数理解析研究所講究録
903巻 1995年 11-29

作用素平均と指数積公式

茨城大理　日合 文雄 (Fumio Hiai)

0 序論

エルミート行列 H, K に対するトレース不等式 $\mathrm{tr}\, e^{H+K} \le \mathrm{tr}\, e^{H} e^{K}$ は Golden-Thompson 不等式として有名である．この不等式を巡って多くの研究がなされてきた．Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の有界作用素の全体を $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ で表す．$A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ の (一般化) された特異値を大きい順に重複度分ずつ並べたものを $\mu(A) = (\mu_1(A), \mu_2(A), \ldots)$ で表す．荒木 [5] の不等式は，任意の正作用素 $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ と $0 < p \le q$ に対して

$$\prod_{k=1}^{n} \mu_k((A^{p/2}B^pA^{p/2})^{1/p}) \le \prod_{k=1}^{n} \mu_k((A^{q/2}B^qA^{q/2})^{1/q}), \qquad n \in \mathbb{N} \tag{0.1}$$

を主張する．[4] に従い，このような不等式 (の系列) を (弱) 対数マジョリゼーションと呼び，記号 $\prec_{w(\log)}$ で表そう．上の結果と Trotter-Kato の指数積公式を組み合わせると，$\mathcal{H}$ 上の下に半有界な自己共役作用素 H, K に対して

$$\mu(e^{-(H\dot{+}K)}) \prec_{w(\log)} \mu((e^{-rH/2}e^{-rK}e^{-rH/2})^{1/r}), \qquad r > 0$$

が示される [14] (ただし $H\dot{+}K$ は H, K の form sum)．これは Golden-Thompson 不等式を対数マジョリゼーションに強化したものである．マジョリゼーション理論に関しては [2, 3, 18] 参照．

他方，行列の場合で，Golden-Thompson のトレース不等式が (逆向きに) 補完できることが [16] で示されて，さらに [4] で対数マジョリゼーションにまで次のように強化された：A, B を正定値行列とすると，任意の $0 < \alpha < 1$ と $p \ge q > 0$ に対して

$$\mu((A^p \#_\alpha B^p)^{1/p}) \prec_{w(\log)} \mu((A^q \#_\alpha B^q)^{1/q}) \tag{0.2}$$

(ただし $\#_\alpha$ は α-べき作用素平均)．上述の Golden-Thompson 型 (0.1) とその補完型 (0.2) の対数マジョリゼーションを使うと，任意のエルミート行列 H, K とユニタリー不変ノルム $\|\cdot\|$ に対して

$$\|(e^{-rH/(1-\alpha)} \#_\alpha e^{-rK/\alpha})^{1/r}\| \le \|e^{H+K}\| \le \|(e^{rH/2}e^{rK}e^{rH/2})^{1/r}\|, \qquad r > 0$$

が導かれる．さらに $r \downarrow 0$ のとき，上の左辺は単調増加に，右辺は単調減少に $\|e^{H+K}\|$ に収束する．

本稿では，無限次元の作用素の場合で Golden-Thompson の補完型の対数マジョリゼーションとノルム不等式を考察する．このために，作用素平均に対する Trotter 型の指数積公式を [6] の方針で証明する．(行列に対するこの指数積公式は，べき級数展開して計算すれば容易である．)

本稿よりもっと総括的で詳しい論文 [15] が Banach Center Publications シリーズの “Linear Operators” で発表される予定である．

1 準備

この節で，いくつかの予備的な事項を解説する．

1.1 一般化された特異値

Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ は常に無限次元かつ可分とし，$\mathcal{H}$ 上の有界作用素の全体を $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ で表す．また $\mathcal{H}$ 上の有界な正 (定値) 作用素の全体を $\mathcal{B}(\mathcal{H})_+$ で表す．任意の $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ に対して，A の一般化された特異値 $\mu_1(A) \geq \mu_2(A) \geq \dots$ を次のように定義する：

$$\mu_n(A) = \inf\{\lambda \geq 0 : \operatorname{rank}(I - E_{|A|}(\lambda)) < n\}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

ただし $|A| = \int_0^\infty \lambda dE_{|A|}(\lambda)$ は $|A|$ のスペクトル分解とする．したがって $I - E_{|A|}(\lambda)$ は，区間 (λ, ∞) に対応する A のスペクトル射影である．上の $\mu_n(A)$ は，von Neumann 環における可測作用素に対する一般化された s-numbers [7, 8] の定義を $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ の場合に当てはめたものである．A がコンパクト作用素 (特に行列) のとき，$\mu_n(A)$ は A の通常の特異値 (i.e. $|A|$ の固有値) を大きい順に重複度分ずつ並べたものである．

$\mu_\infty(A) = \lim_{n\to\infty} \mu_n(A)$ は A の本質的ノルム $\|A\|_e$ と一致する．したがって，$\mu_\infty(A) = 0$ は A がコンパクトであることと同値であり，$\mu_n(A) > \mu_\infty(A)$ のとき $\mu_n(A)$ は $|A|$ の重複度有限の固有値である．

$\mu_n(A)$ の基本性質については，von Neumann 環の場合で [8] が詳しい．

1.2 ユニタリー不変ノルムと対称ノルム作用素イデアル

無限実数列で 0 でない項が有限個だけであるものの全体からなる線型空間を s_{fin} で表す．s_{fin} 上のノルム Φ が対称であるとは，$\mathbb{N}$ の任意の置換 π と $\varepsilon_i = \pm 1$ に対して

$$\Phi(a_1, a_2, \dots) = \Phi(\varepsilon_1 a_{\pi(1)}, \varepsilon_2 a_{\pi(2)}, \dots)$$

が成立するときをいう．この条件は，$(a_1^*, a_2^*, \dots)$ を $(|a_1|, |a_2|, \dots)$ の減少再配列とするとき

$$\Phi(a_1, a_2, \dots) = \Phi(a_1^*, a_2^*, \dots)$$

が成立するといっても同じである．s_{fin} 上の対称ノルムは対称ゲージ関数とも呼ばれる．

$\mathcal{H}$ 上のコンパクト作用素の全体を $\mathcal{C}(\mathcal{H})$ で表し，有限階の作用素の全体を $\mathcal{C}_{\text{fin}}(\mathcal{H})$ で表す．$\mathcal{C}_{\text{fin}}(\mathcal{H})$ 上のノルム $\|\cdot\|$ は，任意の $A \in \mathcal{C}_{\text{fin}}(\mathcal{H})$ と $\mathcal{H}$ 上の任意のユニタリー U, V に対して

$$\|UAV\| = \|A\|$$

が成立するとき，ユニタリー不変と呼ばれる．

次の基本定理は Schatten-von Neumann による [19]．

定理 1.3 対称ゲージ関数 Φ の全体と $\mathcal{C}_{\mathrm{fin}}(\mathcal{H})$ 上のユニタリー不変ノルム $\|\cdot\|$ の全体の間には，次の関係式で定まる一対一の対応が存在する：

$$\|A\| = \Phi(\mu_1(A), \mu_2(A), \ldots), \qquad A \in \mathcal{C}_{\mathrm{fin}}(\mathcal{H}).$$

さらに，$\mathcal{C}_{\mathrm{fin}}(\mathcal{H})$ 上のノルム $\|\cdot\|$ がユニタリー不変ならば，任意の $A \in \mathcal{C}_{\mathrm{fin}}(\mathcal{H})$ と $X, Y \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ に対して

$$\|XAY\| \le \|X\|_\infty \|Y\|_\infty \|A\|$$

が成立する．ただし $\|\cdot\|_\infty$ は作用素ノルム．

Φ を対称ゲージ関数とする．有界な実数列 $a = (a_1, a_2, \ldots)$ に対して

$$\Phi(a) = \sup_n \Phi(a_1, \ldots, a_n, 0, 0, \ldots) \in [0, \infty]$$

と定める．$\Phi(a) < \infty$ である有界な実数列の全体 s_Φ は，ノルム Φ により Banach 空間となる．$s_\Phi^{(0)}$ を s_Φ における s_{fin} の閉包とする．Φ に対応する $\mathcal{C}_{\mathrm{fin}}(\mathcal{H})$ 上のユニタリー不変ノルム $\|\cdot\|$ は，$\mathcal{B}(\mathcal{H})$ 全体に次のように拡張される：任意の $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ に対して

$$\|A\| = \sup_n \Phi(\mu_1(A), \ldots, \mu_n(A), 0, 0, \ldots) \in [0, \infty]. \tag{1.1}$$

$\|A\| < \infty$, i.e. $\mu(A) = (\mu_1(A), \mu_2(A), \ldots) \in s_\Phi$ である $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ の全体を $\mathcal{C}_\Phi(\mathcal{H})$ で表す．さらに，$\mu(A) \in s_\Phi^{(0)}$ である $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ の全体を $\mathcal{C}_\Phi^{(0)}(\mathcal{H})$ で表す．

定理 1.4 (1) $\mathcal{C}_\Phi(\mathcal{H}), \mathcal{C}_\Phi^{(0)}(\mathcal{H})$ は共に，ノルム (1.1) により Banach 空間であり，$\mathcal{B}(\mathcal{H})$ の両側イデアルである．

(2) $\mathcal{C}_\Phi^{(0)}(\mathcal{H})$ は $\mathcal{C}_\Phi(\mathcal{H})$ における $\mathcal{C}_{\mathrm{fin}}(\mathcal{H})$ の閉包であり $\mathcal{C}_\Phi^{(0)}(\mathcal{H}) \subset \mathcal{C}(\mathcal{H})$.

(3) Φ が ℓ_∞-ノルムと非同値ならば $\mathcal{C}_\Phi(\mathcal{H}) \subset \mathcal{C}(\mathcal{H})$.

Banach 空間 $\mathcal{C}_\Phi(\mathcal{H})$ および $\mathcal{C}_\Phi^{(0)}(\mathcal{H})$ は対称ノルム (作用素) イデアルと呼ばれる．$s_\Phi = s_\Phi^{(0)}$ すなわち $\mathcal{C}_\Phi(\mathcal{H}) = \mathcal{C}_\Phi^{(0)}(\mathcal{H})$ のとき，Φ は正規であるという．例えば，$1 \le p \le \infty$ として，Φ_p を ℓ_p-ノルムとし，$\|\cdot\|_p$ を対応するユニタリー不変ノルムとする．$1 \le p < \infty$ のとき，$\mathcal{C}_{\Phi_p}(\mathcal{H})$ が Schatten p-クラス $\mathcal{C}_p(\mathcal{H})$ であり，特に $\mathcal{C}_1(\mathcal{H})$ がトレース・クラス，$\mathcal{C}_2(\mathcal{H})$ が Hilbert-Schmidt クラスである．また $p = \infty$ のとき，$\mathcal{C}_{\Phi_\infty}(\mathcal{H}) = \mathcal{B}(\mathcal{H})$ かつ $\mathcal{C}_{\Phi_\infty}^{(0)}(\mathcal{H}) = \mathcal{C}(\mathcal{H})$. 一般の $0 < p < \infty$ に対して，p-クラス $\mathcal{C}_p(\mathcal{H})$ を

$$\|A\|_p = (\mathrm{tr}\,|A|^p)^{1/p} = \left\{\sum_i \mu_i(A)^p\right\}^{1/p} < \infty$$

である $A \in \mathcal{C}(\mathcal{H})$ の全体として定義できる．しかし $0 < p < 1$ のときは，$\|\cdot\|_p$ はノルムでなく，擬ノルムとなる．$0 < p < q \le \infty$ ならば，$\|A\|_p \ge \|A\|_q$ かつ $\mathcal{C}_p(\mathcal{H}) \subset \mathcal{C}_q(\mathcal{H})$ であることに注意する．

対称ゲージ関数 Φ に対応して，$\Phi' : s_{\mathrm{fin}} \to \mathbb{R}$ を

$$\Phi'(b_1, b_2, \ldots) = \sup\left\{\sum_n a_n b_n : a \in s_{\mathrm{fin}},\ \Phi(a) \le 1\right\}$$

と定めると，Φ' は再び対称ゲージ関数となる．Φ' は Φ の双対と呼ばれ，$\Phi'' = \Phi$ となる．例えば，$1 \le p \le \infty$ かつ $1/p + 1/q = 1$ のとき，ℓ_p-ノルムと ℓ_q-ノルムは互いに双対である．Φ, Φ' に対応するノルムをそれぞれ $\|\cdot\|, \|\cdot\|'$ とすると，任意の $A \in \mathcal{C}_\Phi(\mathcal{H})$ と $B \in \mathcal{C}_{\Phi'}(\mathcal{H})$ に対して，$AB \in \mathcal{C}_1(\mathcal{H})$ であり，次の一般化された Hölder 不等式が成立する：

$$\|AB\|_1 \le \|A\|\,\|B\|'.$$

定理 1.5 Φ, Φ' を双対の対称ゲージ関数とするとき，$\mathcal{C}_\Phi^{(0)}(\mathcal{H})$ の双対 Banach 空間 $\mathcal{C}_\Phi^{(0)}(\mathcal{H})^*$ は，duality $(A, B) \in \mathcal{C}_\Phi^{(0)}(\mathcal{H}) \times \mathcal{C}_{\Phi'}(\mathcal{H}) \mapsto \mathrm{tr}(AB)$ により，$\mathcal{C}_{\Phi'}(\mathcal{H})$ に等距離同型である．ここで tr は $\mathcal{C}_1(\mathcal{H})$ 上の通常のトレースとする．

例えば $\mathcal{C}_1(\mathcal{H})^* \cong \mathcal{B}(\mathcal{H})$ であり，$1 < p < \infty$, $1/p + 1/q = 1$ のとき $\mathcal{C}_p(\mathcal{H})^* \cong \mathcal{C}_q(\mathcal{H})$ である．上定理より，Φ が正規ならば $\mathcal{C}_\Phi(\mathcal{H})^* \cong \mathcal{C}_{\Phi'}(\mathcal{H})$. また，$\mathcal{C}_\Phi(\mathcal{H})$ が回帰的であることは，Φ と Φ' が共に正規であることと同値である．

対称ノルム・イデアルについては [13, 20] が詳しい．

1.6 対数マジョリゼーション

$a_1 \ge a_2 \ge \ldots \ge 0$, $b_1 \ge b_2 \ge \ldots \ge 0$ である無限数列 $a = (a_1, a_2, \ldots)$, $b = (b_1, b_2, \ldots)$ について，(弱) マジョリゼーション $a \prec_w b$ は

$$\sum_{i=1}^k a_i \le \sum_{i=1}^k b_i, \qquad k \in \mathbb{N}$$

を意味する．また，(弱) 対数マジョリゼーション $a \prec_{w(\log)} b$ は

$$\prod_{i=1}^k a_i \le \prod_{i=1}^k b_i, \qquad k \in \mathbb{N}$$

を意味する．

行列や作用素の (一般化) された特異値 (また固有値) に対して，各種の (対数) マジョリゼーションが知られている．これらは，作用素のトレース不等式やノルム不等式を導くための強力な武器となっている．次の命題はこの状況をよく説明している．

命題 1.7 $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ とし，一般化された特異値の列を $\mu(A), \mu(B)$ とする．このとき，以下の条件について，次が成立する：

$$\text{(i)} \Leftrightarrow \text{(ii)} \Rightarrow \text{(iii)} \Leftrightarrow \text{(iv)} \Leftrightarrow \text{(v)}.$$

(i) $\mu(A) \prec_{w(\log)} \mu(B)$;

(ii) 任意のユニタリー不変ノルム $\|\cdot\|$ と $f(0) \ge 0$ で $f(e^x)$ が凸である $[0, \infty)$ 上の任意の連続な単調増加関数 f に対して，$\|f(|A|)\| \le \|f(|B|)\|$;

(iii) $\mu(A) \prec_w \mu(B)$;

(iv) 任意のユニタリー不変ノルム $\|\cdot\|$ に対して $\|A\| \le \|B\|$;

(v) 任意のユタリー不変ノルム $\|\cdot\|$ と $f(0) \ge 0$ である $[0, \infty)$ 上の任意の単調増加な凸関数 f に対して，$\|f(|A|)\| \le \|f(|B|)\|$.

1.8 反対称テンソル積

各 $n \in \mathbb{N}$ に対して，$\mathcal{H}$ 自身の n-重テンソル積 Hilbert 空間を $\otimes^n \mathcal{H}$ で表す．$\xi_1, \ldots, \xi_n \in \mathcal{H}$ に対して，$\xi_1 \wedge \cdots \wedge \xi_n \in \otimes^n \mathcal{H}$ を

$$\xi_1 \wedge \cdots \wedge \xi_n = \frac{1}{\sqrt{n!}} \sum_{\pi} (\operatorname{sign} \pi) \xi_{\pi(1)} \otimes \cdots \otimes \xi_{\pi(n)}$$

と定める．ここで π は $\{1, \ldots, n\}$ の置換全体にわたり，π の偶奇に応じて $\operatorname{sign} \pi = \pm 1$ とする．$\{\xi_1 \wedge \cdots \wedge \xi_n : \xi_i \in \mathcal{H}\}$ で張られる $\otimes^n \mathcal{H}$ の閉部分空間を $\mathcal{H}$ の n-重反対称テンソル積と呼び，$\Lambda^n \mathcal{H}$ で表す．実際，$\xi_1 \otimes \cdots \otimes \xi_n \mapsto \xi_1 \wedge \cdots \wedge \xi_n$ の線型拡張が $\otimes^n \mathcal{H}$ から $\Lambda^n \mathcal{H}$ の上への射影である．$\{\varphi_i\}$ が $\mathcal{H}$ の正規直交基底のとき，$\{\varphi_{i_1} \wedge \cdots \wedge \varphi_{i_n} : i_1 < \ldots < i_n\}$ が $\Lambda^n \mathcal{H}$ の正規直交基底となる．

任意の $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ に対して，n-重テンソル積 $\otimes^n A \in \mathcal{B}(\otimes^n \mathcal{H})$ が $\Lambda^n \mathcal{H}$ を不変にするから，A の反対称テンソル積 $\Lambda^n A$ を $\Lambda^n A = \otimes^n A|_{\Lambda^n \mathcal{H}}$ として定義できる．つまり

$$(\Lambda^n A)(\xi_1 \wedge \cdots \wedge \xi_n) = A\xi_1 \wedge \cdots \wedge A\xi_n.$$

$\dim \mathcal{H} = N < \infty$ のとき，$\Lambda^N \mathcal{H} = \mathbb{C}$, $\Lambda^N A = \det A$ であり，$n > N$ なら $\Lambda^n \mathcal{H} = \{0\}$.

次は，作用素の反対称テンソル積の簡単な性質である．

補題 1.9 $X, Y, A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, $n \in \mathbb{N}$ のとき，

(1) $\Lambda^n(X^*) = (\Lambda^n X)^*$.

(2) $\Lambda^n(XY) = (\Lambda^n X)(\Lambda^n Y)$.

(3) $A \geq 0$ のとき，$\Lambda^n A \geq 0$ であり，任意の $p > 0$ に対して $\Lambda^n(A^p) = (\Lambda^n A)^p$.

(4) $\Lambda^n(|X|) = |\Lambda^n X|$.

次の補題は，作用素の対数マジョリゼーションを示す際に有用な働きをする．

補題 1.10 任意の $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ と $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\prod_{i=1}^{n} \mu_i(A) = \mu_1(\Lambda^n A) \ (= \|\Lambda^n A\|_\infty).$$

1.11 作用素平均

作用素平均に関する公理論的な研究は久保-安藤 [17] による．2 項演算 $\sigma : \mathcal{B}(\mathcal{H})_+ \times \mathcal{B}(\mathcal{H})_+ \to \mathcal{B}(\mathcal{H})_+$ が作用素結合であるとは，次の条件 (i)-(iii) が $A, B, C, D \in \mathcal{B}(\mathcal{H})_+$ に対して成立するときをいう：

(i) $A \leq C$ かつ $B \leq D$ ならば $A \sigma B \leq C \sigma D$ (両単調性),

(ii) $C(A \sigma B)C \leq (CAC) \sigma (CBC)$ (トランス不等式),

(iii) $A_n, B_n \in \mathcal{B}(\mathcal{H})_+$, $A_n \downarrow A$, $B_n \downarrow B$ ならば $A_n \sigma B_n \downarrow A \sigma B$ (上半連続性).

作用素結合 σ は，さらに次を満たすとき，作用素平均と呼ばれる：

(iv) $I \sigma I = I$.

久保-安藤の基本定理は次のように述べられる：任意の作用素結合 σ に対して，$[0,\infty)$ 上の作用素単調関数 $f\geq 0$ が一意的に存在して $f(x)I=I\,\sigma\,(xI)$, $x\geq 0$, が成立する．写像 $\sigma\mapsto f$ は，作用素結合の全体と $[0,\infty)$ 上の非負の作用素単調関数の全体との間の，アフィン順序同型である．作用素結合 σ は，作用素単調関数 f を用いて，A が可逆のとき

$$A\,\sigma\,B=A^{1/2}f(A^{-1/2}BA^{-1/2})A^{1/2} \tag{1.2}$$

と定められる．一般の A,B に対しては

$$A\,\sigma\,B=\lim_{\varepsilon\downarrow 0}A_\varepsilon^{1/2}f(A_\varepsilon^{-1/2}B_\varepsilon A_\varepsilon^{-1/2})A_\varepsilon^{1/2}\quad(\text{単調減少})$$

と与えられる．ここで $A_\varepsilon=A+\varepsilon I$, $B_\varepsilon=B+\varepsilon I$. さらに，$\sigma$ が作用素平均であるためには，$f(1)=1$ が必要十分であり，このとき，すべての A に対し $A\,\sigma\,A=A$.

作用素平均の典型的な例としては，算術平均 $A\,\nabla\,B=\frac{1}{2}(A+B)$, 調和平均 $A\,!\,B$, 幾何平均 $A\,\#\,B$ などがある．

各 $0\leq\alpha\leq 1$ に対し，α-べき平均を $\#_\alpha$ で表す．これは，作用素単調関数 x^α に対応する作用素平均である．つまり，$A,B\in\mathcal{B}(\mathcal{H})_+$ で A が可逆のとき，$A\,\#_\alpha\,B$ は

$$A\,\#_\alpha\,B=A^{1/2}(A^{-1/2}BA^{-1/2})^\alpha A^{1/2}$$

と定義される．$A\,\#_0\,B=A$, $A\,\#_1\,B=B$, $A\,\#_{1/2}\,B=A\,\#\,B$ に注意する．

σ を作用素平均とする．対応する作用素単調関数 f は $(0,\infty)$ で無限回微分可能となる．そこで，$\alpha=f'(1)$ とおくと，f の凹性から，$0\leq\alpha\leq 1$ であり，$x\geq 0$ で $f(x)\leq(1-\alpha)+\alpha x$ が成立する．さらに $f(x^{-1})^{-1}$ も作用素単調であり，よって凹関数であるから，次が成立する：

$$\frac{x}{(1-\alpha)x+\alpha}\leq f(x)\leq(1-\alpha)+\alpha x,\qquad x\geq 0. \tag{1.3}$$

特に σ が対称 (すべての A,B に対して $A\,\sigma\,B=B\,\sigma\,A$), つまり $f(x)=xf(x^{-1})$ のとき，$\alpha=1/2$ となるから，(1.3) は，対称作用素平均の中で算術平均が最大で，調和平均が最小であることを主張している．

作用素平均の収束に関して次が成立する．

補題 1.12 σ を作用素単調関数 f に対応する作用素平均とし，$A,B\in\mathcal{B}(\mathcal{H})_+$ とする．

(1) A が可逆のとき，$B\mapsto A\,\sigma\,B$ は $\mathcal{B}(\mathcal{H})_+$ 上で作用素ノルム $\|\cdot\|_\infty$ に関して連続である．

(2) $f(0)=0$ で B がコンパクトとするとき，$A_n\downarrow A$ ならば $\|A_n\,\sigma\,B-A\,\sigma\,B\|_\infty\to 0$.

証明 (1) は表示 (1.2) より明らか．

(2) $A_n\leq aI$ となる $a>0$ をとると，$A_n\,\sigma\,B\leq(aI)\,\sigma\,B=af(a^{-1}B)$ であり，$f(0)=0$ より $af(a^{-1}B)\in\mathcal{C}(\mathcal{H})$. また $A_n\,\sigma\,B\downarrow A\,\sigma\,B$. ゆえに，有界収束定理 ([20, Theorem 2.16]) より結論を得る．■

2 べき作用素平均に対する対数マジョリゼーション

次の対数マジョリゼーションは, A, B が行列のときに [4] で与えられた.

定理 2.1 $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})_+$ とし, A が可逆またはコンパクトならば

$$\mu(A^r \#_\alpha B^r) \prec_{w(\log)} \mu((A \#_\alpha B)^r), \qquad r \geq 1. \tag{2.1}$$

したがって

$$\mu((A^p \#_\alpha B^p)^{1/p}) \prec_{w(\log)} \mu((A^q \#_\alpha B^q)^{1/q}), \qquad p \geq q > 0. \tag{2.2}$$

証明 まず A, B 共に可逆とするとき, (2.1) は [4, Theorem 2.1] と全く同様に証明できる. 次に, A が可逆で, B が一般とする. $B_\varepsilon = B + \varepsilon I$ とすると, 補題 1.12 (1) より, 作用素ノルムで

$$A^r \#_\alpha B^r = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} A^r \#_\alpha B_\varepsilon^r \text{ かつ } (A \#_\alpha B)^r = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} (A \#_\alpha B_\varepsilon)^r$$

である. よって最初の場合から, (2.1) が得られる. 最後に, A がコンパクトとすると, 2 番目の場合から

$$\mu(B_\varepsilon^r \#_{1-\alpha} A^r) \prec_{w(\log)} \mu((B_\varepsilon \#_{1-\alpha} A)^r), \qquad r \geq 1,\ \varepsilon > 0.$$

補題 1.12 (2) より, 作用素ノルムで $B_\varepsilon \#_{1-\alpha} A \to B \#_{1-\alpha} A$ かつ $B_\varepsilon^r \#_{1-\alpha} A^r \to B^r \#_{1-\alpha} A^r$ であるから

$$\mu(B^r \#_{1-\alpha} A^r) \prec_{w(\log)} \mu((B \#_{1-\alpha} A)^r), \qquad r \geq 1$$

となるが, これは (2.1) に他ならない. さらに, (2.1) で A, B を A^p, B^p に置き換えて, $r = q/p$ とおけば, (2.2) が得られる. ■

前定理と命題 1.7 より

系 2.2 $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})_+$ とし, A が可逆またはコンパクトとする. $\|\cdot\|$ を任意のユニタリー不変ノルムとするとき, $f(0) \geq 0$ かつ $f(e^x)$ が凸である $[0, \infty)$ 上の任意の連続な単調増加関数 f に対して

$$\|f(A^r \#_\alpha B^r)\| \leq \|f((A \#_\alpha B)^r)\|, \qquad r \geq 1.$$

特に

$$\|A^r \#_\alpha B^r\| \leq \|(A \#_\alpha B)^r\|, \qquad r \geq 1.$$

注意 2.3 定理 2.1 (よって系 2.2) を A が可逆またはコンパクトの仮定なしに証明したいところである. もし $\|A \#_\alpha B\|_\infty = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \|(A + \varepsilon I) \#_\alpha B\|_\infty$ が一般の $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})_+$ について成立するならば, これは可能である. しかし, 任意の $0 < \delta < 1$ に対して, $\ker A = \ker B = \{0\}$ である $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})_+$ で

$$\|A \# B\|_\infty \leq \delta < 1 \leq \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \|(A + \varepsilon I) \# B\|_\infty$$

となるものが存在する.

次の命題は [1, Theorem 1] の拡張である．[1] では H, K が有界で $\alpha = 1/2$ の場合を扱っている．

命題 2.4 $H \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ は自己共役であり，K は下に半有界な $\mathcal{H}$ 上の自己共役作用素とするとき，次の条件は同値である：

(i) $(1-\alpha)H + \alpha K \geq 0$;

(ii) すべての $t \geq 0$ に対して $e^{-tH} \#_\alpha e^{-tK} \leq I$;

(iii) $t \mapsto e^{-tH} \#_\alpha e^{-tK}$ が $[0,\infty)$ から $\mathcal{B}(\mathcal{H})_+$ への（正定値性による順序での）減少関数.

証明 (i)$\Rightarrow$(ii). $(1-\alpha)H + \alpha K \geq 0$, i.e. $K \geq -\alpha^{-1}(1-\alpha)H$ とする．$r \downarrow 0$ のとき (2.2) より $\|e^{-rH} \#_\alpha e^{-rK}\|_\infty^{1/r} = \|(e^{-rH} \#_\alpha e^{-rK})^{1/r}\|_\infty$ が増加するから，(ii) を示すには

$$\lim_{r \downarrow 0} \|(e^{-rH} \#_\alpha e^{-rK})^{1/r}\|_\infty \leq 1 \tag{2.3}$$

を証明すればよい．$0 < r < \alpha\{(1-\alpha)\|H\|_\infty\}^{-1}$ のとき，$I + rK \geq I - \alpha^{-1}(1-\alpha)rH \geq 0$ で $I - \alpha^{-1}(1-\alpha)rH$ が可逆であるから

$$e^{-rK} \leq (I + rK)^{-1} \leq \Big(I - \frac{1-\alpha}{\alpha} rH\Big)^{-1}.$$

また $e^{-rH} \leq (I + rH)^{-1}$. ゆえに

$$\begin{aligned} e^{-rH} \#_\alpha e^{-rK} &\leq (I + rH)^{-1} \#_\alpha \Big(I - \frac{1-\alpha}{\alpha} rH\Big)^{-1} \\ &= (I + rH)^{-(1-\alpha)} \Big(I - \frac{1-\alpha}{\alpha} rH\Big)^{-\alpha}. \end{aligned}$$

となり

$$\|(e^{-rH} \#_\alpha e^{-rK})^{1/r}\|_\infty \leq \Big\|(I + rH)^{-(1-\alpha)/r} \Big(I - \frac{1-\alpha}{\alpha} rH\Big)^{-\alpha/r}\Big\|_\infty.$$

ところで，$\lambda \in [-\|H\|_\infty, \|H\|_\infty]$ について一様に

$$\lim_{r \downarrow 0} (1 + r\lambda)^{-(1-\alpha)/r} \Big(1 - \frac{1-\alpha}{\alpha} r\lambda\Big)^{-\alpha/r} = (e^\lambda)^{-(1-\alpha)} (e^{-\frac{1-\alpha}{\alpha}\lambda})^{-\alpha} = 1$$

であるから

$$\lim_{r \downarrow 0} \Big\|(I + rH)^{-(1-\alpha)/r} \Big(I - \frac{1-\alpha}{\alpha} rH\Big)^{-\alpha/r} - I\Big\|_\infty = 0$$

がいえる．よって (2.3) が成立する．

(ii)$\Rightarrow$(iii). 次のことを証明すればよい：$A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})_+$ で A が可逆のとき，$A \#_\alpha B \leq I$ ならば，任意の $r \geq 1$ に対して $A^r \#_\alpha B^r \leq A \#_\alpha B$. A, B 共に可逆のとき，これは [4, Theorem 2.1] の証明の中で示されている．A が可逆で B が一般のとき，$B_\varepsilon = B + \varepsilon I$ とおくと

$$A \#_\alpha (\|A \#_\alpha B_\varepsilon\|_\infty^{-1/\alpha} B_\varepsilon) = \|A \#_\alpha B_\varepsilon\|_\infty^{-1} (A \#_\alpha B_\varepsilon) \leq I$$

である．A と $\|A \#_\alpha B_\varepsilon\|_\infty^{-1/\alpha} B_\varepsilon$ に最初の場合を適用すれば，$r \geq 1$ に対して

$$A^r \#_\alpha B_\varepsilon^r \leq \|A \#_\alpha B_\varepsilon\|_\infty^{r-1} (A \#_\alpha B_\varepsilon).$$

$\varepsilon \downarrow 0$ とすると，補題 1.12 (1) より

$$A^r \#_\alpha B^r \le \|A \#_\alpha B\|_\infty^{r-1}(A \#_\alpha B) \le A \#_\alpha B$$

がいえる．

(iii) ⇒ (i). 任意の $\varepsilon > 0$ と $t > 0$ に対して，(1.3) より

$$\begin{aligned}
&e^{-tH} \#_\alpha (e^{-tK} + \varepsilon I) \\
&\quad = e^{-tH/2}\{e^{tH/2}(e^{-tK} + \varepsilon I)e^{tH/2}\}^\alpha e^{-tH/2} \\
&\quad \ge e^{-tH/2}\{(1-\alpha)I + \alpha e^{-tH/2}(e^{-tK} + \varepsilon I)^{-1}e^{-tH/2}\}^{-1}e^{-tH/2} \\
&\quad \ge e^{-tH/2}\{(1-\alpha)I + \alpha e^{-tH/2}e^{tK}e^{-tH/2}\}^{-1}e^{-tH/2} \\
&\quad = \{(1-\alpha)e^{tH} + \alpha e^{tK}\}^{-1}.
\end{aligned}$$

よって $e^{-tH} \#_\alpha e^{-tK} \ge \{(1-\alpha)e^{tH} + \alpha e^{tK}\}^{-1}$ となり，(iii) から $(1-\alpha)e^{tH} + \alpha e^{tK} \ge I$ がすべての $t > 0$ に対して成立する．したがって，すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\alpha n(e^{K/n} - I) \ge -(1-\alpha)n(e^{H/n} - I). \tag{2.4}$$

スペクトル分解 $K = \int_b^\infty \lambda dE_K(\lambda)$ を用いて，任意の $\xi \in E_K(c)\mathcal{H}$ (ただし $b < c < \infty$) に対して，(2.4) より

$$\alpha \int_b^c n(e^{\lambda/n} - 1)d\|E_K(\lambda)\xi\|^2 \ge -(1-\alpha)\langle n(e^{H/n} - I)\xi, \xi\rangle.$$

上の左辺は $n \to \infty$ のとき $\alpha \int_b^c \lambda d\|E_K(\lambda)\xi\|^2 = \alpha\langle K\xi, \xi\rangle$ に収束し，右辺は $-(1-\alpha)\langle H\xi, \xi\rangle$ に収束する．したがって $\langle((1-\alpha)H + \alpha K)\xi, \xi\rangle \ge 0$. $\bigcup_{c>b} E_K(c)\mathcal{H}$ が $(1-\alpha)H + \alpha K$ のコアだから，(i) が成立する． ■

注意 2.5 フルタ不等式 [10] を用いて，可逆な正作用素に対してもっと一般な結果が [11] (また [9]) で示されている： $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})_+$ が可逆のとき，例えば次の条件は同値である：

(I) $\log A \ge \log B$;

(II) すべての $p, r \ge 0$ に対して $A^r \ge (A^{r/2}B^pA^{r/2})^{\frac{r}{p+r}}$;

(III) 任意の $t \ge 0$ に対して，$A^{-r}(A^rB^pA^r)^{\frac{t+2r}{p+2r}}A^{-r}$ が $p \ge t$ と $r \ge 0$ の両変数について $\mathcal{B}(\mathcal{H})_+$ への減少関数．

$\alpha = r/(p+r)$ とおくと，上の (II) は $A^{-r} \#_\alpha B^{\frac{1-\alpha}{\alpha}r} \le I$ がすべての $r \ge 0$ と $0 \le \alpha \le 1$ に対して成立することを意味する．したがって，(I) ⇔ (II) は命題 2.4 の (i) ⇔ (ii) に他ならない．

注意 2.6 最近，古田 [12] はフルタ不等式を拡張する次のような不等式を証明している：$A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})_+$ が $A \ge B \ge 0$ で A が可逆のとき，任意の $0 \le t \le 1$, $p \ge 1$, $r \ge t$, $s \ge 1$ に対して

$$A^{1-t+r} \ge \{A^{r/2}(A^{-t/2}B^pA^{-t/2})^sA^{r/2}\}^{\frac{1-t+r}{(p-t)s+r}}.$$

さらに，任意の $0 \leq t \leq 1$ と $p \geq 1$ に対して

$$(r,s) \mapsto A^{-r/2}\{A^{r/2}(A^{-t/2}B^pA^{-t/2})^sA^{r/2}\}^{\frac{1-t+r}{(p-t)s+r}}A^{-r/2}$$

は $r \geq t$ と $s \geq 1$ の両変数についての減少関数である．

上の不等式から，定理 2.1 を拡張する多くの対数マジョリゼーションが得られる [12]．例えば，$A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})_+$ で A が可逆またはコンパクトならば，任意の $0 \leq \alpha \leq 1$ と $r, s \geq 1$ に対して

$$\mu(A^r \#_{\alpha q/s} B^s) \prec_{w(\log)} \mu((A \#_\alpha B)^q),$$

ただし $q = ((1-\alpha)r^{-1} + \alpha s^{-1})^{-1}$.

ここで，反対称テンソル積の加法的類似を導入しよう．下に半有界な $\mathcal{H}$ 上の自己共役作用素 K に対して，下に半有界な $\Lambda^n\mathcal{H}$ 上の自己共役作用素 $\Sigma^n K$ を

$$\Sigma^n K = \sum_{m=1}^n \{(\otimes^{m-1}I) \otimes K \otimes (\otimes^{n-m}I)\}\Big|_{\Lambda^n\mathcal{H}}$$

と定める．もっと正確には，任意の $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ に対して

$$\sum_{m=1}^n (\otimes^{m-1}I) \otimes A \otimes (\otimes^{n-m}I) \tag{2.5}$$

が $\otimes^n\mathcal{H}$ から $\Lambda^n\mathcal{H}$ 上への射影と可換だから，$\Sigma^n A$ を (2.5) の $\Lambda^n\mathcal{H}$ への制限として定義できる．スペクトル分解 $K = \int_a^\infty \lambda dE_K(\lambda)$ をとり $K_k = \int_a^k \lambda dE_K(\lambda)$ とおくと，$\{\Sigma^n K_k\}_{k=1}^\infty$ は $\mathcal{B}(\Lambda^n\mathcal{H})$ の（互いに可換な）自己共役作用素の増大列となる．この極限作用素として $\Sigma^n K$ が定義できる．

補題 2.7 $H \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ が自己共役とし，K が下に半有界な $\mathcal{H}$ 上の自己共役作用素とする．このとき

(1) $\Lambda^n(e^{-K}) = e^{-\Sigma^n K}$.

(2) $\Sigma^n(H+K) = (\Sigma^n H) + (\Sigma^n K)$.

証明 (1) $K \geq 0$ として十分である．K が有界ならば

$$\begin{aligned} e^{-\Sigma^n K} &= \prod_{m=1}^n \{(\otimes^{m-1}I) \otimes e^{-K} \otimes (\otimes^{n-m}I)\}\Big|_{\Lambda^n\mathcal{H}} \\ &= \otimes^n e^{-K}|_{\Lambda^n\mathcal{H}} = \Lambda^n(e^{-K}). \end{aligned}$$

一般の $K \geq 0$ については，$K_k = \int_0^k \lambda dE_K(\lambda)$ とすると，$I \geq (I+K_k)^{-1} \downarrow (I+K)^{-1}$ $(k \to \infty)$. e^{-K} が $f(x) = \exp(1-x^{-1})$ $(0 \leq x \leq 1)$ による $(I+H)^{-1}$ の functional calculus であることに注意すれば，$e^{-K_k} \to e^{-K}$ (SOT) がいえる．ゆえに $\Lambda^n(e^{-K_k}) \to \Lambda^n(e^{-K})$ (SOT). 同様に $e^{-\Sigma^n K_k} \to e^{-\Sigma^n K}$ (SOT). したがって結論を得る．

(2) は明らかであろう． ■

定理 2.8 $H \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ が自己共役とし，K が下に半有界な $\mathcal{H}$ 上の自己共役作用素とするとき

$$(e^{-rH} \#_\alpha e^{-rK})^{1/r} \prec_{w(\log)} e^{-((1-\alpha)H+\alpha K)}, \qquad r>0.$$

証明 補題 1.9 と補題 2.7 より

$$\begin{aligned} \Lambda^n((e^{-rH} \#_\alpha e^{-rK})^{1/r}) &= (\Lambda^n(e^{-rH}) \#_\alpha \Lambda^n(e^{-rK}))^{1/r} \\ &= (e^{-r\Sigma^n H} \#_\alpha e^{-r\Sigma^n K})^{1/r}, \end{aligned}$$

$$\Lambda^n(e^{-((1-\alpha)H+\alpha K)}) = e^{-((1-\alpha)\Sigma^n H+\alpha\Sigma^n K)}.$$

したがって，補題 1.10 より，次を示せば十分である：

$$\|(e^{-rH} \#_\alpha e^{-rK})^{1/r}\|_\infty \le \|e^{-((1-\alpha)H+\alpha K)}\|_\infty.$$

ゆえに，$e^{-((1-\alpha)H+\alpha K)} \le I$, i.e. $(1-\alpha)H+\alpha K \ge 0$ ならば，すべての $r>0$ に対して $e^{-rH} \#_\alpha e^{-rK} \le I$ であることをいえばよい．これは命題 2.4 の (i)⇒(ii) のことである． ■

3 作用素平均に対する指数積公式

次の定理は作用素平均に対する Trotter 型の指数積公式である．

定理 3.1 σ を作用素平均とし，対応する作用素単調関数 f について $\alpha = f'(1)$ とする．$H \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ が自己共役とし，K が下に半有界な $\mathcal{H}$ 上の自己共役作用素とするとき

$$\text{s-}\lim_{r\downarrow 0}(e^{-rtH}\,\sigma\, e^{-rtK})^{1/r} = e^{-t((1-\alpha)H+\alpha K)}, \qquad t>0.$$

任意の $0<a<b$ に対して，上の収束は $t \in [a,b]$ で一様である．(ただし s-lim は SOT による収束を表す．)

定理の証明はいくつかの補題に分けられる．

補題 3.2 $G(t)$, $G_1(t)$, $G_2(t)$ が $[0,\infty)$ から $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ への SOT-連続な関数とする．任意の $t \ge 0$ に対して $G(t)$, $G_1(t)$, $G_2(t)$ が互いに可換であり，ある $a \ge 0$ に対して

$$0 \le G_1(t) \le G(t) \le G_2(t) \le e^{at}I, \qquad t \ge 0$$

が成立しているとする．S が $\mathcal{H}$ 上の自己共役作用素であり，$\mathcal{D}$ が S のコアとする．このとき，もし

$$\lim_{t\downarrow 0}\left\|\frac{G_i(t)-I}{t}\xi + S\xi\right\| = 0, \qquad \xi \in \mathcal{D},\ i=1,2$$

ならば

$$\lim_{t\downarrow 0}\left\|\frac{G(t)-I}{t}\xi + S\xi\right\| = 0, \qquad \xi \in \mathcal{D}.$$

証明 $G(t), G_1(t), G_2(t)$ の代わりにそれぞれに e^{-at} を掛けたものをとり，S を $S+aI$ に置き換えればよいから，$a=0$ の場合を示せば十分である．$\xi \in \mathcal{D}$ とする．仮定より

$$0 \leq \frac{I-G_2(t)}{t} \leq \frac{I-G(t)}{t} \leq \frac{I-G_1(t)}{t}$$

だから，

$$\Big\langle \frac{I-G_2(t)}{t}\xi, \xi \Big\rangle \leq \Big\langle \frac{I-G(t)}{t}\xi, \xi \Big\rangle \leq \Big\langle \frac{I-G_1(t)}{t}\xi, \xi \Big\rangle.$$

これより，$t \downarrow 0$ のとき $\langle t^{-1}(I-G(t))\xi, \xi\rangle \to \langle S\xi, \xi\rangle$. よって，polarization により

$$\Big\langle \frac{I-G(t)}{t}\xi, \eta \Big\rangle \to \langle S\xi, \eta\rangle, \qquad \eta \in \mathcal{D}. \tag{3.1}$$

さらに，$G(t), G_1(t), G_2(t)$ の可換性より

$$\Big(\frac{I-G_2(t)}{t}\Big)^2 \leq \Big(\frac{I-G(t)}{t}\Big)^2 \leq \Big(\frac{I-G_1(t)}{t}\Big)^2$$

もいえて

$$\Big\|\frac{I-G_2(t)}{t}\xi\Big\| \leq \Big\|\frac{I-G(t)}{t}\xi\Big\| \leq \Big\|\frac{I-G_1(t)}{t}\xi\Big\|.$$

ゆえに $\|t^{-1}(I-G(t))\xi\| \to \|S\xi\|$ であり，$t^{-1}(I-G(t))\xi, t>0$, は有界となる．これと (3.1) から，$t^{-1}(I-G(t))\xi \to S\xi$ (弱収束) がわかる．したがって

$$\begin{aligned}\Big\|\frac{I-G(t)}{t}\xi - S\xi\Big\| &= \Big\|\frac{I-G(t)}{t}\xi\Big\|^2 - 2\mathrm{Re}\Big\langle \frac{I-G(t)}{t}\xi, S\xi\Big\rangle + \|S\xi\|^2 \\ &\to \|S\xi\|^2 - 2\langle S\xi, S\xi\rangle + \|S\xi\|^2 = 0\end{aligned}$$

となり，結論を得る．■

定理 3.1 の H, K に対して

$$F(t) = e^{-tH}\,\sigma\, e^{-tK}, \qquad t \geq 0$$

と定義する．$L = (1-\alpha)H + \alpha K$ とし，$\mathcal{D} = \mathcal{D}(K)$ とおくと，$\mathcal{D}$ は L の定義域である．このとき

補題 3.3

$$\lim_{t\downarrow 0}\Big\|\frac{F(t)-I}{t}\xi + L\xi\Big\| = 0, \qquad \xi \in \mathcal{D}.$$

証明 $H \leq aI$ かつ $K + aI \geq 0$ となる $a > 0$ を選ぶ．$t \geq 0$ に対して $A(t) = e^{tH/2}e^{-tK}e^{tH/2}$ と定めると，$F(t) = e^{-tH/2}f(A(t))e^{-tH/2}$ となり

$$\begin{aligned}\frac{F(t)-I}{t}\xi &= e^{-tH/2}f(A(t))\frac{e^{-tH/2}-I}{t}\xi \\ &\quad + e^{-tH/2}\frac{f(A(t))-I}{t}\xi + \frac{e^{-tH/2}-I}{t}\xi.\end{aligned} \tag{3.2}$$

$A(t) \to I$ (SOT) だから $f(A(t)) \to I$ (SOT). よって (3.2) の右辺の第 2，3 項は $t \downarrow 0$ のとき $(-H/2)\xi$ に強収束する．したがって，残りは

$$\lim_{t \downarrow 0} \left\| \frac{f(A(t)) - I}{t}\xi + \alpha(K - H)\xi \right\| = 0, \qquad \xi \in \mathcal{D} \tag{3.3}$$

を証明すればよい．そこで $G(t) = f(A(t))$, $G_1(t) = A(t)((1-\alpha)A(t) + \alpha I)^{-1}$, $G_2(t) = (1-\alpha)I + \alpha A(t)$ と定める．これらは，任意の $t \geq 0$ に対して互いに可換であり，(1.3) より $0 \leq G_1(t) \leq G(t) \leq G_2(t)$ かつ $G_2(t) \leq e^{2at}I$. ゆえに，補題 3.2 が適用できる．次は容易に確かめられる：

$$\left\| \frac{G_2(t) - I}{t}\xi + \alpha(K - H)\xi \right\| = \alpha \left\| \frac{A(t) - I}{t}\xi + (K - H)\xi \right\| \to 0.$$

さらに

$$\begin{aligned}
&\left\| \frac{G_1(t) - I}{t}\xi + \alpha(K - H)\xi \right\| \\
&\quad \leq \left\| ((1-\alpha)A(t) + \alpha I)^{-1} \left\{ \frac{A(t) - ((1-\alpha)A(t) + \alpha I)}{t}\xi + \alpha(K - H)\xi \right\} \right\| \\
&\qquad\quad + \| \{((1-\alpha)A(t) + \alpha I)^{-1} - I\} \alpha (K - H)\xi \| \\
&\quad \leq \left\| \frac{A(t) - I}{t}\xi + (K - H)\xi \right\| + (1 - \alpha) \| (A(t) - I)(K - H)\xi \| \to 0.
\end{aligned}$$

上で $\|((1-\alpha)A(t) + \alpha I)^{-1}\|_\infty \leq \alpha^{-1}$ を用いた．よって補題 3.2 より (3.3) が従う．■

定理を証明するには，$H + aI, K + aI$ をとればよいから $H, K \geq 0$ と仮定してよい．このとき，すべての $t \geq 0$ に対して $0 \leq F(t) \leq I$. 以下，[6] の方針で進む．$0 < s_n \to \infty$ となる列 $\{s_n\}$ を任意に固定し，$L_n = s_n(I - F(s_n^{-1}))$ と定めると，$L_n \geq 0$. このとき，補題 3.3 は $\|(L - L_n)\xi\| \to 0$ がすべての $\xi \in \mathcal{D}$ について成立することを主張している．

補題 3.4 $\text{s-}\lim_{n \to \infty}(F(s_n^{-1})^{s_n} - e^{-L_n}) = 0$.

証明 任意の $\xi \in \mathcal{H}$ に対して

$$\begin{aligned}
\|F(s_n^{-1})^{s_n}\xi - e^{-L_n}\xi\| &= \left\| F(s_n^{-1})^{s_n}\xi - e^{-s_n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{s_n^k}{k!} F(s_n^{-1})^k \xi \right\| \\
&\leq e^{-s_n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{s_n^k}{k!} \|(F(s_n^{-1})^{s_n} - F(s_n^{-1})^k)\xi\| \\
&\leq e^{-s_n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{s_n^k}{k!} \|(I - F(s_n^{-1})^{|k - s_n|})\xi\|.
\end{aligned}$$

ここで

$$0 \leq I - F(s_n^{-1})^r \leq \begin{cases} r(I - F(s_n^{-1})), & r \geq 1 \\ I - F(s_n^{-1}), & 0 \leq r \leq 1 \end{cases}$$

に注意すれば

$$\|F(s_n^{-1})^{s_n}\xi - e^{-L_n}\xi\| \quad \le e^{-s_n}\|(I-F(s_n^{-1}))\xi\|\sum_{k=0}^{\infty}\frac{s_n^k}{k!}|k-s_n| + \|(I-F(s_n^{-1}))\xi\|.$$

Schwarz 不等式を使うと

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{s_n^k}{k!}|k-s_n| &\le \Big(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{s_n^k}{k!}\Big)^{1/2}\Big(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{s_n^k}{k!}(k-s_n)^2\Big)^{1/2} \\ &= e^{s_n/2}(s_n e^{s_n})^{1/2} = s_n^{1/2}e^{s_n}.\end{aligned}$$

ゆえに，任意の $\xi\in\mathcal{D}$ に対して

$$\begin{aligned}\|F(s_n^{-1})^{s_n}\xi - e^{-L_n}\xi\| &\le (s_n^{1/2}+1)\|(I-F(s_n^{-1}))\xi\| \\ &= \frac{s_n^{1/2}+1}{s_n}\|L_n\xi\| \to 0.\end{aligned}$$

$F(s_n^{-1})^{s_n}$ および e^{-L_n} が縮小作用素だから，結論を得る． ■

Banach 空間上で議論している [6] と違って，ここでは functional calculus が使えるので，次のステップは [6] よりずっと簡単である．

補題 3.5 $\text{s-}\lim_{n\to\infty} e^{-L_n} = e^{-L}$.

証明 まず $0\le (I+L_n)^{-1}\le I$, $0\le (I+L)^{-1}\le I$ に注意する．$\xi\in\mathcal{D}$ に対して $\eta=(I+L)\xi$ とすると

$$\begin{aligned}&\|(I+L_n)^{-1}\eta - (I+L)^{-1}\eta\| \\ &\quad = \|(I+L_n)^{-1}\{(I+L_n)\xi + (L-L_n)\xi\} - \xi\| \\ &\quad = \|(I+L_n)^{-1}(L-L_n)\xi\| \le \|(L-L_n)\xi\| \to 0.\end{aligned}$$

これより $(I+L_n)^{-1}\to(I+L)^{-1}$ (SOT). したがって，補題 2.7(1) の証明と同様にして functional calculus を適用すればよい． ■

定理 3.1 の証明 補題 3.4 と補題 3.5 より，$0<s_n\to\infty$ のとき $F(s_n^{-1})^{s_n}\to e^{-L}$. つまり

$$0<r_n\to 0 \ \text{のとき}\ \text{s-}\lim_{n\to\infty} F(r_n)^{1/r_n} = e^{-L}. \tag{3.4}$$

$t>0$ に対して，H, K を tH, tK で置き換えて，次が得られる：

$$\text{s-}\lim_{r\downarrow 0}(e^{-rtH}\,\sigma\, e^{-rtK})^{1/r} = e^{-tL}, \qquad t>0.$$

最後に，一様収束の主張は簡単に示せる．実際，$0<a<b$ とし，上の収束が $t\in[a,b]$ で一様でないとすると，$\xi\in\mathcal{H}$, $\varepsilon>0$, $r_n\downarrow 0$, および $t_n\in[a,b]$ が存在して

$$\|F(r_n t_n)^{1/r_n}\xi - e^{-t_n L}\xi\| \ge \varepsilon, \qquad n\in\mathbb{N}. \tag{3.5}$$

部分列を選んで，$t_n \to t$ としてよい．このとき，$\lambda \in [0,1]$ について一様に $\lambda^{t_n} \to \lambda^t$ だから，(3.4) より $F(r_n t_n)^{1/r_n} = (F(r_n t_n)^{1/r_n t_n})^{t_n} \to e^{-tL}$ (SOT). また $\|e^{-t_n L} - e^{-tL}\|_\infty \to 0$. したがって (3.5) と矛盾する．■

定理 2.8 が定理 2.1 と定理 3.1 から示せそうであるが，必ずしもそうではない．$A \mapsto \prod_{i=1}^n \mu_i(A)$ が SOT で下半連続であっても，連続ではないからである．

上述の結果を行列の場合に制限すると

系 3.6 任意のエルミート行列 H, K について

$$\frac{d}{dt} e^{tH}\,\sigma\, e^{tK}\Big|_{t=0} = (1-\alpha)H + \alpha K,$$

$$\lim_{t\to 0}(e^{tH}\,\sigma\, e^{tK})^{1/t} = e^{(1-\alpha)H+\alpha K},$$

$$\frac{d}{dt}\log(e^{tH}\,\sigma\, e^{tK})\Big|_{t=0} = (1-\alpha)H + \alpha K.$$

4 作用素平均の指数積に対するノルム不等式とノルム収束

次は定理 2.8 と定理 3.1 の系である．

系 4.1 作用素平均 σ が $\sigma \le \#_\alpha$ を満たすとする．つまり，対応する作用素単調関数 f が $f(x) \le x^\alpha,\ x \ge 0$, を満たすとする．$H, K$ が定理 3.1 と同じとすると，任意のユニタリー不変ノルム $\|\cdot\|$ について

$$\|(e^{-rH}\,\sigma\, e^{-rK})^{1/r}\| \le \|e^{-((1-\alpha)H+\alpha K)}\|, \qquad r > 0 \tag{4.1}$$

が成立する．さらに

$$\lim_{r\downarrow 0}\|(e^{-rH}\,\sigma\, e^{-rK})^{1/r}\| = \|e^{-((1-\alpha)H+\alpha K)}\|. \tag{4.2}$$

特に $\sigma = \#_\alpha$ とすると，(4.1) の左辺は $r \downarrow 0$ のとき $\|e^{-((1-\alpha)+\alpha K)}\|$ に単調増加する．

証明 仮定より $e^{-rH}\,\sigma\, e^{-rK} \le e^{-rH}\,\#_\alpha\, e^{-rK}$ だから，定理 2.8 より，任意の $r > 0$ に対して

$$\|(e^{-rH}\,\sigma\, e^{-rK})^{1/r}\| \le \|(e^{-rH}\,\#_\alpha\, e^{-rK})^{1/r}\| \le \|e^{-((1-\alpha)H+\alpha K)}\|.$$

他方，定理 3.1 とユニタリー不変ノルムの WOT での下半連続性から

$$\|e^{-((1-\alpha)H+\alpha K)}\| \le \liminf_{r\downarrow 0}\|(e^{-rH}\,\sigma\, e^{-rK})^{1/r}\|.$$

ゆえに (4.1) および (4.2) が示された．最後の主張は (2.2) より明らか．■

特に，σ が対称な作用素平均で $\sigma \le \#$ ならば，上のような H, K に対して

$$\|(e^{-2rH}\,\sigma\, e^{-2rK})^{1/r}\| \le \|e^{-(H+K)}\|, \qquad r > 0 \tag{4.3}$$

が成立し，左辺は $r \downarrow 0$ のとき $\|e^{-(H+K)}\|$ に収束する．例えば，σ が調和平均あるいは幾何平均のときは，(4.3) の左辺は $r \downarrow 0$ のとき単調増加する．(4.1) あるいは (4.3) のようなノルム不等式は，Golden-Thompson 型不等式の補完型とみなせる ([4, 16] 参照)．

注意 4.2 (1) $H = 0, K = xI$ $(x \in \mathbb{R})$ とおき，$\|\cdot\| = \|\cdot\|_\infty$ とすると，(4.1) は $r > 0$ に対して $f(e^{-rx}) \le e^{-\alpha r x}$ を意味する．つまり $\sigma \le \#_\alpha$. ゆえに，$\sigma \le \#_\alpha$ の仮定は系 4.1 で不可欠である．

(2) 不等式 (4.3) は一般の対称作用素平均に対しては成立しない．実際，$0 < p < \infty$ で $e^{-K} \in \mathcal{C}_p(\mathcal{H})$ とし，H が有界ならば，$e^{-(H+K)} \in \mathcal{C}_p(\mathcal{H})$ であるが，すべての $r > 0$ に対して $\|(e^{-2rH} \nabla e^{-2rK})^{1/r}\|_p = \infty$ となる．

(擬) ノルム $\|\cdot\|_p$ については，次が成立する．

命題 4.3 σ は系 4.1 と同じとし，$0 < \alpha < 1$ とする．H, K が下に半有界な自己共役作用素で $H + K$ が本質的自己共役とする ($H + K$ の閉包を同じ $H + K$ で表す)．$0 < p < \infty$ で $e^{-K} \in \mathcal{C}_p(\mathcal{H})$ ならば

$$\|(e^{-rH/(1-\alpha)}\,\sigma\, e^{-rK/\alpha})^{1/r}\|_p \le \|e^{-(H+K)}\|_p, \qquad r > 0.$$

証明 任意の $0 < p < \infty$ に対して

$$\|(e^{-rH/(1-\alpha)}\,\sigma\, e^{-rK/\alpha})^{1/r}\|_p = \|(e^{-rH/(1-\alpha)}\,\sigma\, e^{-rK/\alpha})^{p/r}\|_1^{1/p}$$

かつ $\|e^{-(H+K)}\|_p = \|e^{-p(H+K)}\|_1^{1/p}$ だから，$p = 1$ の場合を示せば十分である (H, K を pH, pK で置き換えればよい)．そこで $e^{-K} \in \mathcal{C}_1(\mathcal{H})$ とする．[14, Corollary 2.4] より $e^{-(H+K)} \in \mathcal{C}_1(\mathcal{H})$. いま $H_n = \int_a^n \lambda dE_H(\lambda)$ とすると，任意の $r > 0$ に対して，$e^{-rH/(1-\alpha)} \le e^{-rH_n/(1-\alpha)}$ と (4.1) より

$$\begin{aligned} \|(e^{-rH/(1-\alpha)}\,\sigma\, e^{-rK/\alpha})^{1/r}\|_1 &\le \|(e^{-rH_n/(1-\alpha)}\,\sigma\, e^{-rK/\alpha})^{1/r}\|_1 \\ &\le \|e^{-(H_n+K)}\|_1 \end{aligned}$$

ところで [14, Theorem 3.1] の証明の中で

$$\lim_{n\to\infty} \|e^{-(H_n+K)} - e^{-(H+K)}\|_1$$

が示されている．ゆえに結論が得られる． ■

以下，ノルム $\|\cdot\|$ が一様凸の場合，あるいは $\|\cdot\| = \|\cdot\|_p$ $(0 < p < \infty)$ の場合に，$r \downarrow 0$ のときの $(e^{-rH/(1-\alpha)}\sigma\, e^{-rK/\alpha})^{1/r}$ のノルム収束を議論しよう．

Banach 空間論では，ノルムに関する幾何学的な概念が重要である．例えば，Banach 空間 $\mathcal{X}$ が一様凸であるとは，任意の $\varepsilon > 0$ に対して $\delta > 0$ が存在して，$x, y \in \mathcal{X}$ が $\|x\| = \|y\| = 1$ かつ $\|x - y\| \ge \varepsilon$ ならば $\|(x + y)/2\| \le 1 - \delta$ となるときをいう．Hilbert 空間が一様凸 Banach 空間の典型的な例である．よく知られているように，一様凸 Banach 空間は回帰的であり，次の重要な性質をもつ：$\{x_j\} \subset \mathcal{X}$ が $x \in \mathcal{X}$ に弱収束し，かつ $\|x_j\| \to \|x\|$ ならば，$\|x_j - x\| \to 0$ と強収束する．

$1 < p < \infty$ のとき，$\mathcal{C}_p(\mathcal{H})$ の一様凸性は，Clarkson-McCarthy 不等式から導かれる．

いま Φ を対称ゲージ関数とし，その双対を Φ' とする．$\|\cdot\|$ が Φ に対応するユニタリー不変ノルムとする．$\mathcal{C}_\Phi(\mathcal{H})$ (すなわち $\|\cdot\|$) が一様凸と仮定しよう．$\mathcal{C}_\Phi(\mathcal{H})$ の回帰性から，Φ および Φ' が共に正規となり，$\mathcal{C}_\Phi(\mathcal{H})^* \cong \mathcal{C}_{\Phi'}(\mathcal{H})$ がいえる:

補題 4.4 $\mathcal{C}_\Phi(\mathcal{H})$ が一様凸とする．$\{A_j\} \subset \mathcal{C}_\Phi(\mathcal{H})$ が $\sup_j \|A_j\| < \infty$ かつ $A_j \to A$ (WOT) ならば，$\{A_j\}$ は A に $w(\mathcal{C}_\Phi(\mathcal{H}), \mathcal{C}_{\Phi'}(\mathcal{H}))$ の意味で弱収束する．

証明 まず，$\|\cdot\|$ の WOT での下半連続性より $A \in \mathcal{C}_\Phi(\mathcal{H})$ がいえる．上で注意したように Φ' が正規だから，$\mathcal{C}_{\mathrm{fin}}(\mathcal{H})$ が $\mathcal{C}_{\Phi'}(\mathcal{H})$ で稠密である．$\{A_j\}$ の WOT-収束から，任意の $B \in \mathcal{C}_{\mathrm{fin}}(\mathcal{H})$ に対して $\mathrm{tr}((A_j - A)B) \to 0$. $\{A_j\}$ が $\|\cdot\|$-有界だから，定理 1.5 より結論が得られる．■

系 4.5 σ は系 4.1 と同じとし $0 < \alpha < 1$ とする．また H, K は定理 3.1 と同じとする．ユニタリー不変ノルム $\|\cdot\|$ が一様凸であるとき，$e^{-K} \in \mathcal{C}_\Phi(\mathcal{H})$ ならば

$$\lim_{r \downarrow 0} \|(e^{-rH/(1-\alpha)} \,\sigma\, e^{-rK/\alpha})^{1/r} - e^{-(H+K)}\| = 0.$$

証明 (4.1) と [14, Corollary 2.4] より，$\{(e^{-rH/(1-\alpha)} \,\sigma\, e^{-rK/\alpha})^{1/r} : r > 0\}$ は $\mathcal{C}_\Phi(\mathcal{H})$ の $\|\cdot\|$-有界な部分集合である．よって定理 3.1 と補題 4.4 より，$r \downarrow 0$ のとき $(e^{-rH/(1-\alpha)} \,\sigma\, e^{-rK/\alpha})^{1/r}$ は $e^{-(H+K)}$ に $w(\mathcal{C}_\Phi(\mathcal{H}), \mathcal{C}_{\Phi'}(\mathcal{H}))$ で収束する．ゆえに，一様凸性と (4.2) から結論が従う．■

$\|\cdot\|_p$, $0 < p < \infty$, については，次が成立．

系 4.6 σ および H, K は上の系と同じとする．$0 < p < \infty$ で $e^{-K} \in \mathcal{C}_p(\mathcal{H})$ ならば

$$\lim_{r \downarrow 0} \|(e^{-rH/(1-\alpha)} \,\sigma\, e^{-rK/\alpha})^{1/r} - e^{-(H+K)}\|_p = 0.$$

証明 $1 < p < \infty$ の場合は系 4.5 に含まれている．$0 < p \le 1$ のとき，$2^k > 1/p$ となる $k \in \mathbb{N}$ を選ぶ．系 4.5 を $\|\cdot\|_{2^k p}$ と $2^{-k}H, 2^{-k}K$ に適用して

$$\lim_{r \downarrow 0} \|(e^{-rH/(1-\alpha)} \,\sigma\, e^{-rK/\alpha})^{1/2^k r} - e^{-(H+K)/2^k}\|_{2^k p} = 0. \tag{4.4}$$

任意の $q > 0$ について $\|X + Y\|_q \le 2^{1/q}(\|X\|_q + \|Y\|_q)$ (擬ノルム性) が成立することに注意して，Hölder 不等式を使うと

$$\begin{aligned}
&\|(e^{-rH/(1-\alpha)} \,\sigma\, e^{-rK/\alpha})^{1/2^{k-1} r} - e^{-(H+K)/2^{k-1}}\|_{2^{k-1} p} \\
&\le 2^{1/2^{k-1} p}\{\|(e^{-rH/(1-\alpha)} \,\sigma\, e^{-rK/\alpha})^{1/2^k r} \\
&\qquad \times [(e^{-rH/(1-\alpha)} \,\sigma\, e^{-rK/\alpha})^{1/2^k r} - e^{-(H+K)/2^k}]\|_{2^{k-1} p} \\
&\qquad + \|[(e^{-rH/(1-\alpha)} \,\sigma\, e^{-rK/\alpha})^{1/2^k r} - e^{-(H+K)/2^k}]e^{-(H+K)/2^k}\|_{2^{k-1} p}\} \\
&\le 2^{1/2^{k-1} p}\|(e^{-rH/(1-\alpha)} \,\sigma\, e^{-rK/\alpha})^{1/2^k r} - e^{-(H+K)/2^k}\|_{2^k p} \\
&\qquad \times \{\|(e^{-rH/(1-\alpha)} \,\sigma\, e^{-rK/\alpha})^{1/2^k r}\|_{2^k p} + \|e^{-(H+K)/2^k}\|_{2^k p}\}.
\end{aligned}$$

したがって，(4.4) と命題 4.3 より

$$\lim_{r \downarrow 0} \|(e^{-rH/(1-\alpha)} \,\sigma\, e^{-rK/\alpha})^{1/2^{k-1} r} - e^{-(H+K)/2^{k-1}}\|_{2^{k-1} p} = 0.$$

この議論をくり返すと，求める結論に至る．■

参考文献

[1] T. Ando, On some operator inequalities, *Math. Ann.* **279** (1987), 157–159.

[2] T. Ando, Majorization, doubly stochastic matrices and comparison of eigenvalues, *Linear Algebra Appl.* **118** (1989), 163–248.

[3] T. Ando, Majorizations and inequalities in matrix theory, *Linear Algebra Appl.* **199** (1994), 17–67.

[4] T. Ando and F. Hiai, Log-majorization and complementary Golden-Thompson type inequalities, *Linear Algebra Appl.* **197/198** (1994), 113–131.

[5] H. Araki, On an inequality of Lieb and Thirring, *Lett. Math. Phys.* **19** (1990), 167–170.

[6] P. R. Chernoff, Note on product formulas for operator semigroups, *J. Funct. Anal.* **2** (1968), 238–242.

[7] T. Fack, Sur la notion de valeur caractéristique, *J. Operator Theory* **7** (1982), 307–333.

[8] T. Fack and H. Kosaki, Generalized s-numbers of τ-measurable operators, *Pacific J. Math.* **123** (1986), 269–300.

[9] M. Fujii, T. Furuta, and E. Kamei, Furuta's inequality and its application to Ando's theorem, *Linear Algebra Appl.* **179** (1993), 161–169.

[10] T. Furuta, $A \geq B \geq 0$ assures $(B^r A^p B^r)^{1/q} \geq B^{(p+2r)/q}$ for $r \geq 0$, $p \geq 0$, $q \geq 1$ with $(1+2r)q \geq p+2r$, *Proc. Amer. Math. Soc.* **101** (1987), 85–88.

[11] T. Furuta, Applications of order preserving operator inequalities, *Operator Theory: Advances and Applications*, Vol. 59, Birkhäuser, Basel, 1992, pp. 180–190.

[12] T. Furuta, Extension of the Furuta inequality and log-majorization by Ando-Hiai, *Linear Algebra Appl.*, to appear.

[13] I. C. Gohberg and M. G. Krein, *Introduction to the Theory of Linear Nonselfadjoint Operators*, Trnansl. Math. Monographs, Vol. 18, Amer. Math. Soc., 1969.

[14] F. Hiai, Trace norm convergence of exponential product formula, *Lett. Math. Phys.*, to appear.

[15] F. Hiai, Log-majorizations and norm inequalities for exponential operators, preprint.

[16] F. Hiai and D. Petz, The Golden-Thompson trace inequality is complemented, *Linear Algebra Appl.* **181** (1993), 153–185.

[17] F. Kubo and T. Ando, Means of positive linear operators, *Math. Ann.* **246** (1980), 205–224.

[18] A. W. Marshall and I. Olkin, *Inequalities: Theory of Majorization and Its Applications*, Academic Press, New York, 1979.

[19] R. Schatten, *Norm Ideals of Completely Continuous Operators, Springer-Verlag*, Berlin-Heidelberg-New York, 1970.

[20] B. Simon, *Trace Ideals and Their Applications*, Cambridge U.P., Cambridge, 1979.