数理解析研究所講究録
901 巻 1995 年 30-38

相対UV^{k+1}群と写像

知念　直紹　(Naotsugu Chinen)

筑波大学院

0.序論

ここで扱う空間はすべて、局所コンパクト可分距離空間とし、写像は連続とする。空間Xが *cell-like* あるいは *CE* であるとは、XをあるANRの部分空間と思って、Xの任意の近傍に対してXはこの近傍の中で可縮になるときにいう。写像 $g: E\to F$ の各ファイバーが cell-like コンパクトのとき、gを *cell-like 写像*あるいは*CE-写像*という。 また空間Xが UV^n であるとは、XをあるANRの部分空間と思って、Xの任意の近傍Uに対してあるXの近傍Vが存在して、$V\subset U$であって任意の自然数$k\leqq n$とk次元球面S^kからVへの写像は(k+1)次元球体D^{k+1}からUへの写像に拡張できるときにいう。同様にしてUV^n *-写像*も定義できる。空間XとYはANR、$f: X\to Y$をホモトピー同値写像とする。fが *simple ホモトピー同値写像*であるとは、ANR Zと CE-写像 $g: Z\to X$、$h: Z\to Y$ が存在して $f\circ g\sim h$ を満たすときにいう。この定義を shape カテゴリーに一般化して、shape 同値なコンパクト空間XとYが *CE-同値*であるとは、コンパクト空間列 $\{E_i\}_{1\leq i\leq m}$、$\{F_i\}_{0\leq i\leq m}$ と CE-写像列 $\{f_i: E_i\to F_{i-1}\}_{1\leq i\leq m}$、$\{g_i: E_i\to F_i\}_{1\leq i\leq m}$ が得られ、$F_0=X$、$F_m=Y$を満たすときにいう。CE-写像列の代わりにUV^n-写像列に置き換えたとき、XとYが UV^n*-同値*であるという。

$$\begin{tikzcd} & E_1 \arrow[dl, "f_1"'] \arrow[dr, "g_1"] & & & & E_m \arrow[dl, "f_m"'] \arrow[dr, "g_m"] & \\ X=F_0 & & F_1 & \cdots & F_{m-1} & & F_m=Y \end{tikzcd}$$

最初に Ferry [Fe2] が S^1 と shape 同値なコンパクト空間であって、S^1 と CE-同値でない例をみつけた。しばらくして Daverman と Venema [D-V] が、任意の整数$n\geqq 1$に対して S^1 と shape 同値なコンパクト局所(n-2)-連結空間であって、S^1 と UV^{n-1}-同値でない例をみつけた。さらに Mrozik [Mr2] は一般に、任意の局所(n+1)-連結連続体Xに対して、もしXの基本群が無限ならば、XとUV^{n+1}-同値でない局所n-連結連続体を構成した。そのとき彼は CE-同値と UV^n-同値の判定をするために、k-次 CE-ホモトピー群 $\pi_k^{CE}(X)$、k-次 UV^n-ホモトピー群 $\pi_k^{(n)}(X)$ を導入した。つまり

定理0.1　任意の CE-写像 $f: X\to Y$ に対して、fは同型写像 $f_*: \pi_k^{CE}(X)\to\pi_k^{CE}(Y)$

を導く。さらに、もし f が UV^n-写像ならば、任意の $k \leqq n$ に対して f は同型写像 f_* : $\pi_k^{(n)}(X) \to \pi_k^{(n)}(Y)$ を導く。よって、空間 X と Y が CE-同値(UV^n-同値)ならば、$\pi_k^{CE}(X)$ と $\pi_k^{CE}(Y)$ (任意の $k \leqq n$ に対して $\pi_k^{(n)}(X)$ と $\pi_k^{(n)}(Y)$)は同型になる。

また k-次 ホモトピー群 $\pi_k^{CE}(X)$ と k-次 UV^n-ホモトピー群 $\pi_k^{(n)}(X)$ は k-次 ホモトピー群 $\pi_k(X)$ の拡張になっている。すなわち、

定理0.2 任意の局所 n-連結空間 X、n, $m \geqq k$ に対して、k-次 ホモトピー群 $\pi_k(X)$ と k-次 UV^m-ホモトピー群 $\pi_k^{(m)}(X)$ と k-次 CE-ホモトピー群 $\pi_k^{CE}(X)$ は同型になる。

実際には自然な準同型写像 t^{CE} : $\pi_k(X) \to \pi_k^{CE}(X)$、 t^n : $\pi_k(X) \to \pi_k^{(n)}(X)$ が存在して、上述の場合にはこの写像が同型になっている。

一般に UV^n-ホモトピー群と CE-ホモトピー群は計算するのは難しいので、少し計算できるようにしたい。そのために空間対 (X, A) に対して相対 k-次 UV^n-ホモトピー群 $\pi_k^{(n)}(X, A)$ と相対 k-次 CE-ホモトピー群 $\pi_k^{CE}(X, A)$ を自然に定義し、完全系列

$$\cdots \to \pi_k^{(m)}(A, x_0) \to \pi_k^{(m)}(X, x_0) \to \pi_k^{(m)}(X, A, x_0) \to \pi_{k-1}^{(m)}(A, x_0) \to \cdots$$

$$\cdots \to \pi_k^{CE}(A, x_0) \to \pi_k^{CE}(X, x_0) \to \pi_k^{CE}(X, A, x_0) \to \pi_{k-1}^{CE}(A, x_0) \to \cdots$$

得よう。

1.相対 UV^n-ホモトピー群と相対 CE-ホモトピー群の定義

まず Mrozik が定義した空間 X の k-次 UV^m-ホモトピー群 $\pi_k^{(m)}(X)$ と k-次 CE-ホモトピー群 $\pi_k^{CE}(X)$ を思い出してみよう。x_0 を基点として選んでおく。任意の自然数 $k \geq 1$ に対して、集合 $UV^m_k(X, x_0)$ を次のように決める。今 C を UV^m コンパクト、α を (k-1)次元球面 S^{k-1} から C への、β を C から X への写像とする。さらに $\beta \circ \alpha(S^{k-1}) = \{x_0\}$ を満たすとする。このとき 3 つの組(C, α, β)を Δ と書く。上述の条件を満たす Δ の全体を $UV^m_k(X, x_0)$ とする。次に $UV^m_k(X, x_0)$ に同値関係 $\equiv$ を入れよう。任意の $UV^m_k(X, x_0)$ の2つの元 $\Delta = (C, \alpha, \beta)$ と $\Delta' = (C', \alpha', \beta')$ に対して $\Delta' \geqq \Delta$ であるとは、写像 γ : $C' \to C$ が存在して $\gamma \circ \alpha' = \alpha$ と $\beta \circ \gamma = \beta'$ を満たすことをいう。

$$\begin{tikzcd}
 & C \arrow[dd, "\gamma"] \arrow[dr, "\beta'"] & \\
S^{k-1} \arrow[ur, "\alpha'"] \arrow[dr, "\alpha"'] & & X \\
 & C \arrow[ur, "\beta"'] &
\end{tikzcd}$$

$UV^m{}_k(X, x_0)$の元の列$\Delta_1 = \Delta, \Delta_2, \ldots, \Delta_{2r+1} = \Delta'$が存在して、任意の$i = 1, \ldots, r$に対して$\Delta_{2i} \geq \Delta_{2i\pm1}$を満たすとき$\Delta' \equiv \Delta$と書く。明らかに$\equiv$は同値関係になっている。

$\pi_k{}^{(m)}(X, x_0)$を$UV^m{}_k(X, x_0)/\equiv$とする。ホモトピー群$\pi_k(X, x_0)$の任意の元は、k-次元球体D^kからXへの写像βで$\beta(S^{k-1}) = \{x_0\}$を満たすものとすれば、そのホモトピー類$[\beta]$と表わせる。$i : S^{k-1} \to D^k$を包含写像とすれば、$\pi_k(X, x_0)$から$\pi_k{}^{(m)}(X, x_0)$への対応t^mが考えられる、すなわち$t^m([\beta]) = [D^k, i, \beta]$。ここで$[D^k, i, \beta]$は$(D^k, i, \beta)$の同値類とする。またこの対応は定義可能になっていることに注意する。このことから$\pi_k{}^{(m)}(X, x_0)$は普通のホモトピー群$\pi_k(X, x_0)$のk-次元球体D^kをUV^mコンパクトに変えてつくったものと思うことができる。

次に$\pi_k{}^{(m)}(X, x_0)$に演算をいれたい。しかも$\pi_k(X, x_0)$の演算の拡張になるように、つまりt^mが準同型になるようにしたい。今$k \geqq 2$とする。写像$\kappa : S^{k-1} \to (S^{k-1}, *) \vee (S^{k-1}, *)$を$\kappa(S^{k-2}) = \{*\}$となる自然な写像とする。また$\mu : (X, x_0) \vee (X, x_0) \to X$、$x \in (X, x_0) \subset (X, x_0) \vee (X, x_0)$を$x \in X$に対応させる自然な写像とする。任意の2つの元$[\Delta_i] = [C_i, \alpha_i, \beta_i] \in \pi_k{}^{(m)}(X, x_0)$ ($i = 1, 2$) に対して$[\Delta_1][\Delta_2]$を次のように決める。

$$[\Delta_1][\Delta_2] = [(C_1, \alpha_1(*)) \vee (C_2, \alpha_2(*)), (\alpha_1 \vee \alpha_2) \circ \kappa, \mu \circ (\beta_1 \vee \beta_2)]$$

$[\Delta_1][\Delta_2]$は定義可能で、これは群の演算を与える。上述と同様にしてこの演算はホモトピー群の演算を拡張したものになっていることがわかる。$k = 1$の場合とくわしいことは[Mr2]を参照してほしい。

この章の最後に(X, A, x_0)の相対UV^m-ホモトピー群$\pi_k{}^{(m)}(X, A, x_0)$を定義しよう。$\pi_k{}^{(m)}(X, x_0)$と同様にして、普通の相対ホモトピー群$\pi_k(X, A, x_0)$の拡張になるようにしたい。さらに$\pi_k{}^{(m)}(X, \{x_0\}, x_0)$と$\pi_k{}^{(m)}(X, x_0)$は同型になるようにもしたい。任意の自然数$k \geq 1$に対して、集合$UV^m{}_k(X, A, x_0)$を次のように決める。今$C_X$を$UV^m$コンパクト、$C_A$を$C_X$の空集合でない部分空間で$UV^m$コンパクトとする。$\alpha : (D^{k-1}, S^{k-2}) \to (C_X, C_A)$と$\beta : (C_X, C_A) \to (X, A)$を写像とし$\beta \circ \alpha(D^{k-1}) = \{x_0\}$を満たすとする。ここで$S^{-1}$は空集合とする。4つの組$(C_X, C_A, \alpha, \beta)$を$\Delta$と書き、上述の条件を満たす$\Delta$の全体を$UV^m{}_k(X, A, x_0)$とする。$UV^m{}_k(X, x_0)$のとき同様にして$UV^m{}_k(X, A, x_0)$に同値関係$\equiv$を入れる。すなわち任意の$UV^m{}_k(X, A, x_0)$の2つの元$\Delta = (C_X, C_A, \alpha, \beta)$と$\Delta' = (C_X', C_A', \alpha', \beta')$に対して$\Delta' \geqq \Delta$であるとは、写像$\gamma : (C_X', C_A') \to (C_X, C_A)$が存在

して $\gamma\circ\alpha'=\alpha$ と $\beta\circ\gamma=\beta'$を満たすことをいう。$UV^m_k(X, A, x_0)$の元の列 $\Delta_1=\Delta$, $\Delta_2, \dots, \Delta_{2r+1}=\Delta'$ が存在して、任意の $i=1, \dots, r$ に対して $\Delta_{2i}\geq\Delta_{2i\pm1}$ を満たすとき $\Delta'\equiv\Delta$ と書く。$\pi_k(X, A, x_0)$ を $UV^m_k(X, A, x_0)/\equiv$ とする。

今 $k\geqq 2$ とする。相対ホモトピー群 $\pi_k(X, A, x_0)$ の任意の元は、$\beta:(I^k, I^{k-1}\times\{0\}, J_k)\to(X, A, \{x_0\})$ のホモトピー類 $[\beta]$ と表わせる。ここで $(I^k, I^{k-1}\times\{0\}, J_k)=([0,1]^k, [0,1]^{k-1}\times\{0\}, ([0,1]^{k-1}\times\{1\})\cup(\partial[0,1]^{k-1}\times[0,1]))$ とする。対応 $t_k{}^m:\pi_k(X, A, x_0)\to\pi_k{}^{(m)}(X, A, x_0)$ を $t_k{}^m([\beta])=[I^k, I^{k-1}\times\{0\}, \mathrm{incl}, \beta]$ と決める。ここで $\mathrm{incl}:(D^{k-1}, S^{k-2})=(J_k, \partial I^{k-1}\times\{0\})\to(I^k, I^{k-1}\times\{0\})$ は包含写像とする。すると $t_k{}^m$ は定義可能であることがわかる。同様に $k=1$ のとき $t_1{}^m$ を定義したい。$\pi_1(X, A, x_0)$ の任意の元は、$\beta:(I, \{0,1\}, \{1\})\to(X, A, \{x_0\})$ のホモトピー類 $[\beta]$ と表わせる。対応 $t_1{}^m:\pi_1(X, A, x_0)\to\pi_1{}^{(m)}(X, A, x_0)$ を $t_1{}^m([\beta])=[I, \{0\}, \alpha, \beta]$ と決める。ここで $\alpha:\{0\}\to[0,1]$ は包含写像とする。

次に$\pi_k{}^{(m)}(X, A, x_0)$に演算をいれたい。しかも$\pi_k(X, A, x_0)$の演算の拡張になるように、つまり t^m が準同型になるようにしたい。今 $k\geqq 3$ とする。写像 $\kappa:D^{k-1}\to(D^{k-1}, *)\vee(D^{k-1}, *)$を$\kappa(D^{k-2})=\{*\}$ となる自然な写像とする。任意の2つの元 $[\Delta_i]=[C_{X,i}, C_{A,i}, \alpha_i, \beta_i]\in\pi_k{}^{(m)}(X, A, x_0)$ $(i=1,2)$ に対して$[\Delta_1][\Delta_2]$ を次のように決める。

$$
\begin{aligned}
[\Delta_1][\Delta_2]=[&(C_{X,1}, \alpha_1(*))\vee(C_{X,2}, \alpha_2(*)),\\
&(C_{A,1}, \alpha_1(*))\vee(C_{A,2}, \alpha_2(*)),\\
&(\alpha_1\vee\alpha_2)\circ\kappa,\ \mu\circ(\beta_1\vee\beta_2)]
\end{aligned}
$$

$[\Delta_1][\Delta_2]$ は定義可能で、これは群の演算を与える。次に $k=2$ とする。写像 $\kappa:D^1=[-1,1]\to(D^1, *)\vee(D^1, *)=[-1,1]$ を $\kappa(t)=2t+1$ $(t\in[-1,0])$、$\kappa(t)=2t-1$ $(t\in[0,1])$ と定義する。後は $k\geqq 3$ のときと同様に$[\Delta_1][\Delta_2]$ を定義することができ、$\pi_2{}^{(m)}(X, A, x_0)$ に群の演算を与える。$k=1$ のときは普通の相対ホモトピー群と同じく一般に群の演算は入らない。

UV^m コンパクト C、C_X と C_AをそれぞれCE コンパクトに変えれば、同様にしてCE-ホモトピー群 $\pi_k{}^{CE}(X, x_0)$ と相対CE-ホモトピー群 $\pi_k{}^{CE}(X, A, x_0)$ が定義できる。

2. UV^m-ホモトピー群と CE-ホモトピー群の完全系列

この章ではUV^m-ホモトピー群と CE-ホモトピー群の完全系列を構成しよう。$\pi:D^{k-1}\to S^{k-1}$ は $\pi(S^{k-2})=\{*\}$ を満たす自然な写像とする。すると任意の写像 $\alpha_X:S^{k-1}\to C_X$ に対して、$\alpha_X\circ\pi=\dot{\alpha}$ を満たす写像 $\dot{\alpha}:(D^{k-1}, S^{k-2})\to(C_X, \alpha_X(*))$ が得られる。(X, A) を空間列、$i:A\to X$ をその包含写像とする。今 $k\geqq 2$ とし、次の3つの準同型写像を定義しよう。

$i_{*k}: \pi_k^{(m)}(A, x_0) \to \pi_k^{(m)}(X, x_0)$、 $i_{*k}([C_A, \alpha_A, \beta_A])=[C_A, \alpha_A, i \circ \beta_A]$

$$S^{k-1} \xrightarrow{\alpha_A} C_A \xrightarrow{\beta_A} A \xrightarrow{i} X$$

$\sigma_k: \pi_k^{(m)}(X, x_0) \to \pi_k^{(m)}(X, A, x_0)$、 $\sigma_k([C_X, \alpha_X, \beta_X])=[C_X, \alpha_X(*), \dot{\alpha}, \beta_X]$

$$(D^{k-1}, S^{k-2}) \xrightarrow{\pi} (S^{k-1}, *) \xrightarrow{\alpha_X} (C_X, \alpha_X(*)) \xrightarrow{\beta_X} (X, A)$$

$\partial_k: \pi_k^{(m)}(X, A, x_0) \to \pi_{k-1}^{(m)}(A, x_0)$、 $\partial_k([C_X, C_A, \alpha, \beta])=[C_A, \alpha|S^{k-2}, \beta|C_A]$

$$S^{k-2} \xrightarrow{\alpha|} C_A \xrightarrow{\beta|} A$$

とすると、この準同型写像は次の補題を満たす。

補題2.1. 任意の整数 $k \geqq 2$ に対して、3つの等式 Image(σ_k) =Ker(∂_k)、Image(i_{*k}) =Ker(σ_k)、Image(∂_{k+1}) =Ker(i_{*k}) が成立する。

$k=1$ のとき、同様にして $i_{*1}: \pi_1^{(m)}(A, x_0) \to \pi_1^{(m)}(X, x_0)$ は定義でき、σ_1 : $\pi_1^{(m)}(X, x_0) \to \pi_1^{(m)}(X, A, x_0)$ は次のように決める。任意の写像 $\alpha_X: S^0 \to C_X$ に対して写像 $\alpha'_X: D^0 \to C_X$ を $\alpha'_X(D^0)=\alpha_X(\{1\})$ とすれば、$\pi_1^{(m)}(X, x_0)$ の元 $[C_X, \alpha_X, \beta_X]$ に対して $\sigma_1([C_X, \alpha_X, \beta_X])=[C_X, \alpha_X(-1), \alpha'_X, \beta_X]$ と定義できる。

$\pi_0^{(m)}(A, x_0)$ と $\pi_0^{(m)}(X, x_0)$ はそれぞれ、AとXの UV^m 連結成分全体とする(詳しいことは [Mr1]を参照せよ)。A の UV^m 連結成分Cに対してCを含むXの UV^m 連結成分に対応させる対応を $i_{*0}: \pi_0^{(m)}(A, x_0) \to \pi_0^{(m)}(X, x_0)$ とする。また $\pi_1^{(m)}(X, A, x_0)$ の元 $[C_X, C_A, \alpha, \beta]$ を $\beta(C_A)$ を含むXの UV^m 連結成分に対応させる対応を ∂_1 : $\pi_1^{(m)}(X, A, x_0) \to \pi_0^{(m)}(A, x_0)$ とする。一般に $\pi_0^{(m)}(A, x_0)$、$\pi_0^{(m)}(X, x_0)$ と $\pi_1^{(m)}(X, A, x_0)$ は群ではないので、x_0 を含むAの UV^m 連結成分を C'、x_0 を含むXの UV^m 連結成分を C" として、

Ker(i_{*0}) $=(i_{*0})^{-1}$(C")、
Ker(∂_1) $=(\partial_1)^{-1}$(C')

とすると、

補題2.2. Image(i_{*1}) =Ker(σ_1)、 Image(σ_1) =Ker(∂_1)、Image(∂_1) =Ker(i_{*0})。

が示せる。補題2.1と補題2.2とMrozik [Mr2] の結果から次の定理が得られる。

定理2.3. 空間対 (X, A) に対して、次の UV^m-ホモトピー群の完全系列が存在する。

$$1 \to \pi^{(m)}_{m+1}(X, A, x_0) \xrightarrow{\partial_{m+1}} \pi^{(m)}_{m}(A, x_0) \xrightarrow{i_{*m}} \pi^{(m)}_{m}(X, x_0) \to \cdots$$
$$\cdots \to \pi^{(m)}_{k}(A, x_0) \xrightarrow{i_{*k}} \pi^{(m)}_{k}(X, x_0) \xrightarrow{\sigma_k} \pi^{(m)}_{k}(X, A, x_0) \xrightarrow{\partial_k} \pi^{(m)}_{k-1}(A, x_0) \to \cdots$$
$$\cdots \to \pi^{(m)}_{1}(X, x_0) \xrightarrow{\sigma_1} \pi^{(m)}_{1}(X, A, x_0) \xrightarrow{\partial_1} \pi^{(m)}_{0}(A, x_0) \xrightarrow{i_{*0}} \pi^{(m)}_{0}(X, x_0)$$

同様にしてCE-ホモトピー群に対しても、

定理2.4. 空間対 (X, A) に対して、次の CE-ホモトピー群の完全系列が存在する。

$$\cdots \to \pi_k{}^{CE}(A, x_0) \to \pi_k{}^{CE}(X, x_0) \to \pi_k{}^{CE}(X, A, x_0) \to \pi_{k-1}{}^{CE}(A, x_0) \to \cdots$$
$$\cdots \to \pi_1{}^{CE}(X, x_0) \to \pi_1{}^{CE}(X, A, x_0) \to \pi_0{}^{CE}(A, x_0) \to \pi_0{}^{CE}(X, x_0).$$

が得られる。

3. 応用

Mrozik は [Mr2] の中で $\pi_k{}^{(m)}(X, x_0) = 1\ (k > m)$ を示した。UV^m-ホモトピー群の完全系列からすぐに

命題3.1. 空間対 (X, A, x_0)、自然数 m, k に対して、もし $k - m \geqq 2$ を満たすならば、$\pi_k{}^{(m)}(X, A, x_0) = 1$。

がわかる。また (X, A, x_0) を (D^k, S^{k-1}, s_0) とすれば、$\pi_k{}^{(k-1)}(X, A, x_0) \neq 1$ がわかる。さらにVenema [Ve] がすべての連続体 X に対して $\pi_k{}^{(k+1)}(X) = \pi_k{}^{(k+2)}(X) = \cdots = \pi_k{}^{CE}(X)$ を示した。よってUV^m-ホモトピー群 と CE-ホモトピー群の完全系列を使って、

命題3.2. 空間対 (X, A)、自然数 k に対して、

$$\pi_k{}^{(k+1)}(X, A, x_0) = \pi_k{}^{(k+2)}(X, A, x_0) = \cdots = \pi_k{}^{CE}(X, A, x_0)$$

を得ることができる。また定理0.2 とホモトピー群とUV^m-ホモトピー群 と CE-ホモトピー群の完全系列より、

命題3.3. 任意の局所 n-連結空間対 (X, A, x_0)、$n, m \geqq k \geqq 2$ に対して、$\pi_k(X, A, x_0)$ と $\pi_k{}^{(m)}(X, A, x_0)$ と $\pi_k{}^{CE}(X, A, x_0)$ は同型になる。$k=1$ のときは3つの集合 $\pi_1(X, A, x_0)$ と $\pi_1{}^{(m)}(X, A, x_0)$ と $\pi_1{}^{CE}(X, A, x_0)$ は同じものになる。

ある空間 X の k-次 shape 群を $\underline{\pi}_k(X)$、k-次 strong shape 群を $\underline{\underline{\pi}}_k(X)$ と表わす。連続体 X の pro-$\pi_1(X)$ が *pro-finite* であるとは、X をCW複体の射影系 $\{K_i, \alpha_i\}$ の射影極限 $\varprojlim(K_i, \alpha_i)$ で表わしたとき、任意の自然数 i に対してある自然数 $j > i$ が存在して、

$\alpha_{i+1*}\circ\cdots\circ\alpha_{j*}(\pi_1(K_j)) \subset \pi_1(K_i)$ が有限のときをいう。

[Ch] の中で $\pi_k^{(k+1)}(X)$ から $\underline{\pi}_k(X)$ への準同型写像 $\underline{s}_k : \pi_k^{(k+1)}(X) \to \underline{\pi}_k(X)$ が存在することがわかり、

定理3.4. もし連続体 X の pro-$\pi_1(X)$ が pro-finite ならば、任意の整数 $k \geqq 0$ に対して $\underline{s}_k : \pi_k^{(k+1)}(X) \to \underline{\pi}_k(X)$ は同型写像になる。

同様にして、$\pi_k^{(k)}(X)$ から $\underline{\pi}_k(X)$ への準同型写像 $\underline{s}_k : \pi_k^{(k)}(X) \to \underline{\pi}_k(X)$ が定義できる。次の可換図

$$
\begin{tikzcd}
\pi_k^{(k+1)}(X) \arrow[rr] \arrow[dd, "\underline{s}_k"'] & & \pi_k^{(k)}(X) \arrow[dd, "\underline{s}_k"] \\
& \underline{\pi}_k(X) \arrow[ul] \arrow[ur] \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
\underline{\pi}_k(X) \arrow[rr] & & \underline{\pi}_k(X)
\end{tikzcd}
$$

をみれば、$\pi_k^{(k)}(X)$ は $\pi_k(X)$ と $\underline{\pi}_k(X)$、$\pi_k^{(k+1)}(X)$ は $\pi_k(X)$ と $\underline{\pi}_k(X)$ の中間的な群と考えられる。

Chapman と Ferry は [C-F] の中で次の定理を示した。

定理3.5. $p : E \to B$ を fibration で p の各ファイバーはコンパクトANR とする。もしBが局所連結ならば、任意の 2 つのファイバーは simple ホモトピー同値になっている。

E と BはコンパクトANRとする。写像 $p : E \to B$ が *approximate fibration* であるとは、ホモトピー $f : Z\times I \to B$ と $p\circ F_0 = f\,|Z\times\{0\}$を満たす写像 $F_0 : Z \to E$、さらに $\varepsilon > 0$ に対して、写像 $F : Z\times I \to E$ が存在して、$F_0 = F\,|Z\times\{0\}$ と $d(p\circ F,\ f) < \varepsilon$ をに満たすときにいう。もしB が弧状連結ならば、p の任意の 2 つのファイバーは shape ホモトピー同値になっている。よって自然に次の問題が考えられる。

問題3.6. 写像 $p : E \to B$ が approximate fibration で B が弧状連結したとき、p の任意の 2 つのファイバーは CE-ホモトピー同値あるいはUV^m-ホモトピー同値か？

しかし一般には成立しない。

例3.7. $R = \{(e^{2\pi it}, e^{\pi i/t}) \in S^1\times S^1 : t \geqq 1\}$、$C = S^1\times\{1\}$、$X = C \cup R$ とすると、[Fe1] より空間 X は S^1 と shape ホモトピー同値だが CE-ホモトピー同値でないことに注意する。 $S^1\times S^1$ での X のコンパクト近傍列 $\{U_n$: n は自然数 $\}$ で次のことを満たすとする。 任意の自然数 n に対して、U_n と $Cl(U_{n+1} - U_n)$ と $Cl(S^1\times S^1 - U_n)$は $S^1\times I$ と同相で、$U_{n+1} \subset \mathrm{Int}\, U_n$, $X = \cap_{n\in N} U_n$。このコンパクト近傍列 $\{U_n$: n は自然数 $\}$から写像 $p : S^1\times S^1 \to S^1$ を導くことができる。このとき $p^{-1}(\{1\}) = X$、$p(U_n) = \{e^{\pi it} : -1/2n \leqq t \leqq 1/2n\}$、 $p|S^1\times S^1 - p^{-1}(\{1\}) : S^1\times S^1 - p^{-1}(\{1\}) \to S^1 - \{1\}$ は $S^1\times(0, 1) = S^1\times S^1 - p^{-1}(\{1\})$ から $(0, 1) = S^1 - \{1\}$ への射影写像になっている。また写像 p は局所自明なバンドルの極限になっているので、写像 p は approximate fibration である。

$S^1 - \{1\}$ の点 x のファイバーは S^1 だから、$p^{-1}(\{1\})$ と $p^{-1}(x)$ はCE-ホモトピー同値でない。

写像 $p: E \to B$ が approximate fibration で p の各ファイバーは連結とする。 b を B の基点として、$F = p^{-1}(b)$ とおく。$s: \underline{\pi}_k(F, e) \to \underline{\pi}_k(F, e)$ を自然な準同型写像とすれば、次のことがすぐにわかる。$s \circ \underline{s}_k : \pi_k^{(k+1)}(F, e) \to \underline{\pi}_k(F, e)$ が同型写像であるための必要十分条件は、p のCE-ホモトピー完全系列

$$\cdots \to \pi_k^{CE}(F, e) \to \pi_k^{CE}(E, e) \to \pi_k^{CE}(B, b) \to \pi_{k-1}^{CE}(F, e) \to \cdots$$
$$\cdots \to \pi_1^{CE}(F, e) \to \pi_1^{CE}(E, e) \to \pi_1^{CE}(B, b) \to \pi_0^{CE}(F, e) \to \pi_0^{CE}(E, e)$$

が得られることである。よって例3.7で挙げた写像 $p: E \to B$ のCE-ホモトピー完全系列は得られないことになる。上述と問題3.6を合わせて考えれば、

問題3.8. 写像 $p: E \to B$ が approximate fibration とする。もし p の任意の２つのファイバーは CE-ホモトピー同値であれば、$p: E \to B$ のCE-ホモトピー完全系列は得られるか？

が考えられる。また

定理3.9. 連続体 X の pro-$\pi_1(X)$ が pro-finite とする。連続体 Y は X とshape 同値ならば、任意の自然数 n に対して、 Y と X は UV^n- 同値。

が知られているので（[Fe3]を参照）、問題3.8をもう少し簡単にして

問題3.10. 写像 $p: E \to B$ が approximate fibration で 、 p のファイバー F は連結とし、pro-$\pi_1(F)$ が pro-finite とする。このとき $p: E \to B$ のCE-ホモトピー完全系列は得られるか？

また [Fe1] から

定理3.11. X と Y はコンパクトとする。X と Y がホモトピー同値ならば、X と Y は CE- 同値。

が知られているので、

問題3.12. 写像 $p: E \to B$ が fibration で、 E と B はコンパクトとする。このとき $p: E \to B$ のCE-ホモトピー完全系列は得られるか？

も考えることができる。また $\pi_k^{(k)}(X)$ は $\pi_k(X)$ と $\underline{\pi}_k(X)$、$\pi_k^{(k+1)}(X)$ は $\pi_k(X)$ と $\underline{\pi}_k(X)$ の中間的な群と考えれば、この問題は正しいと思われる。それぞれの問題の部分解が次のように得られた。

定理3.13. 写像 $p: E \to B$ が shape fibration で 、E と B はコンパクトとする。さらに p のファイバー F は連結とし、pro-$\pi_1(F)$ と pro-$\pi_1(E)$ が pro-finite とする。このとき $p: E \to B$ のCE-ホモトピー完全系列は得られる。

定理3.14. 写像p：E→Bがfibrationで、EとBはコンパクトとする。もしBがANRならば、このときp：E→BのCE-ホモトピー完全系列は得られる。

参考文献

[Ch] Chinen, N., A relation between k-th UV^{k+1} groups and k-th strong shape groups, to appear.

[C-F] Chapman, T. A. and Ferry, S., Hurewicz fiber maps with ANR fibers, Topology 16 (1977), 131-143.

[C-D] Coram, D.S. and Duvall, P.F., Approximate fibrations, Rocky Mountain Journal of Math. 7 (1977), 275-288.

[Dr] Dranishnikov, A. N., Universal Menger compacta and universal maps, Math. USSR-Sb. 57 (1987), 131-150.

[D-V] Daverman, R. J. and Venema, G. A., CE equivalence and shape equivalence of 1-dimensional compacta, Topology and its Appl. 26 (1987), 131-142.

[D-S] Dydak, J and Segal, J., Shape theory, Lecture Notes in Mathematics 688 (Springer, Berlin, 1978).

[Fe1] Ferry, S., Homotopy, simple homotopy and compacta, Topology 19 (1977), 101-110.

[Fe2] Ferry, S., Shape equivalence does not imply CE equivalence, Proc. Amer. Math. Soc. 80 (1980), 154-156.

[Fe3] Ferry, S., UV^k-equivalent compacta, Proceedings of the 1986 Dubrovnik Conference, Lecture Notes in Mathematics 1283 (Springer, Berlin, 1987), 88-114.

[Mr1] Mrozik, P., Continua that are shape equivalent but not UV^1-equivalent, Topology and its Appl. 30 (1988), 199-210.

[Mr2] Mrozik, P., CE equivalence and shape equivalence of LC^n compacta, Topology and its Appl. 50 (1993), 11-33.

[M-S] Mardesic, S. and Rushing, T.B., Shape fibration I, Gen. Topology and its Appl. 9 (1978), 193-215.

[M-S] Mardesic, S. and Segal, J., Shape Theory (North-Holland, Amsterdam, 1982).

[Ve] Venema, G. A., Cell-like images and UV^m groups, Topology and its Appl. 50 (1993), 35-46.