数理解析研究所講究録
903巻 1995年 70-77

条件付期待値とアダマール積

茨城大 工　　中本 律男 (Ritsuo Nakamoto)

1．最近、J.I.Fujii[4] は、行列の Hadamard 積に関する Tôyama-Marcus-Khan の定理（行列 A, B の Hadamard 積 $A * B$ はテンソル積 $A \otimes B$ の一つの principal submatrix で与えられる）について新しい見方を与えた：Hilbert 空間 H 上の（有界線形）作用素 A, B に対して、Hadamard 積を

(1) $$A * B = U^*(A \otimes B)U,$$

で定義した。ここで、U は H から $H \otimes H$ への isometry で、H の a fixed orthonormal basis $\{e_1, e_2, \cdots\}$ に対して、

(2) $$Ue_i = e_i \otimes e_i \quad (i = 1, 2, \cdots)$$

によって定義されるものである (cf. [10])。

この定義により、行列についての Aujla-Vasudeva[2] の定理が作用素に対しても可能であることを示した。

さて、T.Ando[1] は正値作用素の Hadamard 積について、多くの基本的な不等式を与えた。これらは von Neumann の diagonalization $E(A) = A * 1$ -H.Umegaki に

よって導入された条件付期待値-と密接な関連がある。この観点から Ando のいくつかの不等式において等号が成立する場合を考える。とりわけ、E が faithful であることが重要である。応用として、Styan[11] の一つの結果が作用素に拡張されることを示す。

2. J.von Neumann は H 上の作用素 A と projection P に対して、次の演算を導入した：

$$A^{|P} = PAP + (1-P)A(1-P), \tag{3}$$

これは、C.Davis[3] によって pinching と名付けられた。

J.von Neumann は [9;footnote 10] で証明を付けないで、projections $\{P_i; i = 1, 2, \cdots\}$ が maximal abelian subalgebra $\mathcal{D}$ を生成するとき、

$$E(A) = \lim_{n\to\infty} A^{|P_1|P_2\cdots|P_n} \tag{4}$$

が存在することを述べている。また、この $E(\cdot)$ は、maximal abelian subalgebra $\mathcal{D}$ のみに関係し、生成する projections には関係しない。これは Umegaki[13] によって証明され、$E(A)$ を conditional expectation conditioned by $\mathcal{D}$ と名付けられた。

H 上の作用素全体のなす algebra $B(H)$ は積として Hadamard 積をとれば可換な Banach algebra になる（ cf. Hadamard 積の inner characterization は [5] にある)。作用素 $A \in B(H)$ に対して、

$$E(A) = A * 1$$

と置けば、E は diagonal 作用素の全体からなる diagonal algebra $\mathcal{D}$ による条件付期待値になっている。それ故、E は $B(H)$ から $\mathcal{D}$ の上への unital positive linear *-

preserving faithful map になる。そこで、E は Kadison の意味で、次の Schwarz の不等式を満たす：

$$E(A^2) \geq E(A)^2 \text{ for selfadjoint operators } A \tag{5}$$

さらに、

$$E(A * B) = E(A)E(B) \text{ for all operators } A, B \tag{6}$$

を満足する。即ち、E は Hadamard 積を通常の積にかえる。

先ず、正値作用素 A が diagonal になる一つの条件を考える。

$$A^k = A * \cdots * A \quad (k \text{ times}) \tag{7.k}$$

なる条件が全ての k に対して満たされているとする。
このとき、$\chi_n(A) = (Ae_n, e_n)$ は A と 1 で生成された C^*-algebra $C^*(A)$ 上の character となり $A = \sum_n \chi_n(A)P_n$ を満たす。ここで、P_n は e_n で決まる projection である。従って、A は diagonal である。

しかし、上の条件 (7.k) は Kainuma-Kamei[7] によって次の簡単な条件で十分であることが示されている：

$$A^2 = A * A \tag{7}$$

次の定理は以下において基本的である。

定理１．正値作用素 A に対して、次のものは互いに同値である：

(i) $E(A)^2 = E(A^2)$

(ii) $A * A = A^2$

(iii) $A \in \mathcal{D}$

証明．(i) $\Rightarrow$ (iii) を示せば十分である。

Ando の不等式 $A * A \leq E(A^2)$ を使う。

$$\begin{aligned} E(E(A^2) - A * A) &= E(A^2) - E(A * A) \\ &= E(A^2) - E(A)^2 \\ &= E(A^2) - E(A)^2 = 0. \end{aligned}$$

従って、E は faithful なので、$A * A = E(A^2) \in \mathcal{D}$. このことにより、$A \in \mathcal{D}$ となる。

また、Kadison の不等式

$$E(A^{-1}) \geq E(A)^{-1}$$

において、等号が成立する場合として、

定理２．可逆な正値作用素 A に対して、次のものは互いに同値である：

(i) $E(A)^{-1} = E(A^{-1})$

(ii) $A * A^{-1} = 1$

(iii) $A \in \mathcal{D}$

3. Ando[1] は Hadamard 積について次の不等式をあたえた：

可逆な正値作用素 A , B に対して、

(9) $$\log A * B \geq (\log A + \log B) * 1$$

(10) $$A * A \geq 2(A * 1)(A * A^{-1} + 1)^{-1}(A * 1)$$

不等式 (9) は Fiedler の定理として知られている次の不等式を含んでいる：

(11) $$A * A^{-1} \geq 1$$

不等式 (11) で等号が成立する場合が定理 2 になっている。又、不等式 (10) についても、

定理 3 .

$$A * A = 2(A * 1)(A * A^{-1} + 1)^{-1}(A * 1) \iff A \in \mathcal{D}$$

証明. (10) で等号が成立していると、(11) によって $2(A * A^{-1} + 1)^{-1} \leq 1$ を満たすので、

$$A * A \leq (A * 1)^2 = E(A * A).$$

従って、$E(E(A * A) - A * A) = 0$ となり、$A * A \in \mathcal{D}$ で $A \in \mathcal{D}$ を満たす。

さらに、

定理 4 . 可逆な正値作用素 A , B に対して、

$$\log A * B = (\log A + \log B) * 1 \iff A, B \in \mathcal{D}$$

4．Hadamard 積と通常の積が一致する場合として、G.P.H.Styan[10] は、正定値行列 A, B が $A * B = AB$ を満たすのは $A, B \in \mathcal{D}$ のときに限ることを、行列式についての不等式を使って証明した。しかし、定理4を使うことによって、作用素に対しても成立する。

定理5．可逆な正値作用素 A，B に対して、

$$A * B = AB \iff A, B \in \mathcal{D}$$

証明. A, B 共に正値作用素のとき Shur の定理より $A*B \geq 0$ なので、$A*B = AB$ を満たせば、A と B は可換である。そこで、

$$\log(AB) = \log(A * B) \geq (\log A + \log B) * 1 = E(\log(AB))$$

従って、$\log(AB) \in \mathcal{D}$ となり、$A * B = AB \in \mathcal{D}$. これは定理4の条件を満たすので結論を得る。

定理5において、次の例が示すように、可逆の条件を除くこことはできない：$A = A_1 \oplus 1$ (A_1： 任意), $B = 0 \oplus 1$ とすると $A * B = AB = B$。

定理1に関連して、

定理6．A, B を可逆な正値作用素とする。このとき、

$$A * B = E(A^2)^{1/2} E(B^2)^{1/2} \iff A, B \in \mathcal{D}.$$

証明. 等式が成立しているとき、$A * B$ が diagonal となるので、

$$A * B = E(A * B) = E(A)E(B)$$

一般に、$E(A^2) \geq E(A)^2$ で、$t \to t^{1/2}$ は operator monotone なので、

$$E(A^2)^{1/2} \geq E(A) \text{ and } E(B^2)^{1/2} \geq E(B)$$

A, B は可逆なので、

$$E(A^2)^{1/2} = E(A), E(B^2)^{1/2} = E(B)$$

即ち、$A, B \in \mathcal{D}$.

定理 6 において、$A = B$ 以外では可逆の条件は必要である。

参考文献

[1] T.Ando, Concavity of certain maps on positive definite matrices and applications to Hadamard products, Linear Alg. Appl., 26(1979), 203-241.

[2] J.S.Aujla and H.L.Vasudeva, Inequalities involving Hadamard product and operator means, Math. Japonica, to appear.

[3] C.Davis, Notions generalizing convexity for functions defined on spaces of matrices, Proc. Symposia Pure Math., Convexity, 8, Amer. Math. Soc., Providence, 1963, 159-170.

[4] J.I.Fujii, The Marcus-Khan theorem for Hilbert space operators, Math. Japonica, to appear.

[5] M.Fujii and K.Kitamura, Theorems of Aujla and Vasudeva and Hadamard product, Math. Japonica, to appear.

[6] M.Fujii, R.Nakamoto and M.Nakamura, Conditional expectation and Hadamard product, Math. Japonica, to appear.

[7] D.Kainuma and E.Kamei, C^*-homomorphisms and operator means, Math. Japonica, 28(1983), 627-631.

[8] M.Marcus and N.A.Khan, A note on the Hadamard product, Canad. Math.Bull., 2(1959), 81-83.

[9] J.von Neumann, On rings of operators, III, Ann. Math., 41(1949), 94-161.

[10] V.I.Paulsen, Completely bounded maps and dilations, Pitman Research Notes in Math., 146, 1986.

[11] G.P.H.Styan, Hadamard products and multivariate statistical analysis, Linear Alg. Appl., 61973), 217-240.

[12] H.Toyama, Theory of Matrices(in Japanese), Kyoritsu-Schuppan, Tokyo, 1952.

[13] H.Umegaki, Conditional expectation in an operator algebra II, Tohoku Math. J., 8(1965), 86-100.