 $A=(m,\alpha)_L,\ B=(n,\beta)_L,\ C=(l,\gamma)_L,\ \mu \geq 0$ に対して次のことが成立する。

(i) $A \leq_{\lambda} B \Longrightarrow \mu A \leq_{\lambda} \mu B,\ A \oplus C \leq_{\lambda} B \oplus C,$

(ii) $A \leq^{\lambda} B \Longrightarrow \mu A \leq^{\lambda} \mu B,\ A \oplus C \leq^{\lambda} B \oplus C.$

定理 3. 1 定義 3.1 の 2 通りの大小関係はいずれも、L-ファジイ数の集合上の全順序関係である。

補題 3. 3 定義 3.1 は、特に $\lambda = 0$ or 1 の場合は次のようになる。

$$A \leq_0 B \Leftrightarrow m \leq n$$

$$A \leq_1 B \Leftrightarrow \begin{cases} \text{(i)} \ \ A \preceq B \\ \quad \text{or} \\ \text{(ii)} \ \ |m - n| < x_0(\beta - \alpha) \end{cases}$$

$$A \leq^0 B \Leftrightarrow \begin{cases} \text{(i)}\ \ A \preceq B \\ \quad \text{or} \\ \text{(ii)}\ \ |m-n| < x_0(\beta-\alpha) \end{cases}$$

$$A \leq^1 B \Leftrightarrow \begin{cases} \text{(i)}\ \ m < n \\ \quad \text{or} \\ \text{(ii)}\ \ m = n \ \text{and}\ \ \alpha \leq \beta \end{cases}$$

以下では、L-ファジイ数の center の値と deviation parameter の値をそれぞれ x 軸，y 軸にとった $x\,y$ 平面を考え、L-ファジイ数 $A=(m,\alpha)_L$ を $x\,y$ 平面上の点 (m,α) と同一視することにする。

簡単のために $x_0=1$ としておく。

補題 3. 4 $A=(m,\alpha)_L,\ B=(n,\beta)_L,\ C=(l,\gamma)_L$ に対して、もし

$$m < \mathrm{Min}\{n, l\} \quad \text{and} \quad \alpha < \mathrm{Min}\{\beta, \gamma\}$$

ならば、$0<\lambda<1$ をどのようにとっても、定義 3.1 のどちらの順序関係に関してもA，B，C の中で A が最小である。

$x\,y$ 平面における 2 点 A，Bを結ぶ線分の勾配を γ_{AB} で表す。

定理 3. 2

$$A_i=(m_i,\alpha_i)_L, \qquad i=1,2,\cdots,N$$

において、

$$\left.\begin{aligned} m_i &< m_{i+1} \\ \alpha_i &> \alpha_{i+1} \end{aligned}\right\} \qquad i=1,2,\cdots,N-1 \tag{3.1}$$

とし、さらに

$$A_i \succ\prec A_{i+1}, \qquad i=1,2,\cdots,N-1, \tag{3.2}$$

$$\gamma_{A_{i-1}A_i} < \gamma_{A_iA_{i+1}}, \qquad i=2,3,\cdots,N-1. \tag{3.3}$$

を仮定する。各 $k=1,2,\cdots,N$ に対して

$$\lambda_{ki} = \frac{m_k - m_i}{\alpha_i - \alpha_k}, \qquad i = 1, 2, \cdots, N, \quad i \neq k$$

とおく。このとき

$$0 < \lambda_{12} < \lambda_{23} < \cdots < \lambda_{k-1,k} < \lambda_{k,k+1} < \cdots < \lambda_{N-1,N} < 1$$

が成立して、順序関係 $\leq_\lambda$ に関して次のことが成り立つ。

$$\begin{array}{lll}
A_1 \text{ is the smallest one among } \{A_1, A_2, \cdots, A_N\} & \text{if} & 0 \leq \lambda \leq \lambda_{12}, \\
A_2 \text{ is the smallest one among } \{A_1, A_2, \cdots, A_N\} & \text{if} & \lambda_{12} < \lambda \leq \lambda_{23}, \\
\qquad \vdots & & \qquad \vdots \\
A_k \text{ is the smallest one among } \{A_1, A_2, \cdots, A_N\} & \text{if} & \lambda_{k-1,k} < \lambda \leq \lambda_{k,k+1}, \\
\qquad \vdots & & \qquad \vdots \\
A_N \text{ is the smallest one among } \{A_1, A_2, \cdots, A_N\} & \text{if} & \lambda_{N-1,N} < \lambda \leq 1.
\end{array}$$

定理 3. 3

$$A_i = (m_i, \alpha_i)_L, \qquad i = 1, 2, \cdots, N$$

において、

$$\left.\begin{array}{l} m_i < m_{i+1} \\ \alpha_i > \alpha_{i+1} \end{array}\right\} \qquad i = 1, 2, \cdots, N-1$$

とし、さらに

$$A_i \succ\!\prec A_{i+1}, \qquad i = 1, 2, \cdots, N-1,$$

$$\gamma_{A_{i-1}A_i} > \gamma_{A_iA_{i+1}}, \qquad i = 2, 3, \cdots, N-1. \tag{3.4}$$

を仮定する。各 $k = 1, 2, \cdots, N$ に対して

$$\lambda_{ki} = \frac{m_k - m_i}{\alpha_i - \alpha_k}, \qquad i = 1, 2, \cdots, N, \quad i \neq k$$

とおく。このとき

$$1 > \lambda_{12} > \lambda_{23} > \cdots > \lambda_{k-1,k} > \lambda_{k,k+1} > \cdots > \lambda_{N-1,N} > 0$$

が成立して、順序関係 $\leq^{\lambda}$ に関して次のことが成り立つ。

$$
\begin{array}{lll}
A_1 \text{ is the smallest one among } \{A_1, A_2, \cdots, A_N\} & \text{if} & \lambda_{12} \leq \lambda \leq 1, \\
A_2 \text{ is the smallest one among } \{A_1, A_2, \cdots, A_N\} & \text{if} & \lambda_{23} < \lambda \leq \lambda_{12}, \\
\vdots & & \vdots \\
A_k \text{ is the smallest one among } \{A_1, A_2, \cdots, A_N\} & \text{if} & \lambda_{k,k+1} < \lambda \leq \lambda_{k-1,k}, \\
\vdots & & \vdots \\
A_N \text{ is the smallest one among } \{A_1, A_2, \cdots, A_N\} & \text{if} & 0 \leq \lambda \leq \lambda_{N-1,N}.
\end{array}
$$

定理3.2 と定理3.3 で示されたように 順序関係 $\leq_{\lambda}$ 及び $\leq^{\lambda}$ はいずれも仮定 (3.1) 及び (3.2) の下で有効であるが、(3.1) の代わりに

$$
\left.\begin{array}{l} m_i < m_{i+1} \\ \alpha_i < \alpha_{i+1} \end{array}\right\} \qquad i = 1, 2, \cdots, N-1 \tag{3.5}
$$

と (3.2) の仮定の下では、λ の値をどのようにとっても

$$A_1 = (m_1, \alpha_1)_L$$

だけしか検出できない。（**補題** 3.4 を参照）

(3.5) の 下で有効な順序関係として、次の２つのものを定義することが出来る。

定義 3. 2　　$0 < \lambda < 1$ に対して

$$A \lesssim_{\lambda} B \underset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} \text{(i)} \quad A \preceq B \\ \quad \text{or} \\ \text{(ii)} \quad 0 < \lambda(m-n) < \lambda \mid \alpha - \beta \mid \leq m-n \\ \quad \text{or} \\ \text{(iii)} \quad 0 < n-m < \lambda \mid \alpha - \beta \mid \\ \quad \text{or} \\ \text{(iv)} \quad m = n \quad \text{and} \quad \alpha < \beta \end{cases}$$

$$A \lesssim^{\lambda} B \underset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} \text{(i)} \quad A \preceq B \\ \quad \text{or} \\ \text{(ii)} \quad 0 < \lambda(n-m) < \lambda \mid \alpha - \beta \mid \leq n-m \\ \quad \text{or} \\ \text{(iii)} \quad 0 < m-n < \lambda \mid \alpha - \beta \mid \\ \quad \text{or} \\ \text{(iv)} \quad m = n \quad \text{and} \quad \alpha < \beta \end{cases}$$

参考文献

N. Furukawa : A Parametric Total Order on Fuzzy Numbers and a Fuzzy Shortest Route Problem, Optimization vol. 30 (1994), 367 - 377.