数理解析研究所講究録
第 899 巻 1995 年 217-223



# O.D.E.法を用いない確率近似アルゴリズムの確率1での収束について

福岡大　理　渡辺正文 (Masafumi Watanabe)

## §1. 序

確率近似アルゴリズムの収束，特に確率1での収束は確率的な部分と確定的な部分に分離して議論される．確率的な議論は強大数の法則が成立するための十分条件に関することであり，その結果を仮定して確定的な議論を行うことになる．確定的な議論においては常微分方程式における解の安定性の問題に関連させて Kushner and Clark [2], Ljung [3], Métivier and Priouret [4] 等が確率近似アルゴリズムの確率1での収束問題を考察している．これらの方法は O.D.E.法と呼ばれている．特に，アルゴリズムの有界性が成立する場合はこの方法は有効であり，次の補題Aにもとづいている．

<u>補題A.</u> M : $R^N$ から $R^N$ への連続写像で，$\theta$ を $M(\theta)=0$ を満たすものとする．$\{a_n\}$ を正の実数列とし

(i) $a_n \downarrow 0$ , $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$

を満たすものとする．$\{x_n\}$, $\{u_n\}$ を $R^N$ の列とし，次を満たす．

(ii) $x_{n+1} = x_n - a_n M(x_n) + a_n u_n$ , $n=1,2,\cdots$

さらに，以下を仮定する．

(iii) $\sup_n \|x_n\| < \infty$

(iv) $\lim_{n\to\infty} \max_{n \le k < a(n,T)} \| \sum_{i=n}^{k} a_i u_i \| = 0$ , $T>0$ .

ここで

(1.1) $a(n,T) = \max\{k ; \sum_{i=n}^{k} a_i \le T\}$ ．さらに，

$\theta$ は微分方程式 $\dot{x}(t) = -M(x(t))$ の局所的漸近安定点（リャプーノフの意味で）で domain of attraction $D(\theta)$ を持ち，あるコンパクト集合 $K \subset D(\theta)$ が存在し，$x_n \in K$ となる $n$ が無限に多く存在するとする．このとき，$\lim_{n\to\infty} \|x_n - \theta\| = 0$ が成立する．

以下この報告では，$(\Omega, \mathcal{A}, P)$ を確率空間，$\Omega_0 \subset \Omega$ を $\Omega_0 \in \mathcal{A}$ ，$P(\Omega_0) = 1$ を満たすものとする．また，この章においては，$M$ を $R^N$ から $R^N$ への連続写像とし，$\theta$ を $M(\theta) = 0$ を満たす点とする。各 $n \ge 1$ に対し，$Z_n(x,\omega)$ を $R^N \times \Omega$ から $R^N$ への $\mathcal{B}^N \times \mathcal{A}$ - 可測写像とする，ここで $\mathcal{B}^N$ は $R^N$ のボレル集合体とする．

Robbins - Monro 型確率近似アルゴリズム ；

(1.2) $$\begin{cases} X_1 = R^N \text{の任意の定数ベクトル} \\ X_{n+1} = X_n - a_n M(X_n) - a_n Z_n(X_n) , \quad n=1,2,\cdots \end{cases}$$

ここで, $X_n = X_n(\omega)$, $Z_n(X_n) = Z_n(X_n(\omega), \omega)$, $\{a_n\}$ は正の実数列とする. この時, 次の定理が補題Aを用いて示される. この定理は Métivier and Priouret [4] と本質的に同じものである.

**定理A.** 以下の A0 ~ A6 を仮定する.

A0 : $^{\exists}$正の r.v. $\beta$, $\sup_n \|X_n(\omega)\| \leq \beta(\omega)$, $\omega \in \Omega_0$

A1 : $a_n = \alpha n^{-1}$, $n = 1, 2, \cdots$, $\alpha > 0$

A2 : $\|M(x)\| \leq C(\|x\| + 1)$, $x \in R^N$

A3 : $\theta$ は微分方程式 $\dot{x}(t) = -M(x(t))$ の局所的漸近安定点で, domain of attraction $D(\theta)$ をもつ

A4 : $\lim_{n\to\infty} \sup_{\|x\| \leq \beta(\omega)} \|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Z_i(x, \omega)\| = 0$, $\omega \in \Omega_0$

A5 : $^{\exists}$正の r.v.'s の列 $\{\gamma_n\}$, 正定数 $\gamma^*$

(i) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \gamma_i(\omega) = \gamma^*$, $\omega \in \Omega_0$

(ii) $\|Z_n(x, \omega) - Z_n(y, \omega)\| \leq \gamma_n(\omega)\|x - y\|$, $n \geq 1$, $\|x\| \leq \beta(\omega)$, $\|y\| \leq \beta(\omega)$, $\omega \in \Omega_0$

A6 : $^{\exists}$正の r.v.'s の列 $\{\tau_n\}$, 正定数 $\tau^*$

(i) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \tau_i(\omega) = \tau^*$, $\omega \in \Omega_0$

(ii) $\sup_{\|x\| \leq \beta(\omega)} \|Z_n(x, \omega)\| \leq \tau_n(\omega)$, $n \geq 1$, $\omega \in \Omega_0$.

さらに, $^{\forall}\omega \in \Omega_0$, $^{\exists}$コンパクト集合 $K \subset D(\theta)$, $X_n(\omega) \in K$ となる $n$ が無限に存在する. このとき,

$$\lim_{n\to\infty} \|X_n(\omega) - \theta\| = 0 \quad , \quad \omega \in \Omega_0$$

この報告の目的は，

(1)　$M(\alpha)$ の連続性を仮定しない，

(2)　O.D.E. 法を用いない，

(3)　$R^r$ をより一般的な実可分ヒルベルト空間 $H$ に代える，

のもとで，Robbins-Monro 型確率近似アルゴリズムの確率1での収束定理を与えることである．次の章で考察される．

## §2. O.D.E. 法を用いない収束定理

補題Aの代りに，次の補題Bを与える．この補題は Derman and Sacks [1] の Lemma の拡張となっている．

<u>補題 B.</u>　$\{a_n\}$, $\{v_n\}$, $\{w_n\}$ を実数列とし，以下を仮定する．

(i)　$v_n \geqq 0$ , $n \geqq 1$ , $\sum_{n=1}^{\infty} v_n < \infty$

(ii)　$a_n > 0$, $n \geqq 1$ , $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ , $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$

(iii)　$\lim_{n\to\infty} \max_{n \leq k < a(n,T)} \left| \sum_{i=n}^{k} w_i \right| = 0$ , $T > 0$ ,

ここで，$a(n,T)$ は (1.1) で定義したものとする．さらに $\{\xi_n\}$ を非負実数列とし，次を満たす．

(iv)　$\xi_{n+1} \leqq \max\{\alpha, (1+v_n)\xi_n - \lambda a_n + w_n\}$ , $n \geqq 1$

ここで，$\alpha$, $\lambda$ は正定数とする．このとき，$\overline{\lim_{n\to\infty}} \xi_n \leqq \alpha$ が成立する．

[注]　[1] においては，条件 (iii) の代りに，$\sum w_n$ 収束，を仮定している．

以下，Hを実可分ヒルベルト空間とし，$R^r$と同様に，内積を$<\cdot,\cdot>$，ノルムを$\|\cdot\|$で表す．さらに，$\mathbb{0}$をHの零元，$\mathcal{B}$をHのボレル集合体とする．また，MをHからHへのボレル可測変換（連続性を仮定せず），$\theta$を$M(\theta)=\mathbb{0}$を満たす$H$の元とする．この時，(1.2)と同様に次のRobbins-Monro型確率近似アルゴリズムを考察する：

$$(2.1)\qquad \begin{cases} X_1 = \text{Hの任意の元} \\ X_{n+1} = X_n - a_n M(X_n) - a_n Z_n(X_n) \quad , \quad n=1,2,\cdots , \end{cases}$$

ここで，$Z_n(X_n) = Z_n(X_n(\omega),\omega)$，$Z_n(x,\omega)$は$\mathcal{B}\times\mathcal{A}$－可測写象，$\{a_n\}$は正の実数列とする．さらに，$\Omega_0$を§1と同様のものとする．この時，補題Bを用いて，次の定理Bを得る．

<u>定理B.</u> 以下のB0～B6を仮定する．

B0： $^{\exists}$正の r.v. $\beta$， $\sup_n \|X_n(\omega)\| \leq \beta(\omega)$，$\omega\in\Omega_0$

B1： $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < \infty$， $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$

B2： $\|M(x)\| \leq C(\|x\|+1)$，$x\in H$

B3： $0<{}^{\forall}\varepsilon<1$，$^{\exists}\lambda_\varepsilon>0$

$$\inf_{\varepsilon<\|x-\theta\|^2<\varepsilon^{-1}} < x-\theta, M(x) > \geq \lambda_\varepsilon$$

B4： $\lim_{n\to\infty} \sup_{\|x\|\leq\beta(\omega)} \max_{n\leq k<a(n,T)} \|\sum_{i=n}^{k} a_i Z_i(x,\omega)\| = 0$，$T>0$

$\omega\in\Omega_0$，$a(n,T)$は(1.1)で定義したもの，

B5： $^{\exists}$正の r.v.'sの列$\{\gamma_n\}$，正定数$\gamma^*$

(i) $\overline{\lim_{n\to\infty}} \sum_{i=n}^{a(n,T)} a_i \gamma_i(\omega) \leqq \gamma^*(\omega) T$ , $T>0$ , $\omega \in \Omega_0$

(ii) $\| Z_n(x,\omega) - Z_n(y,\omega) \| \leqq \gamma_n(\omega) \| x-y \|$ , $n \geqq 1$,

$\|x\| \leqq \beta(\omega)$ , $\|y\| \leqq \beta(\omega)$ , $\omega \in \Omega_0$

B6 : $^\exists$正の r.v.'s の列 $\{\tau_n\}$, 正定数 $\tau^*$

(i) $\overline{\lim_{n\to\infty}} \sum_{i=n}^{a(n,T)} a_i \tau_i \leqq \tau^*(\omega) T$ , $T>0$ , $\omega \in \Omega_0$

(ii) $\sup_{\|x\| \leqq \beta(\omega)} \| Z_n(x,\omega) \| \leqq \tau_n(\omega)$ , $n \geqq 1$, $\omega \in \Omega_0$ .

このとき, $\lim_{n\to\infty} \| X_n(\omega) - \theta \| = 0$ , $\omega \in \Omega_0$

が成立する.

[注] $\{Z_n\}$ を H の r.e. の列とし,

$$\lim_{n\to\infty} a_n \| \sum_{i=1}^{n} Z_i \| = 0 \quad \text{w.p. 1}$$

を満たすものとする, ここで $\{a_n\}$ は正の実数列で

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 , \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty , \quad \sup_n |a_n^{-1} - a_{n+1}^{-1}| < \infty$$

を満たすものとする. この時, 次の事が成立する事が確かめられる.

$$\lim_{n\to\infty} \max_{n \leqq k < a(n,T)} \| \sum_{i=n}^{k} a_i Z_i \| = 0 \quad \text{for each } T>0 \text{ w.p. 1},$$

$$^\exists\text{正の r.v. } Z^* : \overline{\lim_{n\to\infty}} \max_{n \leqq k < a(n,T)} \| \sum_{i=n}^{k} a_i Z_i \| \leqq Z^* T$$

for each $T>0$ w.p. 1 .

従って, 上の事から仮定 B4, B5, B6 は仮定 A4, A5, A6 より一般的であると考えられる.

## References


[1] Derman, C. and Sacks, J., *On Dvoretzky's stochastic approximation theorem*, *Ann. Math. Statist.*, 30 (1957), 601 – 605.

[2] Kushner, H.J. and Clark, D. S., Stochastic approximation methods for constrained and unconstrained system, Springer 1978.

[3] Ljung, L., Analysis of recursive stochastic algorithms, IEEE Trans. Automatic Control, AC-22 (1977), 551-575.

[4] Métivier, M. and Priouret, P., Application of Kushner and Clark lemma to general classes of stochastic algorithms, IEEE Trans. Inform. Theory, IT-30 (1984), 134 - 140.

[5] Robbins, H. and Monro, S., A stochastic approximation method. Ann. Math. Statist., 22 (1951), 400 - 407.

[6] Watanabe, M., Strong convergence of an unbounded stochastic approximation algorithm under general conditions, Bull. Informatics and Cybernetics, Vol. 25 (1992), No. 1-2, 109 – 123.