数理解析研究所講究録
第899巻1995年125-132

多目的離散最適化問題を解くためのアルゴリズム

四国大学　疋田光伯（Mitsunori Hikita）
岡山理科大学　宮地　功（Isao Miyaji）
関西大学　仲川勇二（Yuji Nakagawa）
関西大学　伊藤俊秀（Tosihide Itou）
関西大学　木村作郎（Sakuo Kimura）

1．まえがき

互いに競合する複数個の目的関数を、与えられた制約式のもとで、最大(最小)化する問題は多目的計画問題(multiobjective programming problem)と呼ばれ、多くの分野で応用されている。従来、様々な多目的計画問題が定義され[(1)-(4)]、その解法が提案されてきたが、そのほとんどが変数はすべて実数値をとるものであった。

本論文では変数がすべて離散値をとる多目的計画問題（多目的離散計画問題）を実用的に取り扱うための新しい問題の定式化とそれを解くためのアルゴリズムを提案する。この問題は標的問題（target problem）と名づけられ、変数がすべて実数値をとる従来の多目的計画問題とは異なり、離散変数の取り扱いが容易になるように工夫されている。標的問題を解くためのアルゴリズムはモジュラアプローチ[(5)]の概念を応用している。モジュラアプローチは、単一目的の大規模な離散最適化問題を効率的に解くためのアルゴリズム設計法であり、これを用いることにより大規模な多目的離散最適化問題を解くことが可能となる。例題を解くことによって本アルゴリズムの有用性を明らかにする。

2．問題の定式化

一般に、多目的計画問題は次のように定義される。

$$(\mathrm{MP}):\quad \max \quad \mathbf{f}(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \ldots, f_k(\mathbf{x}))^T$$

$$\text{s.t.}\quad \mathbf{x} \in X = \{\mathbf{x} \in R^n \mid \mathbf{g}(\mathbf{x}) \leqq \mathbf{0}\}$$

ここで、$\mathbf{x}=(x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$ はn次元実数変数ベクトル，$f(\mathbf{x})=(f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \ldots, f_k(\mathbf{x}))^T$ はk次元ベクトル関数，$g(\mathbf{x})=(g_1(\mathbf{x}), g_2(\mathbf{x}), \ldots, g_m(\mathbf{x}))^T$ はm次元ベクトル制約関数である。このように従来の多目的計画問題は、m個の制約条件のもとでk個の目的関数を同時に最大にするn次元実数変数ベクトルを求める問題である。すべての目的関数を同時に最大化する解は一般に存在しない。その代わりに、ある目的関数の値を改善するためには、少なくとも他の1つの目的関数の値を改悪せざるを得ないような解の概念としてパレート最適解が定義されている。パレート最適解は単一解ではなく普通は無限個の点集合である。しかし、実用上の問題では単一解または適当な大きさの解集合を求めなければならない。従来、これらのパレート最適解の中から特定の解あるいは部分集合を選択するために、意思決定者の価値観に最も合うような解（選好最適解）を求める種々の解法が提案されている[1]。

提案する問題は標的問題（target problem）と名づけられ、変数がすべて離散値をとる多目的計画問題として次のように定式化される。

$$(\mathrm{TP}):\quad \text{target}\quad \mathbf{f}(\mathbf{x}) \geqq \mathbf{f}^{opt} - \boldsymbol{\varepsilon}$$

$$\text{s.t.}\quad g(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} g_i(x_i) \leqq 0$$

ここで、$\mathbf{x}=(x_1, \ldots, x_n)^T$ はn次元整数変数ベクトル、$\mathbf{f}(\mathbf{x})=(f_1(\mathbf{x}), \ldots, f_k(\mathbf{x}))^T$ はk次元ベクトル標的関数（target function）、$\mathbf{f}^{opt}=(f_1^{opt}, \ldots, f_k^{opt})^T$ はそれぞれの標的関数を単独で使用した単一目的の問題の最適値ベクトル、$\boldsymbol{\varepsilon}=(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k)^T$ は標的定数ベクトル、$g(\mathbf{x})$ は制約関数である。すなわち、標的問題とは各標的関数の最適値に幅を持たせて、すべての標的関数がその範囲に入る実行可能解を列挙する問題である。後述の標的問題を解くためのアルゴリズムではεを調整することによって任意の大きさのパレート最適解を求めることができる。意思決定者はこのパレート最適解の中から既存の手法を用いて特定の解を選択することになる。

3．モジュラアプローチの概要

モジュラアプローチは、動的計画法(dynamic programming)と同様にボトムアップ的な手法である。まず、与えられた離散最適化問題に対して対応した最適化システムを考え、次の（１）と（２）の操作を繰り返し、最終的に単一のモジュールにして最適解を求める方法である。ここでは、問題の変数をモジュラアプローチのモジュールに対応させる。

（１）システムに対して深測操作(fathoming)を適用し決定空間を縮小する.
（２）システム内の二つのモジュール（変数）を単一のモジュール（変数）に統合することによってモジュール数を減らす。

上記の（１）の深測操作では、分枝限定法と同様に、優越テスト(dominance)、限界値テスト(bounding)、実行可能性テスト(feasibility)の３テストを用いている。但し、問題が多目的の場合には優越テストは使用できない。（２）の二つのモジュールを一つのモジュールに統合するとは、二つの変数の解空間の直積を求め、その直積空間と対応する解空間を持つ新しい変数（モジュール）を導入し、もとの２変数を消去することである。

モジュラアプローチにおいて特徴的なことは、統合すべきモジュールの選定政策がいくつか存在することである。モジュラアプローチを非線形ナップザック問題に適用した論文[(6)]の中で、計算時間と必要記憶容量は変数の統合政策に強く依存すること、そして変数の統合政策をうまく選べば実際的な問題に対してモジュラアプロチが有効であることが示されている。また、モジュラアプローチを非線形計画問題に適用した論文[(7)]では、非線形計画問題を離散最適化問題に変換した後、モジュラアプローチを適用することによって、原問題を十分に解き得ることが報告されている。

4．アルゴリズム

標的問題 TP を解くためのアルゴリズムはモジュラアプローチを中心として構築される。すなわち、まず、標的問題の１番目の標的関数 $f_1(x)$ のみを用いた単一目標の問題 TP^1 をモジュラアプローチによって解き、その解集合 X^1 を得る。次に、

この解集合 X^1 の中で $f_1(x)$ 以外の標的関数 $f_2(x),\ldots,f_k(x)$ がすべてそれぞれの標的範囲に入る解を抽出し、その解集合 X^{sol}を求める。さらに、解集合 X^{sol} に対して標的関数間の優越操作を行い、縮小された解集合 X^{pos} を得る。X^{pos} は TP のパレート最適解(pareto optimal solution)である。

FUNCTION Main ()
INPUT TP, Fm, CIM
BEGIN
　　$X^1 \Leftarrow$ ModularApproach (TP^1, Fm, CIM) ;
　　$X^{sol} = \{\ x \in X^1 : f_j(x) \geqq f_j^{opt} - \varepsilon_j (j=2,\ldots,k)\}$;
　　$X^{pos} \Leftarrow$ Dominance (X^{sol}) ;
OUTPUT Pareto Optimal Solution X^{pos}
END

FUNCTION ModularApproach ($P^{(0)}$, Fm, CIM) ;
BEGIN
　$r \leftarrow 0$;
　WHILE $r \leqq n$ **DO**
　　$r \leftarrow r + 1$;
　　$\{A^{(r)}_{M(r-1)}\} \Leftarrow$ Fathom (r, $P^{(r-1)}$, Fm) ;
　　$\{C^{(r)}\} \Leftarrow$ Choice ($M^{(r-1)}$, $A^{(r)}_{M(r-1)}$, CIM) ;
　　$\{P^{(r)}\} \Leftarrow$ Integrate ($C^{(r)}$, $P^{(r-1)}$, $A^{(r)}_{M(r-1)}$) ;
　ENDWHILE
RETURN Solution of $P^{(0)}$
END

但し、

Fm	深測操作をどのモジュールに対して実施するかを決めるための政策
CIM	次に統合すべきモジュールを選定するための政策
TP^1	標的問題 TP において標的関数が $f^1(x)$ のみの単一目標である問題
X^1	TP^1 の解集合
r	問題の更新レベル
$P^{(r)}$	レベル r の問題

$M^{(r-1)}$	レベル (r-1) のモジュールの番号集合
$C^{(r)}$	統合政策 CIM によって、レベル (r-1) のモジュール番号集合から選定されたモジュール番号部分集合
$A^{(r)}_{M(r-1)}$	$\{A^{(r)}_{m} : m \in M^{(r-1)}\}$
$A^{(r)}_{m}$	レベル r におけるモジュール m に対する項目集合
Fathom	政策 Fm による深測操作を行い、関数のリターンとして縮小された決定空間を戻す
Choice	モジュール集合 $M^{(r-1)}$ から統合政策 CIM を用いて次に統合すべきモジュールを選定する
Integrate	選定されたモジュール集合 $C^{(r)}$ を単一のモジュールに統合し、次のレベルの問題 $P^{(r)}$ をリターンとする
Dominance	優越操作を行い、関数のリターンとして縮小された解集合を戻す

５．計算例

本論文で提案したアルゴリズムを用いて、次に示す非線形ナップザック型の例題を解く。この例題の標的関数と制約関数の各モジュールにおける代替案の値を表１および表２に示す。

（例題）　非線形ナップザック型の標的問題

$$\text{target} \quad \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \sum_{i \in I} f_{i,j}(x_i) \geq \text{target}_j, \quad j=1,2,3$$

$$\text{s.t.} \quad g(\mathbf{x}) = \sum_{i \in I} g_i(x_i) \leqq b$$

$I = \{1,2,3,4,5,6,7\}$

$x_i = \{1,2,3,4,5,6,7\}, \quad (i \in I)$

$\text{target}_1 = 549.9, \quad \text{target}_2 = 329.0, \quad \text{target}_3 = 463.0$

$b = 430.0$

表１　標的関数の各モジュールにおける代替案の値

$f_{i,j}(x_i)$		x_i						
j	i	1	2	3	4	5	6	7
	1	10	34	38	46	75	107	136
	2	25	27	40	70	91	112	124
	3	16	24	55	84	97	101	104
1	4	11	30	39	59	79	107	110
	5	30	51	63	68	83	114	135
	6	8	24	40	67	69	76	78
	7	14	30	52	59	60	86	88
	1	7	10	27	55	59	76	83
	2	3	8	30	34	40	57	99
	3	12	14	19	36	67	85	110
2	4	2	5	24	45	57	68	130
	5	21	35	40	46	75	76	88
	6	8	16	34	49	59	85	90
	7	19	30	64	76	79	95	121
	1	6	9	26	39	53	65	105
	2	12	18	35	40	68	94	110
	3	27	34	45	55	79	101	126
3	4	14	32	38	63	75	96	145
	5	8	16	43	78	81	113	139
	6	14	25	30	48	60	95	102
	7	9	13	28	61	86	88	95

表２　制約関数の各モジュールにおける代替案の値

$g_i(x_i)$	x_i						
i	1	2	3	4	5	6	7
1	5	19	34	63	94	113	142
2	18	49	80	82	89	115	130
3	8	24	36	40	64	68	85
4	11	26	35	45	57	65	67
5	3	19	36	46	67	99	112
6	28	41	65	71	77	85	110
7	4	30	46	62	94	125	138

本アルゴリズムを例題に適用した結果、次のように各段階での解集合 X^1, X^{sol} が生成され、最終的にパレート最適解 X^{pos} を得る。

$$X^1 = \{(2,6,4,6,7,4,1),(2,6,4,7,7,4,1),(2,5,4,7,7,4,2),(7,5,4,6,2,4,1),(2,5,6,7,7,4,1)\}$$

$$X^{sol} = \{(2,6,4,7,7,4,1),(2,5,4,7,7,4,2),(2,5,6,7,7,4,1)\}$$

$$X^{pos} = \{(2,6,4,7,7,4,1),(2,5,6,7,7,4,1)\}$$

6．あとがき

本論文では変数がすべて離散値をとる多目的計画問題を実用的に取り扱うための新しい問題（標的問題）の定式化とそれを解くためのアルゴリズムを提案した。さらに、簡単な計算例によって、本アルゴリズムが多目的離散最適化問題のパレート最適解を与えることを示した。今後は、企業経営に関する意思決定をはじめとして、多くの分野で標的問題として定式化できる問題が存在するので、それらの問題を実際にモデル化し、本アルゴリズムを適用する予定である。

7．文　献

(1) 清水清孝，1982．多目的と競争の理論．共立出版．
(2) 坂和正敏，1982．多目的線形計画問題に対する対話型ファジィ意思決定手法とその応用．電子情報通信学会論文誌（Ａ） J65-A(11): 1182-1189.
(3) 福川忠昭，山口俊和，1985．目標計画法とその発展．日本経営工学会誌 36(1): 7-19.
(4) Benayoun, R., de Montgolfier, J., Tergny, J. and Laritchev, O., 1971. Linear Programming with Multiple Objective Function. Mathematical Programming 1(3): 366-375.
(5) 仲川勇二，1990．離散最適化問題のための新解法．電子情報通信学会論文誌（Ａ） J73-A(3): 550-556.

(6) 仲川勇二，疋田光伯，岩崎彰典，1992．多重選択ナップザック問題の高速厳密解法．電子情報通信学会論文誌（A） J75-A(11): 1752-1754.

(7) 疋田光伯，岩崎彰典，仲川勇二，1993．モジュラ法の非線形計画問題への適用，電子情報通信学会論文誌（A） J76-A(1): 64-67.