数理解析研究所講究録
906巻 1995年 178-185

ブール処理のパズルへの応用

茨城大教養　仙波一郎 (Ichiro Semba)

0. はじめに

最近、二分決定グラフ(BDD)のいろいろな分野への応用が行なわれてきている[1,2]。本論文では、パズルに関係する種々の問題を論理関数で表現し、二分決定グラフ(BDD)を構成して解を求めた。この解法は、従来行なわれてきたバックトラックによる解法とは異なるものである。計算機実験は、Sun SPARC Server 10(160MB)を使い、二分決定グラフの最大節点数を400万として行なった。
1.順列生成で、この解法の概略を説明する。2.部分集合関連問題、3.総当たり問題、4.石配置問題、5.エレベータ問題で、具体的なパズルにこの解法を適用した結果を示す。

1. 順列生成

階乗進数と集合{1,2,...,n}上のn個の要素からなる順列の間の1対1対応を利用して、順列を効率よく生成する。

整数m(≧0)は、つぎのような形(階乗展開)に一意的に表される。

$$m = a_1\times 0! + a_2\times 1! + \ldots + a_i\times (i-1)! + \ldots \quad (0\leqq a_i\leqq i-1, i=1,2,\ldots)$$

階乗進数$a_1a_2\ldots a_n$と順列$p_1p_2\ldots p_n$の間の1対1対応。

・階乗進数$a_1a_2a_3a_4$(0102)から順列$p_1p_2p_3p_4$(3142)の構成。

数列 1 2 3 4 に対して、a_4+1(=3)番目の数字を取り出し、p_1(=3)とする。
数列 1 2 4 に対して、a_3+1(=1)番目の数字を取り出し、p_2(=1)とする。
数列 2 4 に対して、a_2+1(=2)番目の数字を取り出し、p_3(=4)とする。
数列 2 に対して、a_1+1(=1)番目の数字を取り出し、p_4(=2)とする。

・順列$p_1p_2p_3p_4$(3142)から階乗進数$a_1a_2a_3a_4$(0102)の構成。

p_1(=3)は、数列 1 2 3 4 の3番目であるから、a_4=3-1=2とする。
p_2(=1)は、数列 1 2 4 の1番目であるから、a_3=1-1=0とする。
p_3(=4)は、数列 2 4 の2番目であるから、a_2=2-1=1とする。
p_4(=2)は、数列 2 の1番目であるから、a_1=1-1=0とする。

階乗進数と順列の対応。

n	階乗進数 $a_1a_2a_3a_4$	順列 $p_1p_2p_3p_4$	n	階乗進数 $a_1a_2a_3a_4$	順列 $p_1p_2p_3p_4$	n	階乗進数 $a_1a_2a_3a_4$	順列 $p_1p_2p_3p_4$
0:	0 0 0 0	1 2 3 4	8:	0 0 1 1	2 3 1 4	16:	0 0 2 2	3 4 1 2
1:	0 1 0 0	1 2 4 3	9:	0 1 1 1	2 3 4 1	17:	0 1 2 2	3 4 2 1
2:	0 0 1 0	1 3 2 4	10:	0 0 2 1	2 4 1 3	18:	0 0 0 3	4 1 2 3
3:	0 1 1 0	1 3 4 2	11:	0 1 2 1	2 4 3 1	19:	0 1 0 3	4 1 3 2
4:	0 0 2 0	1 4 2 3	12:	0 0 0 2	3 1 2 4	20:	0 0 1 3	4 2 1 3
5:	0 1 2 0	1 4 3 2	13:	0 1 0 2	3 1 4 2	21:	0 1 1 3	4 2 3 1
6:	0 0 0 1	2 1 3 4	14:	0 0 1 2	3 2 1 4	22:	0 0 2 3	4 3 1 2
7:	0 1 0 1	2 1 4 3	15:	0 1 1 2	3 2 4 1	23:	0 1 2 3	4 3 2 1

[論理変数]

$a_i(1 \leqq i \leqq n)$に対して、つぎのように論理変数$x_{i,j}$を定義する。

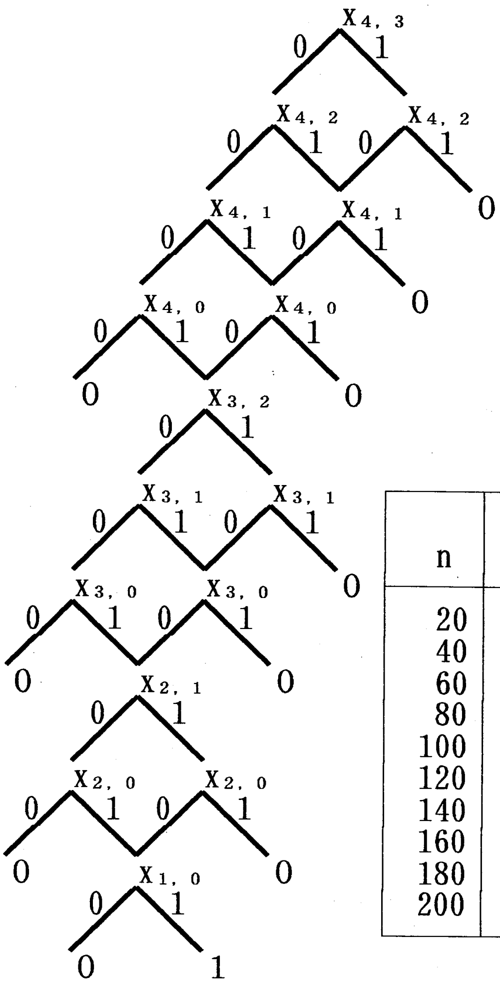
$$x_{i,j} = \begin{cases} 1, & a_i\text{の値が}j\text{の場合。} \\ 0, & a_i\text{の値が}j\text{でない場合。} \end{cases}$$

$x_{i,j}$	0 1 ... n-1
a_1	□
a_2	□ □
	・・・
a_n	□ □ ... □

[論理関数] 10進数の0から23に対応する階乗進数を表現する論理関数P(4)。

$$\begin{aligned} P(4) = {} & (x_{1,0}) \\ & \cdot(x_{2,0}\bar{x}_{2,1}+\bar{x}_{2,0}x_{2,1}) \\ & \cdot(x_{3,0}\bar{x}_{3,1}\bar{x}_{3,2}+\bar{x}_{3,0}x_{3,1}\bar{x}_{3,2}+\bar{x}_{3,0}\bar{x}_{3,1}x_{3,2}) \\ & \cdot(x_{4,0}\bar{x}_{4,1}\bar{x}_{4,2}\bar{x}_{4,3}+\bar{x}_{4,0}x_{4,1}\bar{x}_{4,2}\bar{x}_{4,3}+\bar{x}_{4,0}\bar{x}_{4,1}x_{4,2}\bar{x}_{4,3} \\ & \quad +\bar{x}_{4,0}\bar{x}_{4,1}\bar{x}_{4,2}x_{4,3}) \end{aligned}$$

[二分決定グラフ] 論理関数P(4)に対応する二分決定グラフ。



二分決定グラフの根$(x_{4,3})$から葉(1)への経路が階乗進数に対応する。

階乗進数$a_1a_2a_3a_4$(0102)に対応する経路

$$x_{4,3}\xrightarrow{0}x_{4,2}\xrightarrow{1}x_{4,1}\xrightarrow{0}x_{4,0}\xrightarrow{0}x_{3,2}\xrightarrow{0}$$

$$x_{3,1}\xrightarrow{0}x_{3,0}\xrightarrow{1}x_{2,1}\xrightarrow{1}x_{2,0}\xrightarrow{0}x_{1,0}\xrightarrow{1}1$$

$x_{4,2}$から$x_{4,1}$へ1とラベルづけされた辺を通るので、a_4=2とする。$x_{3,0}$から$x_{2,1}$へ1とラベルづけされた辺を通るので、a_3=0とする。他も同様。

[実験結果]

n	論理変数の数	順列の数(n!)	節点数	所要時間
20	210	0.24329×10^{19}	400	2.8
40	820	0.81591×10^{48}	1600	3.0
60	1830	0.83209×10^{82}	3500	3.2
80	3240	0.71569×10^{119}	6400	3.2
100	5050	0.93326×10^{158}	10000	3.3
120	7200	0.66895×10^{199}	14400	3.4
140	9870	0.13462×10^{242}	19600	3.7
160	12880	0.47147×10^{285}	25600	4.1
180	16290	0.20089×10^{330}	32400	4.1
200	20100	0.78865×10^{375}	40000	4.4

所要時間は対応する二分決定グラフを構成するのに要する時間（単位は秒）。

定理

集合{1,2,...,n}上のn個の要素からなるn!個の順列を表現する二分決定グラフを構成するのに必要な節点数は、葉０，１を含めてn^2+2 以下である。

[応用] スタック順列（順列$p_1p_2...p_n$で、部分列$p_ip_jp_k$($p_j<p_k<p_i$, $1\leqq i<j<k\leqq n$)を含まないもの）をすべて生成する問題。

対応する階乗進数（$a_1a_2...a_n$）は、$a_i - a_{i-1} \leqq 1$ ($3\leqq i\leqq n$)を満たす。
n個の要素からなるスタック順列の総数は、カタラン数（${}_{2n}C_n/(n+1)$）であることが知られている。nの値を枠で囲んだものがスタック順列である。

n	階乗進数 $a_1a_2a_3a_4$	順列 $p_1p_2p_3p_4$	n	階乗進数 $a_1a_2a_3a_4$	順列 $p_1p_2p_3p_4$	n	階乗進数 $a_1a_2a_3a_4$	順列 $p_1p_2p_3p_4$
$\boxed{0}$	0 0 0 0	1 2 3 4	$\boxed{8}$	0 0 1 1	2 3 1 4	16	0 0 2 2	3 4 1 2
$\boxed{1}$	0 1 0 0	1 2 4 3	$\boxed{9}$	0 1 1 1	2 3 4 1	$\boxed{17}$	0 1 2 2	3 4 2 1
$\boxed{2}$	0 0 1 0	1 3 2 4	10	0 0 2 1	2 4 1 3	18	0 0 0 3	4 1 2 3
$\boxed{3}$	0 1 1 0	1 3 4 2	$\boxed{11}$	0 1 2 1	2 4 3 1	19	0 1 0 3	4 1 3 2
4	0 0 2 0	1 4 2 3	12	0 0 0 2	3 1 2 4	20	0 0 1 3	4 2 1 3
$\boxed{5}$	0 1 2 0	1 4 3 2	13	0 1 0 2	3 1 4 2	21	0 1 1 3	4 2 3 1
$\boxed{6}$	0 0 0 1	2 1 3 4	$\boxed{14}$	0 0 1 2	3 2 1 4	22	0 0 2 3	4 3 1 2
$\boxed{7}$	0 1 0 1	2 1 4 3	$\boxed{15}$	0 1 1 2	3 2 4 1	$\boxed{23}$	0 1 2 3	4 3 2 1

n	総数	節点数	所要時間（秒）
20	0.65641×10^{10}	2680	3.1
40	0.26221×10^{22}	21360	4.9
80	0.11363×10^{46}	170720	30.6
160	0.59128×10^{93}	1365440	573.4

2． 部分集合関連問題

問題２．１：集合{1,2,...,n}のr個の数からなる部分集合{$a_1,a_2,...,a_r$}で、その中のどの数も、他の数を割り切ることはないようなものを考える。rの最大値とそのような部分集合の個数を求めよ。［問題K8,3］
[例] n=50の場合、r=25となり、部分集合
{8,12,14,17,18,19,20,21,22,23,25,26,27,29,30,31,33,35,37,39,41,43,45,47,49}が条件を満たす。

n	r	総数	節点数	n	r	総数	節点数	n	r	総数	節点数
5	3	2	7	35	18	120	815	69	35	9888	66649
10	5	4	22	40	20	264	1918	70	35	19776	116568
15	8	6	38	45	23	312	2497	71	36	19776	116569
20	10	26	149	50	25	1632	10400	72	36	24384	163672
25	13	34	219	55	28	2208	14117	73	37	24384	163673
30	15	72	496	60	30	5056	32801	74	*	*	*

問題２．２：集合{1,2,...,n}のr個の数からなる部分集合{$a_1,a_2,...,a_r$}で、その中のどの数も、高々他の1個の数を割り切るようなものを考える。rの最大値とそのような部分集合の個数を求めよ。［問題B24,4］
[例] n=30の場合、r=21となり、部分集合
{6,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,19,20,21,22,23,25,26,27,28,29}
が条件を満たす。

n	r	総数	節点数	n	r	総数	節点数	n	r	総数	節点数
5	4	1	5	35	24	39	255	70	47	2187	5477
10	7	3	16	40	27	45	282	80	54	1215	3960
15	10	11	50	45	30	171	875	90	61	405	2298
20	14	3	32	50	34	153	784	100	68	675	4246
25	17	15	99	55	38	27	252	101	69	675	4247
30	21	1	30	60	41	27	274	102	*	*	*

問題２．３：集合$\{1,2,...,n\}$のr個の数からなる部分集合$\{a_1,a_2,...,a_r\}$で、その中のどの数も他の数の2倍に等しくないものを考える。rの最大値とそのような部分集合の個数を求めよ。［問題71,5］

［例］ n=30の場合、r=20となり、部分集合
{1,4,5,6,7,16,17,18,19,20,21,22,23,24,25,26,27,28,29,30}
が条件を満たす。

n	r	総数	節点数	n	r	総数	節点数	n	r	総数	節点数
5	4	1	5	35	23	384	793	65	44	2304	8452
10	6	12	32	40	26	1152	1888	70	47	4608	15297
15	10	12	41	45	30	1152	1979	75	50	27648	44718
20	14	4	41	50	33	1536	3168	80	54	9216	36109
25	17	24	136	55	37	1536	3769	85	58	9216	43518
30	20	48	263	60	40	4608	7854	86	*	*	*

問題２．４：集合$\{1,2,...,n\}$のr個の数からなる部分集合$\{a_1,a_2,...,a_r\}$で、どの a_i+a_j $(i<j)$も平方数とならないようなものを考える。rの最大値とそのような部分集合の個数を求めよ。［問題E8,4］

［例］ n=40の場合、r=19となり、部分集合
{3,5,8,10,12,14,16,18,19,21,23,25,27,29,32,34,36,38,40}
が条件を満たす。

n	r	総数	節点数	n	r	総数	節点数	n	r	総数	節点数
5	3	4	7	35	16	3	92	57	24	28	768
10	6	2	11	40	19	1	40	58	25	6	223
15	8	1	15	45	20	6	194	59	25	19	564
20	10	11	89	50	21	12	283	60	26	4	154
25	12	9	125	55	23	28	764	61	*	*	*
30	14	18	220	56	24	6	221				

問題２．５：**（加法鎖）** 集合$\{1,2,...,n\}$のr+1個の数からなる部分集合$\{a_0(=1), a_1,a_2,...,a_r(=n)\}$で、各数$a_k$がその前の2個（必ずしも相異ならなくてもよい）の数の和$(a_k=a_i+a_j, 1\leqq k\leqq r, 0\leqq i\leqq j\leqq k-1)$になるものを考える。rの最小値とそのような部分集合の個数を求めよ。［問題C6,4］

［例］ n=99の場合、r=8となり、部分集合
{1,2,3,6,12,24,48,51,99},{1,2,3,6,12,24,48,96,99},
{1,2,4,8,16,17,33,66,99},{1,2,4,8,16,32,33,66,99}
が条件を満たす。

n	r	総数	節点数	n	r	総数	節点数	n	r	総数	節点数
10	4	4	15	70	8	134	684	400	10	126	2541
20	5	6	33	80	7	10	141	500	11	368	3446
30	6	12	77	90	8	48	375	600	11	488	5582
40	6	8	69	100	8	62	549	*	*	*	*
50	7	36	217	200	9	92	1213				
60	7	24	183	300	10	264	2558				

問題２．６：集合{1,2,...,n}のr個の数からなる部分集合{$a_1, a_2, ..., a_r$}で、どの a_i+a_j (i<j)もすべて異なるものを考える。rの最大値とそのような部分集合の個数を求めよ。［問題C9,4]

［例］n=25の場合、r=8となり、部分集合
{1,2,3,5,9,15,20,25}，{1,6,11,17,21,23,24,25}が条件を満たす。

n	r	総数	節点数	n	r	総数	節点数	n	r	総数	節点数
5	4	2	7	25	8	2	47	37	9	84	1115
10	5	40	75	30	8	632	3166	38	9	246	2766
15	6	92	237	35	9	6	159	39	9	664	5851
20	7	18	180	36	9	24	450	40	*	*	*

問題２．７：（メイトリックス博士の定規）集合{1,2,...,n}のr個の数からなる部分集合 {$a_1, a_2, ..., a_r$(=n)}で、{a_j-a_i|1≦i<j≦r}={1,2,...,n}を満たすものを考える。rの最小値とそのような部分集合の個数を求めよ。[9]

［例］n=36の場合、r=9となり、部分集合
{1,3,6,13,20,27,31,35,36},{1,5,9,16,23,30,33,35,36}が条件を満たす。

n	r	総数	節点数	n	r	総数	節点数	n	r	総数	節点数
5	4	4	9	35	9	6	159	46	11	684	11251
10	5	38	68	40	10	100	2052	47	11	238	5082
15	6	80	226	42	10	4	155	48	11	68	1865
20	7	150	587	43	10	2	80	49	11	22	767
25	8	460	1857	44	11	4892	40230	50	11	4	187
30	9	2036	7499	45	11	2114	22920	51	*	*	*

問題２．８：（ゴーロムの定規）集合{1,2,...,n}のr個の数からなる部分集合{$a_1, a_2, ..., a_r$(=n)}で、a_j-a_i(1≦i<j≦r)が相異なるものを考える。rの最大値とそのような部分集合の個数を求めよ。［9]

［例］n=34の場合、r=7となり、部分集合
{1,4,9,15,22,32,34},{2,12,19,25,30,33,34}が条件を満たす。

n	r	総数	節点数	n	r	総数	節点数	n	r	総数	節点数
5	2	4	7	31	6	858	2846	37	7	96	1298
10	3	16	35	32	6	1310	3668	38	7	182	1989
15	4	76	147	33	6	2096	4988	39	7	384	3293
20	5	70	248	34	7	2	65	40	7	758	5253
25	6	10	161	35	7	18	323	41	7	1526	8577
30	6	380	1704	36	7	28	559	42	*	*	*

問題２．９：（整数分割） 集合{1,2,...,n}のr(1≦r≦n)個の数からなる部分集合{$a_1,a_2,...,a_r$(=n)}で、$a_2-a_1 \leqq a_3-a_2 \leqq ... \leqq a_r-a_{r-1}$を満たすものを求めよ。

n	総数	節点数	n	総数	節点数
10	42	80	60	966467	8328
20	627	422	70	4087968	12920
30	5604	1222	80	15796476	18936
40	37338	2680	90	56634173	26572
50	204226	4986	100	190569292	36046

部分集合{1,3,6,9,16}は、整数16の分割 1+2+3+3+7に対応する。
16 - 9 = 7
9 - 6 = 3
6 - 3 = 3
3 - 1 = 2
1

３．総当たり問題

問題３．１：（カークマンの女生徒問題）：9人の女生徒 a,b,c,d,e,f,g,h,iが、3人ずつの3組に分かれて通学している。4日間でどの女生徒も他のすべての人と１度ずつ同じ組に入る方法がある。その方法をすべて求めよ。ただし、第１組は列方向に、各日は行方向に辞書式順序であるとする。［第82問,6］

	第１組	第２組	第３組
１日目	a b f	c d i	e g h
２日目	a c g	b d e	f h i
３日目	a d h	b i g	c e f
４日目	a e i	b c h	d f g

生徒	人数	組	日数	総数	節点数
9	3	3	4	840	34987
15	3	5	7	*	*

問題３．２：（リーグ戦） 2n人の選手$p_1,p_2,...,p_{2n}$がテニスのリーグ戦をするときの組合せをすべて求めよ。ただし、第１組は列方向に辞書式順序、各回戦は行方向に辞書式順序であるとする。［第51問,6］

	第１組	第２組
１回戦	p_1-p_2	p_3-p_4
２回戦	p_1-p_3	p_2-p_4
３回戦	p_1-p_4	p_2-p_3

2n	総数	節点数
4	1	24
6	6	375
8	6240	81463
10	*	*

問題３．３：（ダンスの組み方） n人の男性$a_1,a_2,...,a_n$とn人の女性$b_1,b_2,...,b_n$がパートナーを組んでダンスをする。各男性・女性は全部でm回踊るが、それぞれ好みがあり、男性a_iと女性b_jは$f_{i,j}$(≧0)回踊るものとする。全員の希望をかなえるパートナーの組み方をすべて求めよ。［10］
ただし、$f_{i,1}+f_{i,2}+...+f_{i,n}=m$ (1≦i≦n), $f_{1,j}+f_{2,j}+...+f_{n,j}=m$ (1≦j≦n)

$f_{i,j}$	b_1	b_2	b_3
a_1	2	0	2
a_2	1	1	2
a_3	1	3	0

回	ダンスの組み方
1	a_1-b_1 a_2-b_3 a_3-b_2
2	a_1-b_1 a_2-b_3 a_3-b_2
3	a_1-b_3 a_2-b_3 a_3-b_2
4	a_1-b_3 a_2-b_2 a_3-b_1

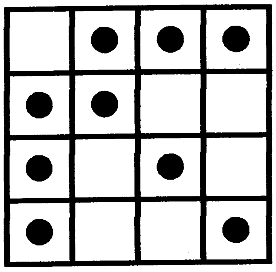
n	m	総数	節点数
2	2	2	14
3	3	12	178
4	4	576	4662
5	5	161280	361320
6	6	*	*

$f_{i,j}=1$ (1≦i≦n,1≦j≦n)

4. 石配置問題

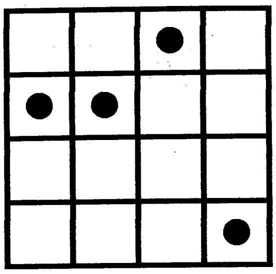
問題4.1：m×nの盤上のマス目にk個の石を置く。どの4個のマス目を選んでも長方形(辺は縦方向、横方向のみ)を作らないkの最大値を求めよ。［問題84,7］

4X4の場合、k=9。



m	n	k	節点数	m	n	k	節点数
5	2	6	24	5	4	10	861
10	2	11	54	10	4	16	2866
15	2	16	84	15	4	21	5971
20	2	21	114	20	4	26	9076
5	3	8	114	5	5	12	4127
10	3	13	349	10	5	20	11470
15	3	18	584	15	5	25	85075
20	3	23	819	20	5	30	159640

問題4.2：m×nの盤上にk個の石を置く。どの2個の石の間も異なる距離となるような置き方を考える。kの最大値と、その置き方の総数を求めよ。［8］



4×4の場合。

m	n	k	総数	節点数	m	n	k	総数	節点数
1	5	3	6	11	2	19	8	52	1126
1	10	4	60	81	3	11	6	8096	17598
1	15	5	156	294	4	8	6	940	4136
1	20	6	80	357	5	6	5	2780	6265
1	25	6	3380	4623					
1	30	7	760	3370					

5. エレベータ問題

m階建てのビルにn台のエレベータがあり、どのエレベータもr回停止する。どの2つの階も乗り換えなしで移動できるようにするには最低何台のエレベータがあればよいか、nの最小値とその方法の総数を求めよ。ただし、1階とm階は停止するものとし、エレベータの並び方は考慮しないとする。[11]

8階	□	□	□
7階	■	□	□
6階	■	□	□
5階	□	■	□
4階	□	■	□
3階	□	□	■
2階	□	□	■
1階	□	□	□

□は停止階、■は通過階。

r \ m	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
4	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	66
5	-	1	3	4	6	7	11	*	*	*	*
6	-	-	1	3	3	5	6	*	*	*	*
7	-	-	-	1	3	3	4	5	*	*	*
8	-	-	-	-	1	3	3	3	4	*	*
9	-	-	-	-	-	1	3	3	3	4	*
10	-	-	-	-	-	-	1	3	3	3	3
11	-	-	-	-	-	-	-	1	3	3	3
12	-	-	-	-	-	-	-	-	1	3	3
13	-	-	-	-	-	-	-	-	-	1	3
14	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	1

nの最小値。

r＼m	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
4	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
5	-	1	4	10	30	30	80640	*	*	*	*
6	-	-	1	10	15	1715	4725	*	*	*	*
7	-	-	-	1	20	105	1680	3780	*	*	*
8	-	-	-	-	1	35	420	280	3150	*	*
9	-	-	-	-	-	1	56	1260	2800	311850	*
10	-	-	-	-	-	-	1	84	3150	15400	5775
11	-	-	-	-	-	-	-	1	120	6930	61600
12	-	-	-	-	-	-	-	-	1	165	13860
13	-	-	-	-	-	-	-	-	-	1	220
14	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	1

nが最小値をとるとき、エレベータの停止方法の総数。

６． まとめ

パズルに関する問題を論理関数で表現し、二分決定グラフを構成して解を求めた。この解法は，従来パズルを解くのに使われてきたバックトラック技法とは異なる。短期間にすべての解を求める場合に有用な一般的な解法である。

謝辞

ＢＤＤパッケージの利用を許可していただいた平石教授、湊氏に感謝いたします。有益なご助言をいただく矢島教授に感謝いたします。

参考文献

[１] I.Semba,"Combinatorial Algorithms Using Boolean Processing", doctoral thesis, 1994

[２] I.Semba, S.Yajima,"Combinatorial Algorithms Using Boolean Processing", Trans. IPSJ, Vol.35, No.9, pp.1661-1673, 1994.

[３] Ｓ．エインリ著,高木茂男訳,「数学パズル」,培風館, 1981

[４] リチャード・ガイ著,一松信監訳,「数論における未解決問題集」, シュプリンガー・フェアラーク東京,1983

[５] ドナルド・Ｊ・ニューマン著,一松信訳,「数学問題ゼミナール」, シュプリンガー・フェアラーク東京,1985

[６] 中村義作,「スーパー・パズル」,講談社,1986

[７] 中村義作,「数学パズル・２０の解法」,講談社,1991

[８] 中村義作,小林茂太郎,西山輝夫,「続・数理パズル」,中央公論社,1977

[９] マーチン・ガードナー著,一松信訳,「アリストテレスの輪と確率の錯覚」,日経サイエンス社,1993

[１０] 野口広,釜江慶子,「グラフ理論」,筑摩書房,1974

[１１] 藤村幸三郎,松田道雄著,「数学アイディアパズル」,講談社,1982