数理解析研究所講究録
901巻 1995年 39-45

Universal Spaces for Approximable Dimension

大阪教育大数理科学　小山　晃 (Osaka Kyoiku Univ.)

一般に、複雑な空間に対して「少しでも分かりやすい」空間と「よい規則を持った」写像を見つけることは大切な作業であり、resolutionsなどと呼ばれている。例えば、代数的トポロジーなどでは「被覆空間」の考え方は重要な武器である。general topology 的に resolutions と考えらるものは：

定理 1 任意の *compact* 距離空間が *Cantor* 集合 C からの連続像になる。

また、関数解析的に用いられ、general topology にも利用されているものでは：

定理 2 (Miljutin の定理) *regular averaging operator* を誘導する連続な全射 $f : C \longrightarrow I$ が存在する。ただし、C は *Cantor* 集合、I は単位区間を表す。

などがある。一方、次元の特徴付けとして知られている次の結果も n 次元空間を 0 次元空間によって表現する意味で resolutions と考えてよいだろう。

定理 3 (次元の特徴付け定理) *compact* 距離空間 X の次元が n 以下である必要十分条件は n 次元 *compact* 距離空間 Z と連続写像 $f : Z \longrightarrow X$ *s.t.* $|f^{-1}(x)| \leq n$ *for all xinX* が存在することである。

この拙文では Edwards-Walsh の定理を出発点としてコホモロジー次元に関連する resolutions について考える。最初にコホモロジー次元の定義を与えておく：可換群 G 、(compact) 距離空間 X とする。"$c-\dim_G X \leq n$" は、X の任意の閉部分集合 A から Eilenberg-MacLane 空間 $K(G,n)$ への任意の連続写像　$f : A \longrightarrow K(G,n)$ が全体空間 X への拡張 $\tilde{f} : X \longrightarrow K(G,n)$ を持つことを意味する。これを、「X の (係数群) G に関するコホモロジー次元が n 以下である」という。

コホモロジー次元の概念は、Alexandroff によって導入されて以来図形の複雑さを表す一つの指標としてさまざまな形で利用され、研究されてきた。Pontjagin,Bockstein 等のモスクワグループ、児玉、Dyer 等による第一段階の動きの後、多少低迷の時期を迎えたが、８０年代になり大きな飛躍を遂げた。その動機になったのは Edawards による (整係数) コホモロジー次元の特徴付け定理であった (証明は Walsh [11] による)。

定理 4 (Edwards-Walsh の定理) *compact* 距離空間 X の整係数コホモロジー次元が n 以下である必要十分条件は n 次元 *compact* 距離空間 Z と *CE*-写像 $f : Z \longrightarrow X$ が存在することである。

このような $f : Z \longrightarrow X$ を X の **CE-resolution** という。

この結果はさまざまな応用を導くが、CE-resolution の存在はコホモジー次元と次元との関係を解明する顕微鏡のような役割を期待することができる。Edwards-Walsh の定理 から直ちに反応して Dranishnikov[1] はその結果を巡回群を係数に持つコホモロジー次元の場合に発展させた。すなわち：

定理 5 (Dranishnikov の定理) *compact* 距離空間 X について、$c-\dim_{\boldsymbol{Z}_p} X \leq n$ である必要十分条件は, n 次元 *compact* 距離空間 Z と連続な全射 $f : Z \longrightarrow X$ *s.t.*

$$\check{H}^n(f^{-1}(x); \boldsymbol{Z}_p) = 0 \ for\ all\ x \in X$$

が存在することである。

である。これによって我々は $\boldsymbol{Z}_p$ コホモロジー次元を次元から眺める顕微鏡も得たことになる。これら二つの結果を並べると（常に）次のような質問を受けることが多かった。

質問 1 任意の係数群 G と *(compact)* 距離空間 X について、$c-\dim_G \leq n$ である必要十分条件は n 次元 *(compact)* 距離空間 Z と連続な全射 $f : Z \longrightarrow X$ *s.t.*

$$\check{H}^*(f^{-1}(x); G) = 0\ for\ all\ x \in X$$

が存在することか？

このような連続写像を 空間 X の $G-$**acyclic resolution** という。

ところが、一般にはコホモロジー次元はこのような形では特徴づけられないことが知られている（Koyama-Yokoi[7] 参照)。そこで、筆者と横井 [7] はコホモロジー次元から少し離れ、$G-$acyclic resolutions をもつ (compact) 距離空間について考えてみた。アイディアは Mardešić[8] によるコホモロジー次元の特徴付けからの拡張によるちょっと technical なアプローチを用いる。

定義 1 P、Q を多面体とする。可換群 G 、自然数 n 及び P の開被覆 $\mathcal{U}$ とする。連続写像 $\psi : Q \longrightarrow P$ が $(G, n, \mathcal{U})-$*approximable* であるとは、次の条件を満たす P の単体分割 T が存在することである：
Q の任意の単体分割 M に対して次の条件を満たす連続写像$\psi' : |M^{(n)}| \longrightarrow |T^{(n)}|$ が存在する；

(i) $d(\psi', \psi \,|\, |M^{(n)}) \leq \mathcal{U}$, *and*

(ii) 任意の連続写像 $\alpha : |T^{(n)}| \longrightarrow K(G, n)$ に対して、合成 $\alpha \circ \psi'$ の拡張 $Q \longrightarrow K(G, N)$ が存在する。

ここで、連続写像 $f, g : X \longrightarrow Y$ と Y の開被覆 $\mathcal{U}$ について、記号 $d(f,g) \leq \mathcal{U}$ は任意の点 $x \in X$ に対して $f(x), g(x)$ を共に含む $U \in \mathcal{U}$ が存在することを意味する。距離関数とは異なるが、感覚的には問題なく理解される記法と思われる。

定義 2 空間 X の係数群 G に関する *approximable dimension* が n 以下であるとは、任意の多面体 P, 連続写像 $f : X \longrightarrow P$ と P の開被覆 $\mathcal{U}$ に対して、次の条件を満たす多面体 Q と連続写像$\varphi : X \longrightarrow Q, \psi : Q \longrightarrow P$ が存在することである：
(i) $d(f, \psi \circ \varphi) \leq \mathcal{U}$, *and*
(ii) ψ は $(G, n, \mathcal{U})$*-approximable* である。
これを、$a - \dim_G X \leq n$ と表す。

この概念は一見複雑であるが、次元のいろいろな特徴付けをみ、荒っぽい言い方をすれば、任意の連続写像 $f : X \longrightarrow P$ が適当な多面体を経由してそのコホモロジー次元が n 以下である連続写像によって分解できることである。

また、コホモロジー次元との基本的な関係は次の不等式で与えられる：

Fact 1 任意の距離空間 X と可換群 G について：

$$c - \dim_G X \leq a - \dim_G X \leq \dim X$$

一般には等号は成立しない。

一方、$G = \boldsymbol{Z}$ または $\boldsymbol{Z}_p$ ならば、$c - \dim_G X = a - \dim_G X$ である。

実際、この概念が $G-$acyclic resolutions の存在について十分条件となることを次の形で示した：

定理 6 (小山-横井 [7]) *(compact)* 距離空間 X について、$a - \dim_G X \leq n$ ならば、n 次元 *(compact)* 距離空間 Z と *proper* 連続写像 $f : Z \longrightarrow X$ *s.t.*
$\check{H}^*(f^{-1}(x); G) = 0$ *for all* $x \in X$.

この結果はコホモロジー次元そのものとは少し離れたが、大切な顕微鏡「$G-$acyclic resolutions」をもち得る空間が $c - \dim_G X \leq n$ と非常に近いところにあることが解った。また、Fact1 から 上述の定理が Edwards-Walsh の定理及び Dranishnikov の定理の統一的な拡張になっていることがわかる。

定理 6 はまだ approximable dimension の特徴付けとはなっていない。実際、このあたりまでの結果を話すと次の質問をされることになる。

質問 2 n 次元 *(compact)* 距離空間からの $G-$*acyclic image* となる *(compact)* 距離空間の 係数群 G に関する *approximable dimension* は n 以下か？

ここで、Edwards-Walsh の定理、Dranishnikov の定理は Vietoris-Begle の定理を用いているが、approximable dimension ではそれを直接適用するわけにはいかない。そこで approximable dimension の定義に形を考え、代わりに shape theory の Vietoris-Begle の定理を適用してみては？と考えられる。また、Dranishnikov の定理、定理 6 はともに Edwards-Walsh の定理の構成を基にしている。その時構成した resolutions は acyclic に作っていったわけでなく、UV^{n-1} map にして、n 次元のコホモロジー群を計算していた。そこで、質問を少し変え、

質問 3 *(compact)* 距離空間 X について、n 次元 *(compact)* 距離空間 Z と *proper* UV^{n-1} 連続写像 $f : Z \longrightarrow X$ *s.t.*

$$\check{H}^n(f^{-1}(x) : G) = 0 \ \ for\ all\ \ x \in X$$

が存在するならば、 $a - \dim_G X \leq n$ か？

を考えることも自然な発想と思われる。この質問について、完全解とはいかないが、係数群にある程度の条件があれば成立することを示した。すなわち：

定理 7 ([4],[5]) R を単位元をもつ可換環とする。*(compact)* 距離空間 X について、n 次元 *(compact)* 距離空間 Z と *proper* UV^{n-1} 連続写像 $f : Z \longrightarrow X$ *s.t.*

$$\check{H}^n(f^{-1}(x) : R) = 0 \ \ for\ all\ \ x \in X$$

が存在するならば、 $a - \dim_R X \leq n$ である。

よって二つの定理から（制限の下ではあるが）approximable dimenaion について、Edwards-Walsh の定理の拡張であり、Dranishnikov の定理を含む特徴付けが得られた：

系 1 (Approximable dimension の特徴付け定理) R を単位元をもつ可換環とする。*(compact)* 距離空間 X について、$a - \dim_R X \leq n$ である必要十分条件は、n 次元 *(compact)* 距離空間 Z と *proper* UV^{n-1} 連続写像 $f : Z \longrightarrow X$ *s.t.*

$$\check{H}^n(f^{-1}(x) : R) = 0 \ \ for\ all\ \ x \in X$$

が存在することである。

次に進む前にちょっと注意しておきたい：

Fact 2 任意の *(compact)* 距離空間 X と $n \geq 0$ について、n 次元 *(compact)* 距離空間 Z と *proper* UV^{n-1} 連続写像 $f : Z \longrightarrow X$ が存在する。

このFact2から我々はいつでも UV^{n-1} という解像度を持つ顕微鏡をもつことが解る。だから空間の次元的な性質から少しでも精度のよい顕微鏡を作ろうとしてることに注意してほしい。

ここで考えた単位元をもつ可換環は結構広い類を成し、コホモロジー次元で考えている係数群のほとんどを含んでいる。だからまあまあの制限かな？と考えている。また、この特徴付けを用いると、approximable dimension についていくつかの基本的な性質を示すことができる。さらに、ちょっとした応用を考えたい。

そこで、以後特に断らない限り考える係数群は、**単位元をもつ可換環** Rであると仮定する。

系 2 距離空間 Xについて、$a-\dim_R X \le n$ ならば、$a-\dim_R X \le n+1$ である。

これは何の変哲もない奇妙な結果だが空間の approximable dimension を次のように正確に定義する場合必要なものである。

定義 3 空間 Xについて：$X=\emptyset$ ならば、$a-\dim_R X=-1$ として、$X\neq\emptyset$ の場合次のように定義する：

(i) $a-\dim_R X=n \iff a-\dim_R X\le n$ かつ $a-\dim_R X\le n-1$ でない

(ii) $a-\dim_R X=\infty \iff$ すべての n について $a-\dim_R X\le n$ が成り立たない

このように定義することができるので $a-\dim_R$ を新たな次元関数と考えることができる。定義 1-3 をもって approximable **dimension** と名付けたことに納得がいけると思う。

そこで次元論らしい性質を：

系 3 (Subset Theorem) 距離空間 Xの任意の部分空間 A について、$a-\dim_R A\le a-\dim_R X$.

次に表題にある universal spaces について言及しよう。最初に定義を：

定義 4 任意に与えられた空間の類$\mathcal{C}$について、$X\in\mathcal{C}$ が $\mathcal{C}$ の *universal space* であるとは、任意の $Y\in\mathcal{C}$ が Xへ埋蔵できることをいう。

いろいろな類について universal spaces が考えられるが、コホモロジー次元について、

$\mathcal{C}(G,n)=\{X|X:\text{compact 距離空間 \& } c-\dim_G X\le n\}$

の universal space が存在することが解ればよいが、今のところ未解決である。Dydak[2] に依るとこの類の universal space の存在はコホモロジー次元を保存するコンパクト化の存在と非常に強い関係があるのでなかなか難しいといえる。予想は否定的に近い？

そこでコンパクト内で構成することを諦めて、

$\mathcal{S}(G,n)=\{X|X:$ 可分距離空間 $\ \&\ c-\dim_G X \le n\}$

の類に問題を移してみると、Dydak-Mogilski[3] によって、$\mathcal{S}(\boldsymbol{Z},n)$ について肯定的に解決されている。彼らのキーポイントとなったアイディアは Rubin-Shapiro[10] に依る Edwards-Walsh の定理を一般の距離空間への拡張した結果であった。この結果に直ちに反応して、横井 [12] は、$\mathcal{S}(\boldsymbol{Z}_p,n)$ について universal space が存在することを示した。その後 Olszewski[9] はまったく異なる方法で、G が可算ならば類 $\mathcal{S}(G,n)$ が universal spaces が存在することを示した。

一方 approximable dimension に転じて類

$\mathcal{AS}(G,n)=\{X|X:$ 可分距離空間 $\ \&\ a-\dim_G X \le n\}$

を考えると Dydak-Mogilski[3] のアイディアと特徴付け定理を用いることによって次の結果が得られた：

定理 8 (Universal Space Theorem [5]) 任意の単位元をもつ可換環 R と自然数 n について、類 $\mathcal{AS}(R,n)$ は *universal space* M_n をもつ。

Subset Theorem と合わせると少しシャープな結果になる：

系 4 可分距離空間 Xについて、$a-\dim_R X \le n$ である必要十分条件は X が M_n へ埋蔵できることである。

系 2 を用いて少し計算に使えそうな道具を：

定理 9 ([6]) $R=\oplus_{i=1}^m R_i$ ならば、任意の距離空間 Xについて、$a-\dim_R X = \max\{a-\dim_{R_i} X\}$.

この結果によって、コホモロジー次元と approximable dimension が一致する場合を Fact1 を拡張して示しておく：

系 5 可換群 Gが有限生成ならば、任意の距離空間 Xについて、$a-\dim_G X = c-\dim_G X$.

系 5 を用いると Dydak-Mogilski[3], 横井 [12] を拡張した次のことが解る：

系 6 ([6]) 可換群 G が有限生成ならば、類 $\mathcal{C}(G,n)$ は *universal space* をもつ。

一般に類 $\mathcal{S}(G,n)$ 及び $\mathcal{AS}(G,n)$ が universal spaces をもつかどうかまだ未解決である。Olszewski[9] の方法は係数群の構造にまったく依らないもので技法的に大変おもしろいものであるが一般の場合へ拡張することは難しそう？である。我々の方法は本質的に特徴付け定理に依るもので、質問 3 が肯定的に解ければ自動的に解決する。

ただし、できた特徴付け定理（系 1）は係数群の環構造を活用してある意味で有限生成性を利用している。だからもう少し革新的な攻略法を見つけることが必要と思われる。

参考文献

[1] A.N. Dranishnikov, *On homological dimension modulo p*, Math. USSR-Sb. **60(2)**(1988), 413-425.

[2] J. Dydak, *Cohomological dimension and metrizable spaces II*, preprint.

[3] J. Dydak and J. Mogilski, *Universal cell-like maps*, Proc. Amer. Math. Soc. (to appear).

[4] A. Koyama, *A characterization of compacta which admit acyclic* UV^{n-1}*- resolutions*, Tsukuba. J. Math. (to appear).

[5] A. Koyama, *Universal spaces for approximable dimension*, preprint.

[6] A. Koyama and R. Sher, *A note on approximable dimension*, preprint.

[7] A. Koyama and K. Yokoi, *A unified approach of characetrizations and resolutions for cohomological dimension modulo p*, Tsukuba. J. Math. (to appear).

[8] S. Mardešić, *Factorization theorems for cohomological dimension dimension*, Topology and its Appl. **30**(1988), 291-306.

[9] W. Olszewski, *Universal separable metric spaces of given cohomological dimension*, Topology and its Appl. (to appear).

[10] L. Rubin and P. Schapiro, *Cell-like maps onto non-compact spaces of finite cohomological dimension*, Topology and its Appl. **27**(1987), 221-244.

[11] J. Walsh, *Dimension, cohomological dimension, and cell-like mappings*, Lecture Notes in Math. **870**,1981, 105-118.

[12] K. Yokoi, *Cohomological dimension modulo p for metrizable spaces*, Math. Japonica (to appear).