

## 自由位相アーベル群の tightness の計算

静岡大学教育学部 山田 耕三 (Kohzo Yamada)

### 1. はじめに

この報告集では、距離化可能空間  $X$  から生成される free abelian topological group  $A(X)$  とその部分空間である  $A_n(X)$  の tightness と、sequential fan  $S_\kappa$  の有限積の tightness の関係について調べる上での、本質となる計算方法について述べる。

空間はすべて discrete でない Tychonoff 空間と仮定する。そこでまず最初に、よく使われる記号と基本的な事実を紹介する。 $A(X)$  を空間  $X$  から生成される Markov の意味での free abelian topological group [7] とし、各  $n \in \mathbb{N}$  に対して、 $A_n(X)$  を、その規約な表現の長さが  $n$  以下になるような  $A(X)$  の元 (word と呼ぶ) からなる集合とする。但し、 $A_0(X) = \{0\}$  ( $0$  は  $A(X)$  の単位元) としておく。任意の  $n \in \mathbb{N}$  に対して  $i_n$  を  $(X \oplus -X \oplus \{0\})^n$  から  $A_n(X)$  への自然な写像 i.e.  $i_n((x_1, x_2, \dots, x_n)) = x_1 + x_2 + \dots + x_n$  と定義する。このとき次の重要な事実が知られている。(参考 [1], [6], [9])

補題 1.1. 空間  $X$  について次の性質が成り立つ。

- (1)  $\mathcal{T}_1$  を  $X$  を部分空間として含む  $A(X)$  の group topology とすると、 $\mathcal{T}_1$  は、 $A(X)$  の free topology より弱くなる。
- (2)  $X$  及び各  $A_n(X)$  は  $A(X)$  の閉部分空間となる。
- (3)  $A_0 = \{g = x_1 - y_1 + x_2 - y_2 + \dots + x_n - y_n : x_i, y_i \in X, n \in \mathbb{N}\}$  は  $A(X)$  の開且つ閉な部分群となる。よって、 $0$  の近傍となっている。更に、 $A(X)$  は  $\cup\{A_{2n}(X) \setminus A_{2n-1}(X) : n \in \mathbb{N}\}$  と  $\cup\{A_{2n+1}(X) \setminus A_{2n}(X) : n \in \mathbb{N}\}$  との disjoint sum で表される。
- (4) 各写像  $i_n$  は連続である。
- (5) 任意の  $n \in \mathbb{N}$  に対して、 $i_n^{-1}(A_n(X) \setminus A_{n-1}(X))$  での  $i_n$  の制限写像は、 $n!$ -to-1 な開且つ閉写像となる。
- (6)  $Y$  を  $X$  の  $P$ -embedded 閉部分空間とすると、 $A(Y)$  は  $A(X)$  に閉部分群として埋め込まれる。このとき、 $Y$  から  $X$  への inclusion map の、 $A(Y)$  上への連続で準同型な拡張は閉な埋め込みとなる。よって、各  $A_n(Y)$  は  $A_n(X)$  へ閉部分空間として、埋め込まれる。

次に、 $A(X)$  の単位元の近傍系について述べる。空間  $X$  において、 $X$  の universal uniformity を  $\mathcal{U}_X$  とすると、次のことが分かる。

**補題 1.2 ([10])**  $n \in \mathbb{N}$  を固定する。そこで、任意の  $U \in \mathcal{U}_X$  に対して、 $V_n(U) = \{x_1 - y_1 + x_2 - y_2 + \cdots + x_n - y_n : (x_i, y_i) \in U, k \leq n\}$  とおくと、 $\{V_n(U) : U \in \mathcal{U}_X\}$  は、単位元  $0$  の  $A_{2n}(X)$  における近傍系となる。

ここで、各  $n \in \mathbb{N}$  に対して、 $X^{2n}$  から  $A_{2n}(X)$  への写像  $j_n$  を次のように決める。任意の  $(x_1, x_2, \dots, x_n), (y_1, y_2, \dots, y_n) \in X^n$  に対して

$$j_n(((x_1, x_2, \dots, x_n), (y_1, y_2, \dots, y_n))) = x_1 - y_1 + x_2 - y_2 + \cdots + x_n - y_n.$$

すると、 $j_n$  は、連続となるが、さらに次のような性質を持っている。

**系 1.3.** 空間  $X$  において、 $n \in \mathbb{N}$  と  $A_{2n}(X)$  の部分集合  $E$  に対して、 $0 \in \overline{E}$  となることの必要十分条件は任意の  $U \in \mathcal{U}_X$  に対して  $j_n^{-1}(E) \cap U^n \neq \emptyset$  となることである。

上の事実が  $A_n(X)$  の tightness を計算する上での一つの重要な道具となる。

## 2. tightness の計算

このセクションでは、 $A_n(X)$  の tightness を計算するためのキーとなる補題を証明する。空間  $X$  と  $n \in \mathbb{N}$  を固定する。 $A_n(X)$  の tightness を計算するために、部分集合  $H$  と word  $g$  で、 $g \in \overline{H}$  となるものをとる。このとき、 $H$  と  $g$  の位置関係は一般に次の3通りの場合が考えられる。

- (1) ある  $k \leq n$  があって、 $g \in A_k(X) \setminus A_{k-1}(X)$  で、 $g \in \overline{H \cap (A_k(X) \setminus A_{k-1}(X))}$  である場合、
- (2)  $2k \leq n$  となるような  $k$  があって、 $g = 0$  で  $g \in \overline{H \cap (A_{2k}(X) \setminus A_{2k-1}(X))}$  である場合、
- (3)  $2m + k \leq n$  となる  $k$  と  $m$  があって、 $g \in A_k(X) \setminus A_{k-1}(X)$  で  $g \in \overline{H \cap (A_{2m+k}(X) \setminus A_{2m+k-1}(X))}$  となる場合。

(1) の場合は、補題 1.1 の (5) を適用すればよい。例えば、もし空間  $X$  が距離化可能ならば、ある可算集合  $C$  が  $H \cap (A_k(X) \setminus A_{k-1}(X))$  にあって、 $g \in \overline{C}$  となることがすぐにわかる。また、(2) の場合は、系 1.3 を適用して、計算することができる。そこで、最も一般的な場合である (3) についての計算方法 (キーとなる補題) を次に紹介し、実際に証明を試みる。

補題 2.1.  $X$  を第一可算で、 $X^2$  の *diagonal* の任意の近傍が  $\mathcal{U}_X$  の元となるような (例えば *paracompact*) 空間とする。そこで、 $m, n \in \mathbb{N}$ ,  $H \subset A_{2m+n}(X) \setminus A_{2m+n-1}(X)$  そして  $word\ g \in A_n(X) \setminus A_{n-1}(X)$  をとり、 $g \in \overline{H}$  となっているとする。すると、 $H$  の部分集合  $H_0$  で、 $g \in \overline{H_0}$  で且つ  $|H_0| \leq t(A_{2m}(X))$  となるものが存在する。

証明  $t(A_{2m}(X)) = \tau$  とする。いま  $g \in A_n(X) \setminus A_{n-1}(X)$  より、 $g = a_1 + \cdots + a_k - a_{k+1} - \cdots - a_n$  を規約表現、但し  $0 \leq k \leq n$  で  $a_i \in X$  としておく。そこで、 $H_1 = H - g$  とすると、 $0 \in \overline{H_1}$  となる。ここで、補題 1.1 の (3) より、 $H_0 \subset A_0$  と仮定しておく。よって、 $H_1$  は、次のように表現される。

$$H_1 = \{h_\lambda = x_1^\lambda - y_1^\lambda + \cdots + x_m^\lambda - y_m^\lambda + a_1 - y_{m+1}^\lambda + \cdots + a_k - y_{m+k}^\lambda + x_{m+k+1}^\lambda - a_{k+1} + \cdots + x_{m+n}^\lambda - a_n : \text{each } x_i^\lambda, y_i^\lambda \in X, \lambda \in \Lambda\}.$$

すると、系 1.3 より、

$$j_{m+n}^{-1}(H_1) \cap U^{m+n} \neq \emptyset \text{ for each } U \in \mathcal{U}_X \quad (1)$$

となる。そこで、 $P$  を、集合  $\{1, 2, \dots, m+n\}$  上の置換群とし、任意の  $\pi \in P$  に対して  $E_\pi = \{x = ((x_{\pi(1)}, x_{\pi(2)}, \dots, x_{\pi(m+n)}), (y_{\pi(1)}, y_{\pi(2)}, \dots, y_{\pi(m+n)})) \in X^{2(m+n)} : j_{m+n}(x) \in H_1\}$  とおくと、 $j_{m+n}^{-1}(H_1) = \bigcup_{\pi \in P} E_\pi$  となる。ところがこのとき  $P$  は有限集合で、 $\mathcal{U}_X$  の有限個の元の共通集合はまた、 $\mathcal{U}_X$  に属するので、

$$E \cap U^{m+n} \neq \emptyset \text{ for each } U \in \mathcal{U}_X, \quad (2)$$

$$\text{但し、} E = \{e_\lambda = ((x_1^\lambda, \dots, x_m^\lambda, a_1, \dots, a_k, x_{m+k+1}^\lambda, \dots, x_{m+n}^\lambda), (y_1^\lambda, \dots, y_m^\lambda, y_{m+1}^\lambda, \dots, y_{m+k}^\lambda, a_{k+1}, \dots, a_n)) \in X^{2(m+n)} : \lambda \in \Lambda\}.$$

としておける。そこで、

$$B = \{b_\lambda = ((x_1^\lambda, \dots, x_m^\lambda), (y_1^\lambda, \dots, y_m^\lambda)) \in X^{2m} : \lambda \in \Lambda\},$$

$$C = \{c_\lambda = ((a_1, \dots, a_k, x_{m+k+1}^\lambda, \dots, x_{m+n}^\lambda), (y_{m+1}^\lambda, \dots, y_{m+k}^\lambda, a_{k+1}, \dots, a_n)) \in X^{2n} : \lambda \in \Lambda\}.$$

とおくと、(2) より

$$B \cap U^m \neq \emptyset \text{ for each } U \in \mathcal{U}_X \text{ and} \quad (3)$$

$$C \cap U^n \neq \emptyset \text{ for each } U \in \mathcal{U}_X. \quad (4)$$

となる。そこで空間  $X$  の仮定と (4) より、各  $i = 1, \dots, k$  に対して  $a_i \in \overline{\{y_{m+i}^\lambda : \lambda \in \Lambda\}}$  となり、また各  $j = k+1, \dots, n$  に対しては  $a_j \in \overline{\{x_{m+j}^\lambda : \lambda \in \Lambda\}}$  となる。故に、 $D =$

$\{d_\lambda = (y_{m+1}^\lambda, \dots, y_{m+k}^\lambda, x_{m+k+1}^\lambda, \dots, x_{m+n}^\lambda) : \lambda \in \Lambda\}$  とおくと  $(a_1, \dots, a_n) \in \overline{D}$  となることがわかる。

さて一方、空間  $X^n$  は第1可算公理を満たすので、 $\{V_s : s \in \mathbb{N}\}$  を  $(a_1, \dots, a_n)$  の  $X^n$  における可算近傍系とする。但し、 $V_1 = X^n$  で  $V_{s+1} \subset V_s$  としておく。そこで、各  $s \in \mathbb{N}$  に対して  $\Lambda_s = \{\lambda \in \Lambda : d_\lambda \in V_s \setminus V_{s+1}\}$ ,  $B_s = \{b_\lambda : \lambda \in \Lambda_s\}$ ,  $C_s = \{c_\lambda : \lambda \in \Lambda_s\}$  そして  $D_s = \{d_\lambda : \lambda \in \Lambda_s\}$  とおき、次の2つの場合に分けて考える。

Case 1:  $\mathbb{N}$  のある部分列  $\{t_s : s \in \mathbb{N}\}$  があって、任意の  $s \in \mathbb{N}$  と  $U \in \mathcal{U}_X$  に対して  $B_{t_s} \cap U^m \neq \emptyset$  となる場合

この場合は、系 1.3 より任意の  $s \in \mathbb{N}$  に対して  $0 \in \overline{j_m(B_{t_s})}$  となるので、 $\Lambda_{t_s}$  のある部分集合  $\Lambda'_s$  が存在して、 $0 \in \overline{\{j_m(b_\lambda) : \lambda \in \Lambda'_s\}}$  且つ  $|\Lambda'_s| \leq \tau$  となる。そこで、各  $\lambda \in \bigcup_{s=1}^\infty \Lambda'_s$  に対して

$$E_\lambda = \{((x_1, \dots, x_m, a_1, \dots, a_k, x_{m+k+1}^\lambda, \dots, x_{m+n}^\lambda), \\ (y_1, \dots, y_m, y_{m+1}^\lambda, \dots, y_{m+k}^\lambda, a_{k+1}, \dots, a_n)) \in X^{2(m+n)} : \\ ((x_1, \dots, x_m), (y_1, \dots, y_m)) \in j_m^{-1} j_m(b_\lambda)\}$$

とし、 $E_1 = \bigcup \{E_\lambda : \lambda \in \bigcup_{s=1}^\infty \Lambda'_s\}$  とおくと、 $|E_1| \leq \omega \cdot \tau = \tau$  となり任意の  $U \in \mathcal{U}_X$  に対して、 $E_1 \cap U^{m+n} \neq \emptyset$  となることがわかる。そこで、 $H_2 = j_{m+n}(E_1)$  とすると  $H_2 \subset H_1$  であり、 $0 \in \overline{H_2}$  且つ  $|H_2| \leq \tau$  となる。よって、 $H_0 = H_2 - g$  とおくとこれが求めるものとなる。

Case 2: ある  $s_0 \in \mathbb{N}$  があって、任意の  $s \geq s_0$  と  $U \in \mathcal{U}_X$  に対して  $B_s \cap U^m = \emptyset$  となる場合

$B_1 = \bigcup_{s \geq s_0} B_s$  とおき、いまある  $U_1 \in \mathcal{U}_X$  があって  $B_1 \cap U_1^m = \emptyset$  となったと仮定すると、

$$\bigcup_{s \geq s_0} E_s \cap U_1^{m+n} = \emptyset. \quad (5)$$

となることがわかる。一方、 $\bigcup_{s < s_0} D_s \cap V_s = \emptyset$  なので  $\bigcup_{s < s_0} C_s \cap U_2^n = \emptyset$  となる  $U_2 \in \mathcal{U}_X$  が存在する。よって、

$$\bigcup_{s < s_0} E_s \cap U_2^{m+n} = \emptyset. \quad (6)$$

となるが、(5) と (6) をあわせると  $E \cap (U_1 \cap U_2)^{m+n} = \emptyset$  となり、これは (2) に矛盾する。結局、任意の  $U \in \mathcal{U}_X$  に対して  $B_1 \cap U^m \neq \emptyset$  となることが示された。よって、系 1.3 より  $0 \in \overline{j_m(B_1)}$  となり、このことより  $0 \in \overline{\{j_m(b_\lambda) : \lambda \in \Lambda_1\}}$  且つ  $|\Lambda_1| \leq \tau$  となるような  $\Lambda_1 \subset \bigcup_{s \geq s_0} \Lambda_s$  をとることができる。さてここで、Case 2 の仮定より任意の  $s \geq s_0$  に対して  $0 \notin \overline{\{j_m(b_\lambda) : \lambda \in \Lambda_s\}}$  となっていることより  $\Lambda_1 \cap \bigcup_{t \geq s} \Lambda_t \neq \emptyset$  となることがわか

るが、このことは  $(a_1, \dots, a_n) \in \overline{\{d_\lambda : \lambda \in \Lambda_1\}}$  となることを意味している。そこで、任意の  $\lambda \in \Lambda_1$  に対して、

$$E_\lambda = \{((x_1, \dots, x_m, a_1, \dots, a_k, x_{m+k+1}^\lambda, \dots, x_{m+n}^\lambda), \\ (y_1, \dots, y_m, y_{m+1}^\lambda, \dots, y_{m+k}^\lambda, a_{k+1}, \dots, a_n)) \in X^{2(m+n)} : \\ ((x_1, \dots, x_m), (y_1, \dots, y_m)) \in j_m^{-1} j_m(b_\lambda)\}$$

とおき、 $E_1 = \cup\{E_\lambda : \lambda \in \Lambda_1\}$  とすると、任意の  $U \in \mathcal{U}_X$  に対して  $E_1 \cap U^{m+n} \neq \emptyset$  となる。そこで、最後に  $H_2 = j_{m+n}(E_1)$  とし、更に  $H_0 = H_2 + g$  とおくとこの  $H_0$  が求めるものとなる。  $\square$

### 3. 結果

これまでの補題等を利用することによりまず次のことがわかる。いま  $\kappa$  を無限濃度とし、任意の  $\alpha < \kappa$  に対して  $C_\alpha$  を収束点列とその収束先をあわせたものとする。そこで、 $C_\kappa = \bigoplus_{\alpha < \kappa} C_\alpha$  とする。すると、sequential fan  $S_\kappa$  は  $C_\kappa$  からの自然な商写像による像となる。すると、次のことがわかる。

**定理 3.1.**  $\kappa$  を無限濃度としたとき、任意の  $n \in \mathbb{N}$  に対して  $t(A_{2n}(C(\kappa))) = t(S(\kappa)^n)$  となる。

さて、Arhangel'skii, Okunev そして Pestov は [2] の論文の中で距離化可能空間  $X$  に対して  $t(A(X)) \leq w(X')$  ( $X'$  は  $X$  の孤立点でない元をすべて集めた集合を表す。) となることを示したが、この事実を適応すると次のことがわかる。

**系 3.2.** 距離化可能空間  $X$  において、 $w(X') = \kappa$ 、但し  $cf(\kappa) > \omega$  とし、 $n \in \mathbb{N}$  とする。このとき  $t(S(\kappa)^n) = t(A_{2n}(C(\kappa))) \leq t(A_{2n}(X)) \leq t(A(X)) \leq w(X') = \kappa$  となる。

実際この系より、[2] の論文で出された疑問に関する次のような部分解が得られる。

**系 3.3.** 距離化可能空間  $X$  において、 $w(X') = \kappa$ 、但し  $cf(\kappa) > \omega$  とする。いまある  $n \in \mathbb{N}$  があって  $t(S(\kappa)^n) = \kappa$  となったとすると、 $t(A_{2n}(X)) = t(A(X)) = w(X') = \kappa$  となる。

しかしながら  $S(\kappa)^n$  の tightness の計算は大変難しくあまり多くのことは今だわかっていない (参考:[3])。ただ、 $\kappa = \omega_1$  の時は、[5] で  $t(S(\omega_1)^2) = \omega_1$  となることがわかっているので次の事実が得られる。

系 3.4. 距離化可能空間  $X$  において、 $w(X') = \omega_1$  とすると、 $t(A_4(X)) = t(A(X)) = w(X') = \omega_1$  となる。

最後に、 $\kappa = \omega$  の時に関する結果を紹介しておく。

定理 3.5. 空間  $X$  を距離化可能空間とする。

1 次の事柄は同値である。

- (a)  $A(X)$  の *tightness* は可算、
- (b)  $A_4(X)$  の *tightness* は可算、
- (b) 任意の  $n \in \mathbb{N}$  に対して  $A_n(X)$  の *tightness* は可算、
- (c)  $X'$  は第 2 可算公理を満たす。

2  $A_3(X)$  は常に可算となる。

#### 参考文献

- [1] A. V. Arhangel'skiĭ, Mapping related to topological groups, Soviet Math. Dokl. 9 (1968) 1011-1015.
- [2] A. V. Arhangel'skiĭ, O. G. Okunev and V. G. Pestov, Free topological groups over metrizable spaces, Topology Appl. 33 (1989) 63-76.
- [3] K. Eda, G. Gruenhage, P. Koszmider, K. Tamano and S. Todorčević, Sequential fans in topology, Preprint.
- [4] M. I. Graev, Free topological groups, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. 12(3) (1948) 279-324 (in Russian); English transl.: Amer. Math. Soc. transl. 35 (1951); Reprint: Amer. Math. Soc. Transl. 8 (1962) 305-364.
- [5] G. Gruenhage and Y. Tanaka, Products of  $k$ -spaces and spaces of countable tightness, Trans. Amer. Math. Soc. 273 (1982), 299-308.
- [6] C. Joiner, Free topological groups and dimension, Trans. Amer. Math. Soc. 220 (1976) 401-418.
- [7] A. A. Markov, On free topological groups, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. 9 (1945) 3-64 (in Russian); English transl.: Amer. Math. Soc. Transl. 30 (1950) 11-88; Reprint: Amer. Math. Soc. Transl. 8 (1962) 195-272.

- [8] V. G. Pestov, On neighbourhoods of unity in free topological groups, Vestnik Moscov. Univ. Ser. 1 Mat. Mech. 3 (1985) 8-10 (in Russian).
- [9] M. G. Tkačenko, Completeness of free abelian topological groups, Soviet Math. Dokl. 27 (1983) 341-345.
- [10] K. Yamada, Characterizations of a metrizable space  $X$  such that every  $A_n(X)$  is a  $k$ -space, Topology Appl. 49 (1993) 75-94.
- [11] K. Yamada, Tightness of free abelian topological groups and of finite products of sequential fans, Preprint.