数理解析研究所講究録
905巻 1995年 26-29

波動作用素の L^p 有界性とその応用

東大数理科学研究科　谷島　賢二 (Kenji YAJIMA)

$H_0=-\Delta$ を自由 Schrödinger 作用素, $H=-\Delta+V(x)$ をポテンシャル $V(x)$ をもつ Schrödinger 作用素とし、$V(x)$ を十分なめらかで遠方において十分速く減少するものとする。この時、次で定義される波動作用素

$$W_{\pm}u=\lim_{t\to\pm\infty}e^{itH}e^{-itH_0}u, \qquad u\in L^2(\mathbf{R}^m) \tag{1}$$

は存在して完全である。即ち H の連続スペクトル部分空間を $L_c^2(H)$ とかく時

$$\text{Image } W_{\pm}=L_c^2(H) \tag{2}$$

となる。$W_{\pm}$ はもちろん等距離であるから、これからもちろん, $W_{\pm}^*W_{\pm}$ は L^2 の恒等作用素, $W_{\pm}W_{\pm}^*=P_c$, P_c は $L_c^2(H)$ への直交射影, であることがわかる。波動作用素は散乱理論において重要な働きをする作用素で、特に、いわゆる intertwining property $HW_{\pm}=W_{\pm}H_0$ によって $\mathbf{R}$ 上の任意の Borel 関数 f に対して

$$f(H)P_c=W_{\pm}f(H_0)W_{\pm}^* \tag{3}$$

となる。故に, $f(H_0)$ がもしある関数空間 X から Y への有界作用素であること知られている時、$W_{\pm}$ が Y 上, $W_{\pm}^*$ が X 上有界であれば $f(H)P_c$ も X から Y への有界作用素となることが知れる。

次の定理は V が急減少 $V\in\mathcal{S}(\mathbf{R}^m)$ であれば、$W_{\pm}$ は任意の Sobolev 空間上有界であることを示す。

定理 1 $m\geq 3$ とする。V を実数値急減少関数とし、$\mathbf{R}^m$ 上の微分方程式

$$-\Delta u+V(x)u=0, \qquad |u(x)|\leq C\langle x\rangle^{2-m} \tag{4}$$

の解は恒等的に零となるものに限るとする。この時 (1) で定義された $W_{\pm}$ は任意の $1 \leq p \leq \infty$，$k \in \mathbf{Z}$ に対して *Sobolev* 空間 $W^{k,p}(\mathbf{R}^m)$ 上有界である。

注意 1 (4) の *non-tvival* な解 u が存在し、$u \in L^2$ の時、0 は H の固有値である。$u \notin L^2$ であれば、0 は H の *resonance* と呼ばれる。勿論 $m \geq 5$ であればつねに $u \in L^2$ である。

$H_0 = -\Delta$ に対しては $f(H_0)$ は Fourier 変換によって

$$f(H_0)u(x) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int e^{ix\xi}f(\xi^2)\hat{u}(\xi)d\xi$$

と計算され $f(\xi^2)$ の逆 Fourier 変換の性質を用いて，多くの関数 f に対して $f(H_0)$ の種々の Sobolev 空間の間の有界性が知られている。例えば

$$i\partial u/\partial t = H_0 u$$

の基本解 e^{itH_0} は積分核 $(4\pi i|t|)^{-n/2}e^{-i(x-y)^2/4t}$ をもち

$$\|e^{-itH_0}u\|_{L^p} \leq (4\pi|t|)^{-n(1/2-1/p)}\|u\|_{L^q}$$

となる。但し $1/p + 1/q = 1$ である。従って (3) を用いれば定理 1 をみたす V をもつ Schrödinger 作用素に対して，同様な評価式

$$\| e^{-itH}P_c u \|_{L^p} \leq C|t|^{-n(1/2-1/p)} \| u \|_{L^q}$$

が成立することが直ちに従うことになる。他に、例えばポテンシャルをもつ波動方程式の初期値問題

$$\partial^2 u/\partial t^2 - \Delta u + V(x)u = 0,$$

$$u(0,x) = \varphi(x), \qquad u_t(0,x) = \psi(x) \tag{5}$$

の解は、$\varphi, \psi \in L^2_c(H)$ の時、

$$u(t,x) = (\cos t\sqrt{H})\varphi + \frac{\sin t\sqrt{H}}{\sqrt{H}}\psi$$

で得られることから、Brenner や Pecher 、あるいは Strichartz らによって得られた自由波動方程式に対する L^p 的あるいは Sobolev 的な評価式はすべて (5) に対しても同様に成立することもわかる。

さらに $W_\pm$ の有界性は$-\Delta + V(x)$ の一般化固有関数展開の実数論的な性質を導くためにも応用できる。固有方程式

$$-\Delta u(x) + V(x)u(x) = k^2 u(x), \qquad k \in \mathbf{R}^m$$

には $|x| \to \infty$ において

$$\varphi_\pm(x,k) \sim e^{ikx} + \frac{e^{\pm i|k||x|}}{|x|^{(m-1)/2}}\left(f_\pm(\hat{x},k) + O\left(\frac{1}{|x|}\right)\right)$$

の様に振る舞う解が一意的に存在する。但し$\hat{x} = |x|^{-1}x$ である。この時、$\varphi_\pm(x,k)$ は H の連続スペクトル部分 H_c の完全固有関数系をなし，次で定義される一般化 Fourier 変換

$$\mathcal{F}_\pm u(k) = \frac{1}{(2\pi)^{m/2}} \int \overline{\varphi_\pm(x,k)} u(x) dx$$

は $L^2_c(H)$ から $L^2(\mathbf{R}^m)$ への unitary 作用素、従って任意の実数 $u \in L^2(H)$ は

$$u(x) = \frac{1}{(2\pi)^{m/2}} \int \varphi_\pm(x,k)\mathcal{F}_\pm u(k) dk$$

と展開することができる。実は $\mathcal{F}_0$ を通常の Fourier 変換とする時 $W_\pm = \mathcal{F}^*_\pm \mathcal{F}_0$, 従って

$$\mathcal{F}_\pm = \mathcal{F}_0 W^*_\pm$$

となる。これから $\mathcal{F}_{pm}$ の様々な実関数的な性質、例えば様々な Fourier multiplier に対する評価式が，通常の Fourier multiplier に対する評価式から得られることになる。

定理1のもっと一般な形の証明と応用の詳細，及び文献との関連については以下の文献をみて頂きたい。

参考文献

[1] K. Yajima, *The $W^{k,P}$-continuity of wave operators for Schrödinger operators*, to appear in J.Math.Soc.Japan.

[2] K. Yajima, *The $W^{k,P}$-continuity of wave operators for Schrödinger operators II, Positive potential in even dimensions $m \geq 4$*, in Lecture Notes in Pure and Appl.Math.161, *Spectral and Scattering Theory*, ed. M. Ikawa, Marcel Dekker, New York (1994), 287-300

[3] K. Yajima, *The $W^{k,P}$-continuity of wave operators for Schrödinger operators III, Even dimensional cases $m \geq 4$*, to appear in J.Math.Sci.Univ.Tokyo.