数理解析研究所講究録
903巻 1995年 106-122

正値対称な作用素商の自己共役拡張について

富山大教育　泉野佐一 (Saichi Izumino)

1. 序. Hilbert 空間上の有界線形作用素 A, B が核条件 $\ker A \subset \ker B$ を満たしているとき, 作用素商 (quotient) B/A は

$$Ax \to Bx, \qquad x \in H$$

によって定義される。これは, 定義域を $AH = \{Ax;\ x \in H\}$, 値域を BH とする線形作用素である。作用素商は, 半世紀前にすでに Dixmier により J-operator の名で, また最近では, Kaufman [7], [8] により研究されている。二つの作用素商の和や積は一つの作用素商で表されるが, さらに, 一つの作用素商の adjoint や closure がまた, 作用素商で表される。[4], [5], [6] では, 作用素商の adjoint, closure 等についていくつかのことが調べられた。

作用素商 B/A が

$$A^*B = B^*A \ (\geq 0)$$

を満たすとき，これを（正値）対称と呼ぶことにする。B/A が densely defined，つまり，AH が H で dense のとき，B/A の adjoint $(B/A)^*$ が存在する。$B/A=(B/A)^*$ となるものが自己共役作用素商である

正値対称な作用素の正値自己共役拡張については，J. von Neumann，K. Friedrichs，M. Krein，Ando-Nishio などの多くの人達の研究がある．Krein [9] は densely defined な正値対称作用素の正値自己共役拡張全体の中に最大拡張と最小拡張が存在し，最大拡張は Friedrichs が得た拡張であり，最小拡張は von Neumann の得た拡張に一致することを示した。Ando-Nishio [1] は，この研究をさらに進めた．特に，densely defined と仮定しない正値対称作用素が正値自己共役作用素に拡張されるための必要十分条件を示し，また，このとき，最小の自己共役拡張である von Neumann 拡張について，定義域を explicit に記述した．この他，与えられた正値対称作用素が有界なときの von Neumann 拡張の簡潔な表現を得た。作用素が有界な場合の拡張については，最近，Sebestyén-Kapos [10] の全く別の方法による研究もある。

本稿では，Sebestyén-Kapos の手法にならって，まず，有界な場合の正値対称作用素商の拡張を行い，これを用いて，一般の場合の正値対称作用素商の拡張を試みる。また，densely *defined* な場合の正値対称作用素商について，最大及び最小の正値自己共役拡について簡潔な記述を行う．作用素商の拡張の考察では，分子，分母にあたる二つの有界作用素について，それらの相互関連を中心に論ずることになり，また，作用素の取扱いは，殆んど有界作用素の範囲で済むこととなる。

2．準備．　本節では議論を進めるのに際し必要な補題をいくつかまとめて記述する。

補題 2.1（Douglas majorization theorem [2], [3, Theorem 2.1]）
$L, M \in B(H)$ を有界作用素とする。次は同値である。

(1)　$LH \subset MH$

(2)　$\exists \alpha > 0$　s.t.　$LL^* \leqq \alpha^2 MM^*$

(3)　$\exists N \in B(H)$, s.t. $L = MN$

特に，(3)で $\ker N^* \supset \ker M$ を仮定するとき，解 N は *unique* に定まる。

補題 2.2（[5, Lemma 2.1]）$R = (A^*A + B^*B)^{\frac{1}{2}}$ として，方程式

$$XR = A \quad (\text{or } RX^* = A^*), \quad \ker X \supset \ker R$$

$$YR = B \quad (\text{or } RY^* = B^*), \quad \ker Y \supset \ker R$$

は unique な解 X, Y をもち

$$X^*X + Y^*Y = P_R \quad (\overline{RH}\text{への直交射影})$$

$$(1 - YY^*)^{\frac{1}{2}} H = B^{*(-1)}(A^*H) \left(= \{x \,;\, B^*x \in A^*H\}\right)$$

が成り立つ.

便宜上

$$A_* = (1 - YY^*)^{\frac{1}{2}}$$

とおくと, 方程式

$$A^*Z = B^*A_* \quad \ker Z^* \supset \ker A^*$$

は, また unique な解 Z をもつ. これを $Z = B_\times$ とかくことにする。このとき

補題 2.3 ([3, Theorem 4.1]). AH が dense のとき

$$(B/A)^* = B_\times / A_*$$

作用素商 B/A の graph $G(B/A)$ は

$$\{(Ax, Bx) \in H \times H\ ,\ x \in H\}$$

で定義される. 作用素商 D/C が作用素商 B/A の拡張である, つまり, $G(D/C) \supset G(B/A)$ のとき, $D/C \supset B/A$ と書くことにする。このとき

補題 2.4 ([4, Lemma 2.2])

$$B/A \subset D/C \iff \exists W \in B(\mathcal{H}) \text{ s.t. } A = CW,\ B = DW$$

補題 2.5 ([6, Lemma 2.6]) AH が dense のとき,

$$D/C \subset (B/A)^* \iff B^*C = A^*D$$

系 2.6 AH が dense のとき,

(1) $B/A \subset (B/A)^* \iff A^*B = B^*A$

(2) $B/A = (B/A)^* \iff A^*B = B^*A,\ B^{*(-1)}A^*H = AH$

補題 2.7 ([5, Lemma 2.3]) 作用素 B/A に対して, 次は同値である.

(1) B/A は closable。つまり,

$$Ax_n \to 0,\ Bx_n \to y \Rightarrow y = 0$$

(2) $\ker X \subset \ker Y$ (X, Y は補題 2.2 で用いたもの)

(3) $A_*H \left(= (1 - YY^*)^{\frac{1}{2}} H\right)$ は dense.

3. 有界な正値対称作用素商の最小・最大拡張 作用素商 B/A が有界であるとは, 有界な拡張をもつことと定義する. 補題 2.1 を用いると, 次がいえる.

補題 3.1. 次は同値である.

(1) B/A は有界である.

(2) $\exists C \in B(H)$ s.t. $B = CA$

(3) $\sup_x \frac{\|Bx\|}{\|Ax\|} < \infty$

正値対称な作用素商 B/A (つまり, $A^*B = B^*A \geqq 0$ を満たす) で, 不等式

$$B^*B \leqq \alpha A^*B$$

を満たすものを考える。これは実は有界であり, これのノルムが α を越えない最小, 最大の拡張が存在することを示すのが, 次の定理である. これは, Sebestyén - Kapos [10], Ando-Nishio [1, Theorem 2] の作用素商 version といえる。

定理 3.2 $A^*B = B^*A \geqq 0$ のとき, B/A が有界な正値拡張をもつ必要十分条件は

(3.1) $\exists \alpha > 0$ s.t. $B^*B \leqq \alpha A^*B$

さらに, このとき, B/A の最小, 及び最大の拡張 (ノルムは α を越えない) が存在する。

証明 B/A が正値拡張 C をもつとする. $B = CA$ だから

$$B^*B = A^*C^2A \leqq \|C\| A^*CA = \|C\| A^*B$$

から $\alpha=\|C\|$ として，(3.1) を得る。

逆に，(3.1) を仮定すると，補題 2.1 から

$$B^*=(A^*B)^{\frac{1}{2}}X,\qquad \ker X^*\supset\ker(A^*B)^{\frac{1}{2}}$$

を満たす unique な解 $X\in B(H)$ が存在する．しかも，

$$(A^*B)^{\frac{1}{2}}\{(A^*B)^{\frac{1}{2}}-XA\}=A^*B-(A^*B)^{\frac{1}{2}}XA$$
$$=A^*B-A^*B=0$$

したがって，$\{(A^*B)^{\frac{1}{2}}-XA\}H\subset\ker A^*B$

また，

$$\{(A^*B)^{\frac{1}{2}}-XA\}H\subset(A^*B)^{\frac{1}{2}}H+XH\subset(\ker A^*B)^{\perp}$$

よって

$$(A^*B)^{\frac{1}{2}}-XA=0,\quad (A^*B)^{\frac{1}{2}}=XA$$

これから

$$B=X^*(A^*B)^{\frac{1}{2}}=X^*XA$$

いま，

$$C=X^*X$$

とおくと

$$C\geqq 0,\qquad B=CA$$

したがって $C/1$ は B/A の正値拡張である．このCは実は最小の拡張であることを示したい。それには，

$B=DA$，$D\geqq 0$ として，$D\geqq C$ をいえばよい。

$$V:\ (A^*B)^{\frac{1}{2}}u+v\longrightarrow D^{\frac{1}{2}}Au,\quad u\in H,\quad v\in\ker A^*B$$

によって，V を定義する．$w=(A^*B)^{\frac{1}{2}}u+v$ とおいて，

$$\|Vw\|^2=\|D^{\frac{1}{2}}Au\|^2=\langle A^*DAu,u\rangle$$
$$=\langle A^*Bu,u\rangle=\|(A^*B)^{\frac{1}{2}}u\|^2\leqq\|w\|^2$$

また，V は H の dense な部分空間 $(A^*B)^{\frac{1}{2}}H+\ker A^*B$ で定義されている．したがって，有界な作用素に自然に拡張される。これを同じ V で表せば，$\|V\|\leqq 1$ で

$$X^*w=X^*\{(A^*B)^{\frac{1}{2}}u+v\}=Bu$$
$$=D^{\frac{1}{2}}D^{\frac{1}{2}}Au=D^{\frac{1}{2}}Vw$$

したがって，$X^*=D^{\frac{1}{2}}V$ となるから

$$C=X^*X=D^{\frac{1}{2}}VV^*D^{\frac{1}{2}}\leqq D^{\frac{1}{2}}D^{\frac{1}{2}}=D$$

C のノルムについて $\|C\|\leqq\alpha$ も少しの計算でわかる。

B/A の最大の拡張を得るために

$$B_1=\alpha A-B$$

とおく，このとき，

$$B_1^*B_1-\alpha A^*B_1=(B_1-\alpha A)^*B_1$$
$$=-B^*(\alpha A-B)=-\alpha B^*A+B^*B\leqq 0$$

したがって，先の議論から，

$$0\leqq C_1\leqq\alpha,\qquad B_1=C_1A$$

を満たす最小の作用素 C_1 が存在する．このとき，$\alpha A-B=C_1A$ から，$B=(\alpha-C_1)A$．いま，$C'=\alpha-C_1$ とおくと，$0\leqq C'\leqq\alpha$ で $B=DA$，$D\geqq 0$ となる任意の D に対して，$B_1=\alpha A-B=(\alpha-D)A$．したがって

$$\alpha-D\geqq C_1$$

つまり，$(C'=)\ \alpha-C_1\geqq D$ となり C' が最大とわかる。

4. 有界性を仮定しない場合の正値対称作用素対の拡張

$A^*B = B^*A \geqq 0$ とする（以下この仮定をおく）。いま

$A_1 = A + B$ とすると，

$$B^*B \leqq A^*B + B^*B = A_1^*B \;(= B^*A_1)$$

したがって，A_1 を A，$\alpha = 1$ として，前節の定理3.2から

$\exists S$ s.t. $0 \leqq S \leqq 1$

$$B = SA_1 = S(A+B)$$

したがって

$$(1-S)B = SA$$

もし，$(1-S)H$ が dense ならば，系2.6より

$$B/A \subset \{S/(1-S)\}^*$$

とわかる。さらに，

$$S^{-1}(1-S)H \subset (1-S)H$$

に注意すれば，また系2.6より

$$\{S/(1-S)\}^* = S/(1-S)$$

となり，また $S/(1-S)$ は正値なることもいえるから，B/A の正値自己共役拡張として $S/(1-S)$ が得られたことになる。

$(1-S)H$ の dense なることを保障するものとして，次の条件を設定する。

(C) : $(A^*B)^{\frac{1}{2}}x_n \to 0$, $Bx_n \to y \Rightarrow y = 0$

特に，AH が dense ならば (C) が成り立つ。

定理 4.1 (C) $\Leftrightarrow$ $(1-S)H$ は dense。 つまり (C) は B/A の正値自己共役拡張が存在するための必要十分条件である。

証明 まず、条件(C) $\Leftrightarrow \begin{cases} \ker (A^*B)^{\frac{1}{2}} \subset \ker B \\ B/(A^*B)^{\frac{1}{2}} \text{ は closable} \end{cases}$

の関係が少しの計算からわかる。

$$R_1 = (A^*B + B^*B)^{\frac{1}{2}} = (A_1^*B)^{\frac{1}{2}}$$

とおくと, $YR_1 = B$, $\ker Y \supset \ker R_1$

の解 Y を用いて

$$(1-S)^{\frac{1}{2}} = (1-YY^*)^{\frac{1}{2}}$$

と表される。したがって, 補題 2.7 より (C) は $(1-YY^*)^{\frac{1}{2}}H$ が dense ということと同値, したがってまた, (C) は $(1-S)H$ が dense ということと同値とわかる。(他の部分の証明は略)

Remark. 条件(C) は Ando-Nishio [1] が正値作用素 ($\langle Tx, x\rangle \geqq 0$ $x \in D(T)$) に対して定義した positively closable という条件:

$$\text{(PC)} \quad \langle Tx_n, x_n\rangle \to 0,\ Tx_n \to y \ \Rightarrow\ y = 0 \quad (\{x_n\} \subset D(T))$$

を作用素商の場合に適用したものといえる。

二つの作用素商

$$B_1/A_1 = S_1/(1-S_1),\quad 0 \leqq S_1 \leqq 1$$
$$B_2/A_2 = S_2/(1-S_2),\quad 0 \leqq S_2 \leqq 1$$

に対して，$S_1 \leqq S_2$ のとき，$B_1/A_1 \leqq B_2/A_2$ と書くことにする。$1-S_1$，$1-S_2$ が共に可逆ならば，この順序は，通常のものと一致する。この定義から次がいえる。

命題 4.2　$S_1/(1-S_1) \leqq S_2/(1-S_2)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (1-S_1)^{\frac{1}{2}}H \supset (1-S_2)^{\frac{1}{2}}H \\ (1-S_1)^{\frac{1}{2}}x = (1-S_2)^{\frac{1}{2}}y \text{ ならば } \|S_1^{\frac{1}{2}}x\| \leqq \|S_2^{\frac{1}{2}}y\| \end{cases}$$

二つの正値対称作用素 T_1, T_2 に対して，順序 $T_1 \leqq T_2$ は

$$D(T_1^{\frac{1}{2}}) \supset D(T_2^{\frac{1}{2}}),\ \text{かつ}\ \|T_1^{\frac{1}{2}}x\| \leqq \|T_2^{\frac{1}{2}}x\| \quad (x \in D(T_2^{\frac{1}{2}}))$$

によって定義されている（Ando-Nishio [1]）。上の命題は，上記二つの順序の定義が両立するものであることを示している。

定理 4.3 条件(C) の下で，上に定義した順序について，B/A の最小の正値自己共役拡張が存在する。

証明　定理4.1で得られた有界作用素 S は

$$0 \leqq S \leqq 1 \qquad B = S(A+B)$$

を満たし，同じ条件を満たすものの最小な作用素であった。したがって，$S/(1-S)$は，順序の定義より最小の拡張とわかる。

B/Aが有界で $B^*B \leqq \alpha A^*B$ のとき，最小の正値自己共役拡張 $S/(1-S)$ は有界である。実際

$$\|S\| = \sup \frac{\|Bu\|^2}{\|(A+B)^{\frac{1}{2}}u\|^2} = \sup \frac{\langle B^*Bu, u\rangle}{\langle (A+B)^*Bu, u\rangle}$$

$$\leqq \sup \frac{\langle B^*Bu, u\rangle}{\frac{1}{\alpha}\langle B^*Bu, u\rangle + \langle B^*Bu, u\rangle} = \left(1+\frac{1}{\alpha}\right)^{-1} < 1$$

から $1-S$ は可逆で $S/(1-S) = S(1-S)^{-1}$ となる。

定理 4.4　AH が dense のとき，B/A の最大の正値自己共役拡張が存在する。（最小の正値自己共役拡張も存在する。）

証明　$B_1 = A+B$ として，

$$A^*A \leqq A^*A + A^*B = A^*B_1 \ (= B_1^*A)$$

であるから，$\exists S_1$ s.t. $0 \leqq S_1 \leqq 1$,

$$A = S_1 B_1 = S_1(A+B)$$

S_1 は，同じ条件をもつ正値作用素の中で最小なものと仮定する。$AH \subset S_1 H$ だから，$S_1 H$ は dense で

$$(1-S_1)A = S_1 B$$

より，

$$B/A \subset \left((1-S_1)/S_1\right)^*$$

さらに，$(1-S_1)^{-1}(S_1 H) \subset S_1 H$ もいえるから

$$\left((1-S_1)/S_1\right)^* = (1-S_1)/S_1 \left(= T/(1-T)\right)$$

($T = 1-S_1$ とおく。) となる。これが最大の自己共役拡張であることを示すため，

$$0 \leqq S \leqq 1,\quad (1-S)H \text{ dense}$$

$$B/A \subset S/(1-S) \left(= (S/(1-S))^*\right)$$

として，$S \leqq T_1$ をいえばよい。

$(1-S)B = SA$ がいえるから，$B = S(A+B)$,

$$A = (1-S)(A+B)$$

そこで，S_1 の最小性から

$$1 - S \geqq S_1$$

よって，

$$T = 1 - S_1 \geqq S$$

AH が dense のとき，B/A の

最小の正値自己共役拡張を $(B/A)_M$

最大の正値自己共役拡張を $(B/A)_F$

と書くことにする。

作用素商 B/A が $\ker A = \ker B$ を満たすとき

$$(B/A)^{-1} = A/B$$

と定義する。このとき

定理 4.5 $\ker A = \ker B$, AH, BH は共に dense のとき,

(1) $((B/A)^{-1})_M = ((B/A)_F)^{-1}$

(2) $((B/A)^{-1})_F = ((B/A)_M)^{-1}$

証明 (1) $((B/A)^{-1})_M = (A/B)_M = T/(1-T)$ (Tは定理4.4で用いたもの), また, $(B/A)_F = (1-T)/T$.

(2) $((B/A)^{-1})_F = (A/B)_F = (1-S)/S$ (Sは定理4.1で用いたもの), また, $(B/A)_M = S/(1-S)$ より.

$a > 0$ のとき, $B + aA = B_a$ とおくと

$$B/A + a = (B + aA)/A = B_a/A$$

であり,

$$A^* B_a = B_a^* A \geqq 0$$

そこで,
$$(B/A + a)_M = (B_a/A)_M = S_a/(1 - S_a)$$
$(0 \leqq S_a \leqq 1)$ とする。このとき

$$(B/A + a)_M \leqq (B/A)_M + a$$

は, すぐわかる。最大の拡張についてはもっと正確に

定理 4.6　$a \geqq 0$　（AH は dense）のとき

$$(B/A+a)_F = (B/A)_F + a$$

証明　$B/A+a = B_a/A$ の最大の正値自己共役拡張を $(1-T_a)/T_a$ とする。このとき，

$$0 \leqq T_a \leqq 1, \qquad A = T_a(A+B)$$

で，T_a は同じ条件を満たす正値作用素の中で最小である。
このとき，

$$T_a \leqq \frac{1}{a+1}$$

を示したい。$A^*A \leqq A^*(A+B_a)$ から，$\exists X_a \in B(H)$，
$\{A^*(A+B_a)\}^{\frac{1}{2}} X_a = A$，かつ $T_a = X_a^* X_a$ で

$$\|T_a\| = \|X_a^*\|^2 = \sup \frac{\|Au\|^2}{\|\{A^*(A+B_a)\}^{\frac{1}{2}}u\|^2}$$

$$= \sup \frac{\langle A^*Au, u\rangle}{\langle A^*((a+1)A+B)u, u\rangle} \leqq \frac{1}{a+1}$$

これから，上の不等式を得る。

したがって，

$$(B/A+a)_F - a = (1-T_a)/T_a - a$$

$$= \{1-(1+a)T_a\}/T_a$$

で，$1-(1+a)T_a \geqq 0$ だから，$\{1-(1+a)T_a\}/T_a$ は
B/A の正値自己共役拡張とわかる。したがって

$$(B/A+a)_F - a \leqq (B/A)_F$$

がわかる。したがって

$$(B/A+a)_F \leqq (B/A)_F + a$$

逆向きの不等式は明らかであるから，結局等号が成り立つ。

(ついでながら，これから

$$T_a = (1+aT)^{-1}T$$

を導き出すことができる。)

参考文献

[1] T. Ando and K. Nishio, Positive selfadjoint extensions of positive symmetric operators, Tôhoku Math. J. 22 (1970), 65-75.

[2] R. G. Douglas, On majorization, factorization and range inclusion of operators in Hilbert space, Proc. Amer. Math. Soc. 17 (1966), 413-416.

[3] P. A. Fillmore and J. P. Williams, On operator ranges, Advances in Math. 7 (1971), 254-281.

[4] S. Izumino, Quotients of bounded operators, Proc. Amer. Math. Soc. 106 (1989), 427-435.

[5] S. Izumino, Decomposition of quotients of bounded operators with respect to closability and Lebesgue-type decomposition of positive operators, Hokkaido Math. J. 18 (1989), 199-209.

[6] S. Izumino, Quotients of bounded operators and their weak adjoints, J. Operator Theory 29 (1993), 83-96.

[7] W. E. kaufman, Representing a closed operator as a quotients of continuous operators, Proc. Amer. Math. Soc. 72 (1978), 531-534.

[8] W. E. Kaufman, Semiclosed operators in Hilbert space, Proc. Amer. Math. Soc. 76 (1979), 67-73.

[9] M. G. Krein, Theory of selfadjointextensions of semi-bounded Hermitian operators and its application I, Mat. Sb. 20 (62) (1947) 431-495.

[10] Z. Sebestyén and L. Kapos, Extremal positive and self-adjoint extensions of suboperators, Periodica Math. Hungarica 20 (1989), 75-80.