数理解析研究所講究録
900巻 1995年 47-52

$\boldsymbol{x}'(t) = -\alpha[1 - |\boldsymbol{x}(t)|^2]R(\theta)\boldsymbol{x}(t-\tau)$ の星形周期解について

大阪府立大学工学部数理教室　原　惟行
(Tadayuki Hara)

1　はじめに

スカラー微分差分方程式

(1.1) $$x'(t) = -\alpha[1 + x(t)]x(t-1),$$

(1.2) $$x'(t) = -\alpha[1 - x^2(t)]x(t-1)$$

に対して次の定理が成立することが知られている.

Theorem A　[1:pp.341 ~ 348, Th.4.2 and Th.5.2]
$\alpha > \frac{\pi}{2} \Longrightarrow$ (1.1) も (1.2) も non-zero periodic solution をもつ.

この Theorem A の成立には次の良く知られた定理が深くかかわっている.

Proposition 1　$y'(t) = -\alpha y(t-1)$ の零解が漸近安定 $\Longleftrightarrow 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

2　Introduction と予想

2次元微分差分方程式系

(2.1) $$\boldsymbol{x}'(t) = -\alpha[1 - |\boldsymbol{x}(t)|^2]R(\theta)\boldsymbol{x}(t-1)$$

を考える. ここで

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \qquad \alpha \in R, \qquad R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \qquad (\theta \neq 0),$$

$|\boldsymbol{x}|^2 = x^2 + y^2$ とする.　(2.1) に対して次の問題を考える.

問題1　(2.1) に対して Theorem A のような定理が成立するか？
i.e. $\alpha > \frac{\pi}{2} - |\theta| > 0 \implies$ (2.1) は non-zero periodic solution をもつか？

Proposition 1 に対応するものとして次の結果がある.

Proposition 2 [2]　$\boldsymbol{y}'(t) = -\rho R(\theta)\boldsymbol{y}(t-1)$ の零解が漸近安定 $\iff 0 < \rho < \frac{\pi}{2} - |\theta|$.

Proposition 2 に関連して次のこともわかっている.

Proposition 3　$\rho = \frac{\pi}{2} - |\theta| > 0$ のとき $\boldsymbol{y}'(t) = -\rho R(\theta)\boldsymbol{y}(t-1)$ は周期解（円軌道）をもつ.

この Propositions 2 と 3 により　$\alpha > \frac{\pi}{2} - |\theta| > 0$ の場合

(2.1)
$$\boldsymbol{x}'(t) = -\alpha[1 - |\boldsymbol{x}(t)|^2]R(\theta)\boldsymbol{x}(t-1)$$

は　$\alpha[1 - |\boldsymbol{x}|^2] = \frac{\pi}{2} - |\theta|$　の時　周期軌道の存在が予想される.　このとき

$$|\boldsymbol{x}|^2 = 1 - \frac{1}{\alpha}\left(\frac{\pi}{2} - |\theta|\right) \qquad \text{だから}$$

(2.1) は半径 $\sqrt{1 - \frac{1}{\alpha}(\frac{\pi}{2} - |\theta|)}$　の周期軌道をもつのではないか？　と考えられる.

実際　$\alpha > \frac{\pi}{2} - |\theta| > 0$　のとき

$$r = \sqrt{1 - \frac{1}{\alpha}\left(\frac{\pi}{2} - |\theta|\right)}, \qquad \omega = |\theta| - \frac{\pi}{2}$$

とすると (2.1) は

(2.2)
$$\begin{cases} \begin{pmatrix} x(t) = r\cos\omega t \\ y(t) = r\sin\omega t \end{pmatrix} & (\theta > 0) \\ \begin{pmatrix} x(t) = r\cos(-\omega t) \\ y(t) = r\sin(-\omega t) \end{pmatrix} & (\theta < 0) \end{cases}$$

という周期解（円軌道）をもつことが容易に確かめられる.　故に次の定理が得られる.

Theorem 1　$\alpha > \frac{\pi}{2} - |\theta| > 0 \implies$ (2.1) は non-zero periodic solution をもつ.

問題 1 は簡単に肯定的に解決されたわけであるが、それでは次のような問題を考えよう.

問題2 $\alpha > \dfrac{\pi}{2} - \lvert\theta\rvert > 0$ のとき (2.1) は周期軌道 (2.2) 以外に周期軌道をもつか?

(2.1) の critical points は $(0,0)$ 及び $\{(x,y) : x^2+y^2=1\}$ の各点であることを注意しておく.

$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ として (2.1) を成分表示すると

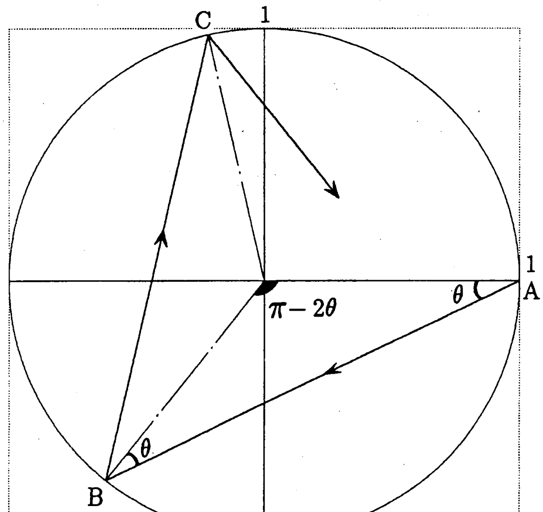
$$(2.1)' \qquad \begin{cases} x'(t) = -\alpha[1-|\boldsymbol{x}(t)|^2]\cdot\{\cos\theta\cdot x(t-1)-\sin\theta\cdot y(t-1)\} \\ y'(t) = -\alpha[1-|\boldsymbol{x}(t)|^2]\cdot\{\sin\theta\cdot x(t-1)+\cos\theta\cdot y(t-1)\} \end{cases}$$

であるから 初期時刻を $t_0 = 0$, 初期関数を $\begin{cases} \phi(t) = 1-\epsilon & (\epsilon > 0 \quad \text{は十分小}) \\ \psi(t) = 0 & for -1 \le t \le 0 \end{cases}$

とすると $t \in [0,1]$ では

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \tan\theta$$

となり 初期点 $A = (1-\varepsilon,\ 0)$ からの打ち出し角度は θ となる.



α をある程度大きくすると (2.1) の解の速度は大きくなることに注意しよう. 点Aから B まで解が移動するのにかかる時間が1秒以内となるように α を大きくしておくと解軌道は直線 AB 上を A から B まで移動することになる. B 点は $x^2+y^2=1$ に十分近いから B 点の近傍に解軌道が近づくと解の速度はほとんど0に近くなる. (円 $x^2+y^2=1$ 上の各点は critical point だから B 点は円 $x^2+y^2=1$ の内側にある.) 以下考え方の荒筋を述べることにする. B 点に解軌道が1秒以上留まっているならば先程の議論と同様に B 点からの打ち出し角度はほぼ θ となり解軌道は直線 BC 上を B から C まで移動す

ることになる． A から出発して k 回はね返って元の A 点に戻ってくれば、それが周期軌道になるわけである． すなわち $^{\exists}m \in \boldsymbol{N} : k(\pi - 2\theta) = 2\pi m$ となる m が存在すれば周期軌道があることになる．

$\theta = \dfrac{\pi}{n}$ の場合を考えると $k(\pi - \dfrac{2\pi}{n}) = 2\pi m.$ *i.e.*

$$k = \frac{2nm}{n-2}. \tag{2.3}$$

という関係式を得る． n が有理数ならば、(2.3) をみたす最小の自然数 m が存在する．即ち、n が有理数ならば、(2.3) をみたす k–星形周期軌道の存在が予想される． 実際の解軌道は B 点で直線的に折り返すわけではなく、B 点の近傍で解軌道は U ターンするので上の議論は証明にはなっていないことを注意しておく．

以上をまとめると次の Conjecture が得られる．

Conjecture

$^{\exists}\alpha_0 > \dfrac{\pi}{2} - |\theta| > 0$;

(i) $\alpha_0 \geq \alpha > \dfrac{\pi}{2} - |\theta| \Longrightarrow$ (2.2) は (2.1) の唯一の安定な周期解.

(ii) $\alpha > \alpha_0 \Longrightarrow$ (2.2) は (2.1) の不安定周期解． さらに$\theta = \dfrac{\pi}{n}$ (n は有理数) ならば、(2.2) 以外の (2.1) の解は (2.3) をみたすk–星形周期解に漸近する． (ただし初期関数 $(\phi(t), \psi(t))$ は$\phi^2(0) + \psi^2(0) < 1$ をみたすものとする)

以下に Conjecture を illustrate するいくつかの (2.1) の解軌道図を掲げておく．

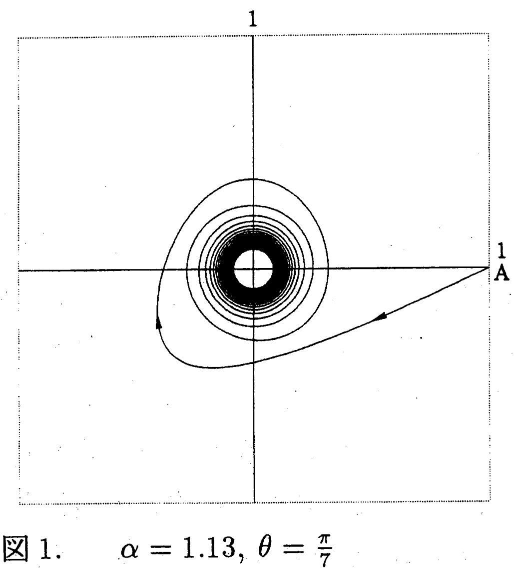


図 1. $\alpha = 1.13,\ \theta = \frac{\pi}{7}$
$\phi(t) = 0.999,\ \psi(t) = 0$

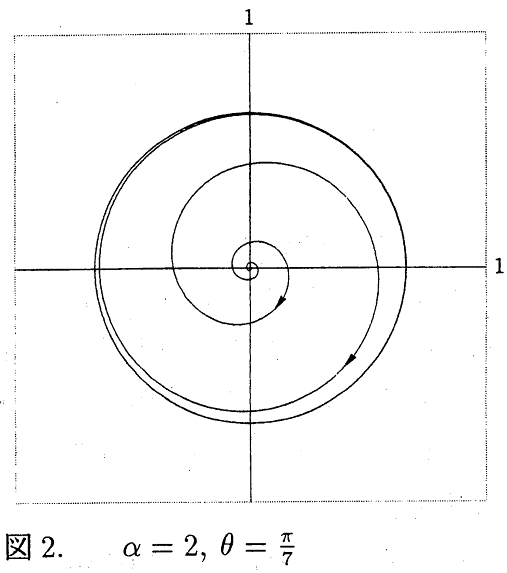


図 2. $\alpha = 2,\ \theta = \frac{\pi}{7}$
$\phi(t) = 0.01,\ \psi(t) = 0$

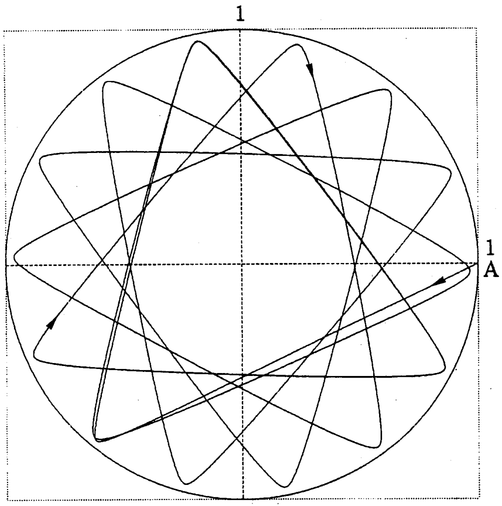


図 3.　$\alpha = 3,\ \theta = \frac{\pi}{7}$
$\phi(t) = 0.999,\ \psi(t) = 0$

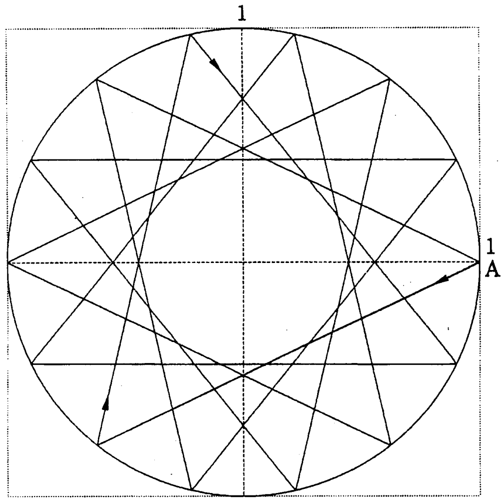
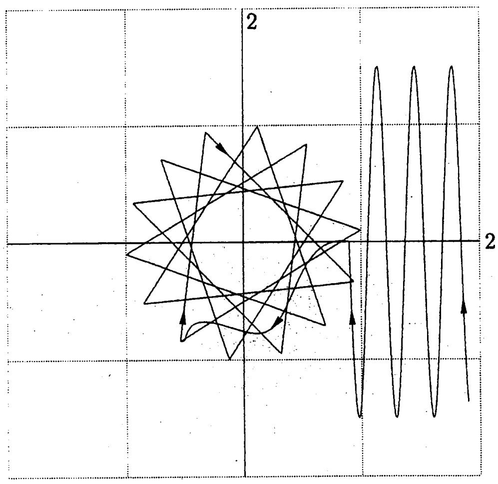


図 4.　$\alpha = 5,\ \theta = \frac{\pi}{7}$
$\phi(t) = 0.999,\ \psi(t) = 0$



$\Longleftarrow$　図 5.　$\alpha = 5,\ \theta = \frac{\pi}{7}$
$\phi(t) = 0.9 - t$
$\psi(t) = 1.5\sin(20t)$

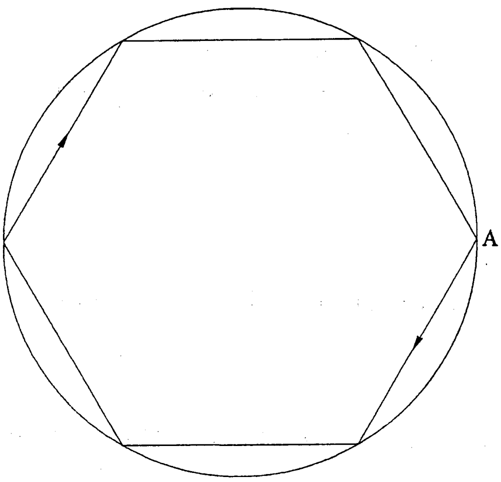


図 6.　$\alpha = 10,\ \theta = \frac{\pi}{3}$
$\phi(t) = 0.999,\ \psi(t) = 0$

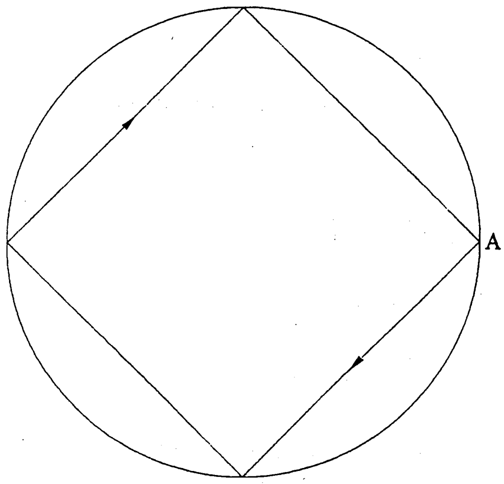


図 7.　$\alpha = 10,\ \theta = \frac{\pi}{4}$
$\phi(t) = 0.999,\ \psi(t) = 0$

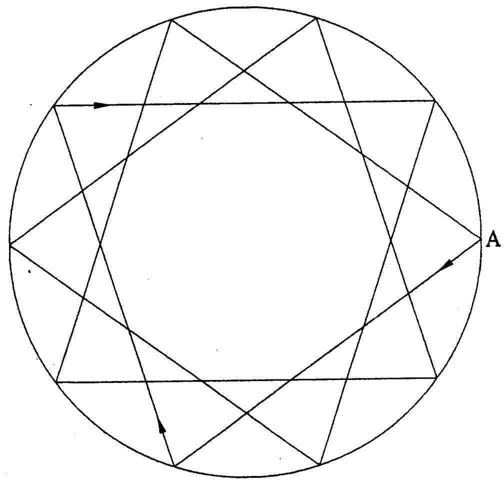


図 8.　$\alpha = 10,\ \theta = \frac{\pi}{5}$
$\phi(t) = 0.999,\ \psi(t) = 0$

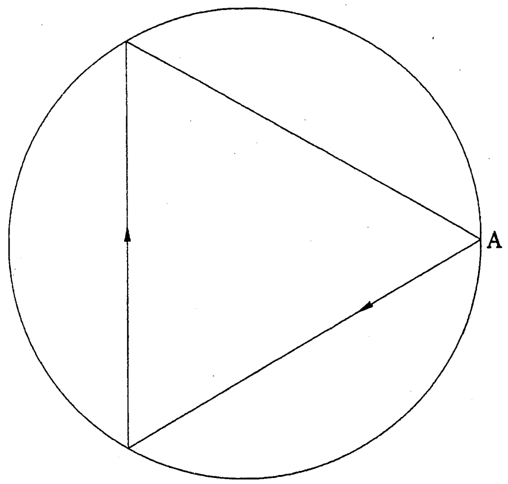


図 9.　$\alpha = 10,\ \theta = \frac{\pi}{6}$
$\phi(t) = 0.999,\ \psi(t) = 0$

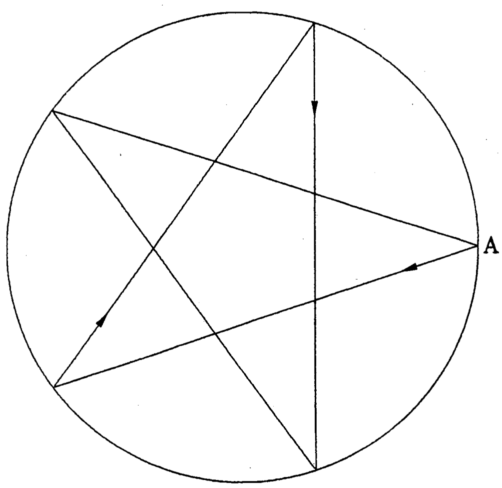


図 10.　$\alpha = 10,\ \theta = \frac{\pi}{10}$
$\phi(t) = 0.999,\ \psi(t) = 0$

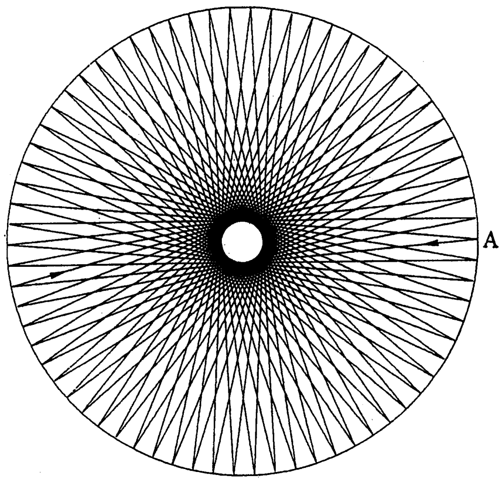


図 11.　$\alpha = 10,\ \theta = \frac{\pi}{35}$
$\phi(t) = 0.999,\ \psi(t) = 0$

参考文献

[1] J. K. Hale and S. M. V. Lunel, *Introduction to Functional Differential Equations,* 1993, Springer–Verlag.

[2] T. Hara and J. Sugie, *Stability region for systems of differential–difference equations,* to appear.