数理解析研究所講究録
第 899 巻 1995 年 133-141

多次元非線形ナップザック問題に対する スマートグリーディ法の適用

岡山理科大学工学部　太田垣博一 (Hirokazu Ohtagaki)
岡山理科大学工学部　岩崎彰典 (Akinori Iwasaki)
関西大学総合情報学部　仲川勇二 (Yuji Nakagawa)
岡山理科大学工学部　亀高哲夫 (Tetsuo Kametaka)
岡山理科大学工学部　成久洋之 (Hiroyuki Narihisa)

論文要旨

多次元非線形ナップザック問題の近似解をスマートグリーディ法を用いて求める方法を提案する。この方法において、はじめに多次元非線形ナップザック問題を代理乗数を用いて代理問題と呼ぶ一次元の問題に書き直す。次に、代理乗数の定義域のつくる多面体の重心として与えられた代理乗数をもつ代理問題に対し、モジュラアプローチ (MA) を適用し、代理問題を解くとともに、多面体の切断面を得る。その切断面によって多面体を縮小して代理乗数を更新するという手続きを多面体が空集合となるまで繰返す。そして、最終的に得られた最適な代理乗数をもつ代理問題に対して、スマートグリーディ法を適用する。このとき得られた解は元の多次元非線形ナップザック問題の実行可能な近似解で、この解をスマートグリーディ解と呼ぶ。計算機実験の結果によってスマートグリーディ解の品質が充分に良いことを示す。

1. まえがき

複数の制約条件式を持つ離散計画問題は多次元問題といわれ、いくつかの解法が提案されている[(1)~(4)]。これらの解法の中で、与えられた問題（原問題）において複数の制約条件式を代理乗数 (Surrogate Multiplier) を用いて単一の制約条件式に変換して導かれた問題（代理問題）を解く方法は

Glover [5] によって初めて導入された。また、 Luenburger [6] は原問題が準凸計画問題であるとき、代理乗数が正しく決定されれば代理問題の最適解は原問題の最適解となることを示した。その後、仲川ら [7] により、代理乗数を正しく決定するためのアルゴリズムが開発され、その有効性が計算機実験によって示された。これらの研究から、代理問題を厳密に解くことができれば、原問題の最適解を得ることが可能となるが、原問題において整数変数が含まれる場合には、代理ギャップ（surrogate gap）が存在することが多く、代理乗数を正しく決定できたとしてもその代理問題の解は原問題の実行可能解とはならないことが多い。

本論文では、原問題が複数制約条件をもつ非線形ナップザック問題である場合に、品質のよい実行可能解を得るために最適な代理乗数によって生成された代理問題にスマートグリーディ法 [8] を適用する。この方法で得られた解をスマートグリーディ解と呼ぶ。スマートグリーディ法は整数優越性や LP 優越性の原理 [9] を用いて一次元離散計画問題に対して品質の良い解を得ることができることが示されている。そこで、最適な代理乗数を文献(7)の方法を用いて求め、その最適化過程において生成される代理問題を厳密に解く方法としてモジュラアプローチ [10] を用いる。この方法は大規模な一次元離散計画問題を効率よく解くことができ、得られた解を厳密解と呼ぶ。そして、最終的に得られた最適な代理乗数をもつ代理問題に対して、スマートグリーディ法を適用する。このとき得られた解は元の多次元非線形ナップザック問題の実行可能な近似解で、この解をスマートグリーディ解と呼ぶ。計算機実験の結果は得られたスマートグリーディ解の品質が充分に良いことを示している。

2. 多次元非線形ナップザック問題の定式化

多次元非線形ナップザック問題は次のように定式化される。

$$[\mathrm{K}]:\ \max\ f(\boldsymbol{x}) = \sum_{n\in\mathcal{N}} f_n(x_n), \qquad (1.a)$$

$$\text{subject to } g_m(\boldsymbol{x}) = \sum_{n \in \mathcal{N}} g_{mn}(x_n) \leq b_m, \quad (m = 1, ..., M) \tag{1.b}$$

$$x_n \in \mathcal{A}_n, \ (n \in \mathcal{N}) \tag{1.c}$$

ただし、$\mathcal{N} = \{1, 2, ..., N\}$, $\mathcal{A}_n = \{a_{n1}, a_{n2}, ..., a_{nK_n}\}$, $\mathcal{A}_n$ は、n 番目の決定変数 x_n において選択の対象となる項目 a_{nk} の集合である。$f(\boldsymbol{x})$, $g_m(\boldsymbol{x})$ は目的関数、制約関数で正の値をとる変数分離型の非線形関数である。また、b_m は m 番目の制約の許容量を表す。

3. 多次元非線形ナップザック問題の代理問題への変換

代理乗数

$$\boldsymbol{u} \in \mathbf{U}^0, \ (\mathbf{U}^0 = \{u_1, ..., u_{M-1}\} : \sum_{m=1}^{M-1} u_m \leq 0, \ u_m \geq 0, \ m = 1, ..., M-1) \tag{2}$$

を用いると、原問題 [K] は次の代理問題 [S($\boldsymbol{u}$)] に変換される。

$$[\mathrm{S}(\boldsymbol{u})] : \max\{f(\boldsymbol{x}) : \varphi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) \leq \beta(\boldsymbol{u})\}, \tag{3.a}$$

$$\varphi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) = \sum_{m=1}^{M-1} u_m\{g_m(\boldsymbol{x}) - g_M(\boldsymbol{x})\} + g_M(\boldsymbol{x}), \tag{3.b}$$

$$\beta(\boldsymbol{u}) = \sum_{m=1}^{M-1} u_m(b_m - b_M) + b_M, \tag{3.c}$$

ここで、φ、β をそれぞれ代理制約関数 (surrogate constraint function)、代理制約定数 (surrogate constraint constant) と呼ぶ。このとき、原問題 [K] に等価な代理双対問題 (surrogate dual problem) は次のように表される。

$$[\mathrm{SD}] : \ \min\{\mathrm{opt}[\mathrm{S}(\boldsymbol{u})] : \boldsymbol{u} \in \mathbf{U}^0\}, \tag{4}$$

ただし、opt[S] は問題 [S] の最適な目的関数値である。原問題が準凸計画問題であるとき、正しく決定された代理乗数を $\boldsymbol{u}^{\mathrm{opt}}$ とすると、

$$\mathrm{opt[SD]} = \mathrm{opt[K]} \tag{5}$$

が成り立ち、原問題を厳密に解き得る。しかし、原問題が多次元非線形ナップザック問題のように離散値をとる決定変数を含むとき、代理ギャップが存在することが多く

$$\mathrm{opt[SD]} > \mathrm{opt[K]} \tag{6}$$

となる。このとき、opt[SD] は opt[K] に近い値を取るが解は原問題の実行可能解とはならない。

本論文では、品質の良い実行可能な近似解を得るために、最適な代理問題 opt[SD] にスマートグリーディ法を適用する。

4. 代理乗数の最適化

最適な代理乗数を得るために、アルゴリズム MA および COP を用いる。代理乗数の多面体の重心として与えられた代理乗数を持つ代理問題にモジュラアプローチ MA を用いて解を得る。次に得られた解を用いてアルゴリズム COP は多面体を切断縮小する。代理乗数の定義域を初期多面体としてこれらの手順を繰り返して代理乗数を再帰的に更新し、多面体が空集合となった時に停止する。最終的に得られた代理乗数は代理問題の最適解の目的関数値を最小にするという意味で最適である。代理乗数の最適化の過程で用いるMA および COP は以下のようなアルゴリズムである。

4.1 MA

MA は、与えられた離散最適化問題に対して

(1) 深測操作 (fathoming) を適用して解の決定空間を縮小する、

(2) 二つの変数のモジュールを単一のモジュールに統合する

という二つの操作を繰り返し、最終的にただ 1 つのモジュールに統合して、

最適解を与える方法である。この方法は与えられた問題を厳密に解くので厳密解法といい、得られた解を厳密解と呼ぶ。代理問題を解く場合、問題の決定変数をモジュールに対応させる。上記の (1) の深測操作では、分枝限定法と同様に、優越テスト (dominance)、限界値テスト (bounding)、実行可能性テスト (feasibility) の三テストを行う。(2) において、モジュールを統合するとは次式の操作を行うことである。

$$\mathcal{A}_{NEW} = \mathcal{A}_i \times \mathcal{A}_j, \quad (i, j \in \mathcal{N}.) \tag{7}$$

すなわち、二つの決定変数の解空間の直積を求め、その直積空間に対応する解空間を持つ新しい決定変数を導入し、元の二つの決定変数を消去することである。MA において、統合すべきモジュール選択にはいくつかの政策が存在する。MA を一次元多重選択ナップザック問題に適用した例では、計算時間と必要記憶量はモジュールの統合政策に強く依存することと、モジュールの統合政策をうまく選べば実際的な問題に対して MA が有効であることとが報告されている。(11) 本論文においては、要素数が最大の項目集合と最小の項目集合とのモジュールを統合する政策を用いた。MA は代理問題に対しては最適解を与えるが、この解は代理ギャップが存在するとき原問題に対しては実行不可能であることもある。しかし、最適解に対する目的関数の上限値を与えるので問題の規模が大きくて列挙法で最適解を求めることができないとき得られた近似解の品質を検討するための基準として極めて重要である。

4.2 COP (Cut-off Polyhedron)

代理乗数の定義域のつくる多面体 $\mathbf{U}^i$ の重心として与えられた代理乗数 $\boldsymbol{u}^i$ に対する代理問題の厳密解を $\boldsymbol{x}^{i+1}$ とする。このとき、多面体 $\mathbf{U}^i$ を切断して得られる新しい多面体は

$$\mathbf{U}^{i+1} = \mathbf{U}^i \cap \{\boldsymbol{u} : \varphi(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{x}^i) \leq \beta(\boldsymbol{u}^i)\} \tag{8}$$

で与えられる。式 (8) に基づいて、COP は $\mathbf{U}^{i+1} = \phi$ となるまで多面体

を順次切断縮小して、最適な代理乗数 $\boldsymbol{u}^{\mathrm{opt}}$ を求めることができる。

5. スマートグリーディ法

与えられた多次元非線形ナップザック問題に対する実行可能な近似解を得るために、MA および COP によって最終的に得られた最適な代理乗数を用いた代理問題に対してスマートグリーディ法を適用する。スマートグリーディ法は、整数優越性および LP 優越性の原理を用いて最適解の候補として不要な項目を各決定変数の項目集合から除外し、隣り合う項目集合に対する目的関数と制約関数との比(ゲイン率) が単調減少となるように項目集合を並べ変える。そして、縮小され並べ換えられた項目集合

$$\mathcal{A}_n = \{a_{n1}, ..., a_{nk_n}\}, \qquad (k_n \le K_n, n = 1, ..., N) \tag{9}$$

に対してバランス係数 $\alpha_l (0 \le \alpha_l < \infty)$ によって指定されたグリーディ関数

$$\psi_n(a_{nk}, a_{nk+1}) = \triangle f_n \times \left(\frac{1-\alpha_l}{\triangle M} + \frac{\alpha_l}{\triangle g_n^S} \right), \tag{10.a}$$

$$\triangle f_n = f_n(a_{nk+1}) - f_n(a_{nk}), \tag{10.b}$$

$$\triangle g_n^S = g_n^S(a_{nk+1}) - g_n^S(a_{nk}), \tag{10.c}$$

$$g_n^S(a_{nk}) = \sum_{m=1}^{M-1} u_m^{\mathrm{opt}} \{g_{mn}(a_{nk}) - g_{Mn}(a_{nk})\} + g_{Mn}(a_{nk}), \tag{10.d}$$

$$\triangle M = \frac{1}{N^+} \sum_{n \in N^+} \frac{g_n^S(a_{nk_n}) - g_n^S(a_{n1})}{k_n - 1}, \tag{10.e}$$

を最大とする決定変数に対して増分配分を行なうことを繰り返す。ただし、ここで a_{nk} は暫定解の n 番目の決定変数を構成する要素、a_{nk+1} はその変数の増分配分の候補となる要素である。 $\triangle f_n$ および $\triangle g_n^S$ はそれぞれ原問題の目的関数および最適な代理乗数を持つ代理制約関数の増分を表す。また、$\triangle M$ は代理制約関数 $\triangle g_n^S$ の項目集合全体についての増分の平均を表

す。ここで N^+ は増分配分が可能な決定変数の添字集合 $\mathcal{N}^+$ の要素数を表す。さらに、スマートグリーディ法は複数のバランス係数 $\alpha_l(0 \le \alpha_l < \infty, l = 1, 2, ..., L)$ を用いて複数のグリーディ解を生成してその中から最善の解をスマートグリーディ解とする。この方法は各制約条件について解の実行可能性のチェックを行なって解が実行不可能になる時増分配分を停止するので、得られた解は実行可能解となる。

6. 計算機実験

本論文で提案した方法の有効性を確かめるために制約条件数が $M = 2$ および $M = 3$ の場合について 20 のテスト問題について計算機実験を行なった。テスト問題の規模は次のようである。決定変数の数 は$N = 10$, 20, 30, 項目集合の要素数は $A_n = 10$ for $n = 1, ..., N.$ である。 テスト問題において、目的関数および制約関数は正の整数値をとるように一様乱数を用いて生成されている。多面体における代理乗数の初期値は $M = 2$ に対しては $(u_1^0,\ u_2^0) = (\frac{1}{2},\ \frac{1}{2})$ そして $M = 3$ に対しては$(u_1^0,\ u_2^0,\ u_3^0) = (\frac{1}{3},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{3})$ とした。また、スマートグリーディ法においてグリーディ関数に用いるバランス係数は$\alpha_1 = 0.3, \alpha_2 = 0.9, \alpha_3 = 0.93, \alpha_4 = 0.95, \alpha_5 = 1.0$ とした。表 1 において、スマートグリーディ解の厳密解に対する目的関数値の相対誤差の平均を示す。

$$\overline{\mathrm{Er}}(f^{\mathrm{HSG}}) = \frac{1}{I}\sum_{i=1}^{I}\frac{f_i^{\mathrm{MA}} - f_i^{\mathrm{HSG}}}{f_i^{\mathrm{MA}}}, \tag{11}$$

ただし f_i^{HSG} と f_i^{MA} はそれぞれ i 番目の問題に対するスマートグリーディ解と厳密解との目的関数値を表す。 表 1 の結果から、スマートグリーディ法が充分に品質の良い解を生成していることがわかる。

Table 1. Mean relative errors of objective function to Smart Greedy solution (M constraints)

N	10	20	30
$M=2$	0.0173	0.0120	0.0092
$M=3$	0.0125	0.0214	0.0048

$(A_n = 10 \text{ for } n \in \mathcal{N})$

7. むすび

本論文において、多次元非線形ナップザック問題を解くためのスマートグリーディ法を提案した。その方法は、アルゴリズム MA および COP を用いて最終的に決定された代理乗数を用いて、与えられた多次元非線形ナップザック問題を一次元の代理問題に変換し、得られた代理問題にスマートグリーディ法を適用するという方法である。このとき、最適に代理乗数が決定されていても代理ギャップの存在のために MA で得られた厳密解は実行可能解でないことが多い。本論文の方法で得られたスマートグリーディ解は品質の良い、元の多次元非線形ナップザック問題に対する充分に品質の良い実行可能解であることが計算機実験によって確かめられた。

8. 参考文献

(1) A. V. Gobot "An enumeration algorithm for knapsack problems", Oper. Res. **18**, pp. 306-311 (1970)

(2) F. A. Tillman, C. L. Hwang and W. Kuo "Determining component reliability and redundancy for optimum system reliability", IEEE Trans. Reliab. **R-26**, pp. 162-165 (1977)

(3) M. E. Deyer "Calculating surrogate constraints", Mathematical programming, **19**, pp. 162-165 (1977)

(4) 仲川勇二、木下悟、疋田光伯　"多次元ナップザック問題の解法", 信学

論 (A), **J65-A**, pp. 529-534 (1982)",
(5) F. Glover "Surrogate constraints", Oper. Res. **16**, pp. 741-749 (1968)
(6) D. G. Luenburger, "Quasi-convex programming", SIAM J. of Applied Mathematics, **16**, 1090-1095 (1968).
(7) 仲川勇二、疋田光伯，鎌田弘 "代理双対問題を解くためのアルゴリズム"， 信学論 (A), **J67-A**, 53-59 (1984)
(8) H. Ohtagaki, Y. Nakagawa, H. Takatuka and H. Narihisa " Smart Greedy procedure for solving a nonlinear knapsack class of reliability optimization problems", Proc. of the Australia-Japan workshop on stochastic models in engineering, technology and management, 454-462 (1993)
(9) P. Sinha and A. A. Zoltoner, "The multiple-choice knapsack problem" Oper. Res. **27**, 503-515 (1979)
(10) 仲川勇二 "離散最適化問題のための新解法", 信学論 (A), **J73-A**, 550-556 (1990)
(11) 仲川勇二、疋田光伯，岩崎彰典 " 多重選択ナップザック問題の高速厳密解法", 信学論 (A), **J75-A**, pp. 1752-1754 (1992)