数理解析研究所講究録
907 巻 1995 年 112-122

法指数写像の単射半径に関するある不等式について

横浜市立大学文理学部　市田 良輔　(Ryosuke Ichida)

1　はじめに

M を m 次元 $(m \geq 3)$ 連結，コンパクト，非単連結リーマン多様体で，そのすべての断面曲率 K_M が条件 $K_M \geq 1$ を満たすとする．N を M に埋め込まれた n 次元 $(n \geq 1)$ 連結，コンパクト部分多様体とする．法指数写像 $Exp_N : \nu(N) \to M$ の単射半径を $i(N)$ で表す．ここに $\nu(N)$ は M における N 上の法バンドルの全空間である．$i(N)$ は次で定義される:

$$i(N) = \sup\{\ r > 0; Exp_N : \nu_r(N) \to M\ \text{は単射}\ \}.$$

ここに $\nu_r(N)$ は長さが r より小さい M における N の法ベクトルの全体のなす集合を表す．

Grove-Shiohama ([8]) による直径球面定理から M の直径 $d(M)$ について，

$$d(M) \leq \frac{\pi}{2}$$

が成立する．Gromoll-Grove ([6]) の結果から，上の不等式において等号が成立すれば M は定曲率 1 の空間型に等長であるか，断面曲率が $1 \leq K \leq 4$ となる複素奇数次元の複素射影空間 $P^{2k-1}(\mathbf{C})$ $(m = 4k-2)$ のある商空間 $\bar{M}$ に等長である．ここに，$\bar{M}$ は対合

$$\varphi : P^{2k-1}(\mathbf{C}) \to P^{2k-1}(\mathbf{C})([z_1, \ldots, z_k, z_{k+1}, \ldots, z_{2k}] \to [\bar{z}_{k+1}, \ldots, \bar{z}_{2k}, -\bar{z}_1, \ldots, -\bar{z}_k])$$

による $P^{2k-1}(\mathbf{C})$ の商空間である．

$i(N)$ の定義から，$i(N) \leq d(M) \leq \frac{\pi}{2}$ である．ここで $i(N) = \frac{\pi}{2}$ が成立するとき N は M において全測地的になることが分かる．

本稿では次のことを問題にする．

(1) M と N の基本群の間の関係から，$i(N)$ を $\frac{\pi}{2}$ より小さい正数で上から評価すること．

(2) 得られた評価式において等号が成立するとき，M と N の幾何学的性質を調べる．

2　結果

この節では 1 節で述べた問題について得られたいくつかの結果をのべる．

2.1

本稿を通して，M は m 次元 $(m \geq 3)$ 連結，コンパクト，非単連結リーマン多様体で，そのすべての断面曲率が条件 $K_M \geq 1$ を満たすものとする．また，N は特に断らない限り M に埋め込まれた n 次元 $(1 \leq n \leq m-1)$ 連結，コンパクト部分多様体とする．$\imath : N \to M$ を埋め込み，$\imath_\sharp : \pi_1(N) \to \pi_1(M)$ を $\imath$ によって誘導された準同型写像とする．$G = \imath_\sharp(\pi_1(N))$ とおく．$\imath_\sharp$ が全射のとき，このことを $\pi_1(M, N) = 0$ と表すこともある．また $\imath_\sharp$ が全射でないとき，このことを $\pi_1(M, N) \neq 0$ と表すことにする．

2.2 定理 ([9])

G が $\pi_1(M)$ の真部分群または $G = \{1\}$ かつ $\pi_1(M)$ が真部分群をもつとき，

$$i(N) \leq \frac{\pi}{4}$$

が成立する．ここで等号が成立すれば M は定曲率 1 で N は次元が高々 $\frac{m-1}{2}$ の M の全測地的部分多様体に含まれる．

2.3 定理 ([9])

$G = \{1\}$ かつ $i(N) > \frac{\pi}{4}$ ならば，$\pi_1(M)$ は位数が素数の巡回群である．

2.4 定理 ([9])

N は M の超曲面とする．$G = \{1\}$ ならば，

$$i(N) \leq \frac{\pi}{4}$$

が成立する．ここで，等号が成立すれば M は定曲率 1 の実射影空間 $P^m(\mathbf{R})$ に等長で N は定曲率 2 のユークリッド球面 $S^{m-1}(2)$ に等長である．

2.5 定理 ([9])

N は M の超曲面で標準的球面 S^{m-1} によって（位相的な意味で）被覆されないとする．そのとき，

$$i(N) \leq \frac{\pi}{4}$$

が成立する．ここで，等号が成立し m が奇数ならば，M は定曲率 1 で N はリーマン積多様体 $S^k(2) \times S^{m-k-1}(2)$ $(1 \leq k \leq m-2)$ によって（局所等長的に）被覆される．このとき，さらに次のことが成立する．$\pi_1(M, N) = 0$ で N の M における最小跡 (*cut locus*) C_N は M のコンパクト，全測地的部分多様体でその連結成分は高々 2 個である．C_N が連結ならば，$m = 2k + 1$ で N は M の極小超曲面である．

2.6 定理 ([9])

V を m 次元 $(m \geq 3)$ 連結，コンパクト，単連結リーマン多様体で，そのすべての断面曲率が条件 $K_V \geq 1$ とし N は V に埋め込まれた n 次元 $(1 \leq n \leq m-2)$ 連結，コンパクト部分多様体とする．もし m または n が奇数ならば，

$$i(N) \leq \frac{\pi}{2}$$

が成立する．ここで等号が成立すれば V と N はそれぞれ定曲率 1 のユークリッド球面 $S^m(1)$ とそこにおける n 次元大球に等長である．

3 補題

この節では 2 節で述べた定理の証明に必要となる補題を準備する．証明は [9] を参照してほしい．

この節を通して V を m 次元 $(m \geq 3)$ 連結，コンパクト，単連結リーマン多様体でそのすべての断面曲率が条件 $K_V \geq 1$ を満たすものとする．d を V 上の距離関数とする．V の空でない部分集合 A と正数 r に対し，

$$B(A,r) = \{x \in V; d(x,A) < r\}, \qquad \partial B(A,r) = \{x \in V; d(x,A) = r\}$$

とおく．V における測地線はすべて弧長によって助変数表示されているものとする．

3.1

Bonnet-Myers の定理により，V の直径 $d(V)$ は π より大きくない．Toponogov の最大直径定理から，$d(V) = \pi$ ならば V は定曲率 1 のユークリッド球面 $S^m(1)$ に等長である．

3.2 全 π-凸集合

C を V の空でない部分集合とする．両端点が C の点で，長さが π より小さい V の測地線分はすべて C に含まれるとき，C は V において<u>全 π-凸</u> という．

以下において C は V のコンパクトな全 π-凸真部分集合とする．

C が連結でないならば，V は定曲率 1 のユークリッド球面 $S^m(1)$ に等長で，C は 2 点 x，y よりなり $d(x,y) = \pi$ である．このことは 3.1 で述べたことから従う．

C の内部は M の k 次元 $(k \geq 0)$ (embedded) 全測地的部分多様体である．C が連結で $\dim C \geq 1$ ならば，C の任意の 2 点は C に含まれる V における最短測地線分で結ばれる．

C が境界 ∂C をもつとする．このとき，C 上の関数 $d(x, \partial C)$ $(x \in C)$ が上に強凸であることより，C における ∂C からの最遠点集合は 1 点からなることが分かる ([3])．このことから，次のことが示せる．

3.2.1 補題

$\dim C \geq 1$ で C が不動点をもたない V の等長変換 φ によって不変ならば，C は境界をもたない．

3.2.2 補題 ([6])

$\dim C \geq 1$ で $\partial C \neq \emptyset$ とする．このとき，ある正数 r が存在して，$0 < t \leq r$ なる

すべての t に対して $B(C,t)$ の閉包は m 次元ユークリッド単位閉球体 D^m に同相である.

3.3

A を V のコンパクト真部分集合とする. $B=\{x\in V; d(x,A)\geq \frac{\pi}{2}\}$ とおく. Toponogov の比較定理を用いて次が示せる.

3.3.1　補題

A, B は上の通りとし, $B\neq\emptyset$ とする.
(1) B は V の全 π-凸集合である.
(2) もし A が不動点をもたない V の等長変換によって不変で $\dim B\geq 1$ ならば, B は V に埋め込まれた境界をもたないコンパクト, 連結, 全測地的部分多様体で, $d(x,A)=\frac{\pi}{2}$ $(x\in B)$ が成立する.

3.4

C_1, C_2 を V のコンパクト, 連結真部分集合で次の条件を満たしているとする:

$$C_1=\left\{x\in V; d(x,C_2)\geq\frac{\pi}{2}\right\},\quad C_2=\left\{x\in V; d(x,C_1)\geq\frac{\pi}{2}\right\}.$$

補題 3.3.1 よりこれらは V の全 π-凸集合である. Toponogov の比較定理を用いて次を得る.

3.4.1　補題

(1) $\partial C_1=\emptyset$ ならば, $d(x,C_2)=\frac{\pi}{2}$ $(x\in C_1)$.
(2) $\partial C_1=\partial C_2=\emptyset$ ならば, $d(x,y)=\frac{\pi}{2}$ $(x\in C_1,\ y\in C_2)$.

以下, 上の C_1, C_2 は境界をもたず, $n_i:=\dim C_i\geq 1, (i=1,2)$ とする. C_1, C_2 は V の全測地的部分多様体である. 第 2 変分公式より, $n_1+n_2\leq m-1$ が従う. 補題 3.3.1 の (2) より, $C_1=\partial B(C_2,\frac{\pi}{2})$, $C_2=\partial B(C_1,\frac{\pi}{2})$ である.

2 点 $x_1\in C_1$, $x_2\in C_2$ を取り以下固定する. $S_i\,(i=1,2)$ を x_i における C_i の単位法ベクトルの全体からなるユークリッド単位球面とする. それらの次元は $\dim S_i=m-n_i-1$ である. 写像 $\pi_i:S_i\to C_{i+1}$ を $\pi_i(X)=Exp_{x_i}(\frac{\pi}{2}X)$ で定義する. ここに, $C_3=C_1$.

3.4.2　補題

上で述べた条件の下で次が成立する.
(1) C_1 (resp. C_2) は $V\setminus C_2$ (resp. $V\setminus C_1$) の強変位レトラクトである.
(2) π_i は Riemannian submersion である.
(3) C_i における長さが 2π より小さい閉測地線はすべて C_i において点曲線にホモトープである.

以上述べた補題を用いて, 次の基本補題を得る.

3.4.3 補題

V は次の条件を満たす埋め込まれたコンパクト，連結，全測地的部分多様体 C_1，C_2 を含むとする:

$$C_1 = \left\{x \in V; d(x, C_2) \geq \frac{\pi}{2}\right\}, \quad C_2 = \left\{x \in V; d(x, C_1) \geq \frac{\pi}{2}\right\}.$$

このとき m が奇数ならば，V はユークリッド単位球面 $S^m(1)$ に等長である.

3.5

以下において L を V に埋め込まれたコンパクト，連結超曲面とする．V は単連結だから，$V \setminus L$ は丁度 2 個の連結成分 D_1，D_2 をもつ．L は D_1，D_2 の共通境界である．$C_i = \{x \in D_i; d(x, L) \geq \frac{\pi}{4}\}\,(i = 1, 2)$ とおく.

3.5.1 補題

$i(L) \geq \frac{\pi}{4}$ と仮定する．このとき次を得る.

(1) $d(x, C_i) = \frac{\pi}{4}$ $(x \in L)$.

(2) $C_1 = \{x \in V; d(x, C_2) \geq \frac{\pi}{2}\}$, $C_2 = \{x \in V; d(x, C_1) \geq \frac{\pi}{2}\}$.

(3) C_1，C_2 は V の連結な全 π-凸集合である.

(4) 各 $t \in (0, \frac{\pi}{4})$ に対し $\{x \in D_i; d(x, L) = t\} = \partial B(C_i, \frac{\pi}{4} - t)$ である.

4 定理の証明

この節では 2 節で述べた定理の証明の概略を与える．3 節までに使われた記号は断りなしに用いる.

4.1

$p: V \to M$ を普遍リーマン被覆とする．V のすべての断面曲率は条件 $K_V \geq 1$ を満たす．V の直径は π より大きくない．従って V はコンパクト で $\pi_1(M)$ は有限群になる．Γ を $\pi_1(M)$ に対応する V の被覆変換群とする．Γ の位数を $\sharp\Gamma$ で表す．Γ_1 は $G = \imath_\sharp(\pi_1(N))$ に対応する Γ の部分群を表す．$\pi_1(M, N) \neq 0$ ならば，$p^{-1}(N)$ は少なくとも 2 個の連結成分をもち，これらの各連結成分は Γ_1 によって不変である.

ここで導入した記号は以下において断りなしに用いる.

4.2 定理 2.2 の証明

$i(N) \geq \frac{\pi}{4}$ と仮定する．このとき $i(N) = \frac{\pi}{4}$ かつ V は単位球面 $S^m(1)$ に等長であることを示す.

(1) $G = \{1\}$ かつ $\pi_1(M)$ が真部分群 H を含む場合：Γ_0 を H に対応する Γ の部分群とする．$N_1, \cdots, N_s$ を $p^{-1}(N)$ のすべての連結成分とする．$s \geq 3$ である．必要なら添数を入れ換えて,

$$d(N_1, N_2) = \min\{d(N_i, N_j); 1 \leq i < j \leq s\}$$

としてよい．仮定 $i(N) \geq \frac{\pi}{4}$ より，$r := d(N_1, N_2) \geq \frac{\pi}{2}$ である．以下

$$A = \cup_{\varphi \in \Gamma_0} \varphi(N_1), \quad B = \left\{x \in V; d(x, A) \geq \frac{\pi}{2}\right\}, \quad C = \left\{x \in V; d(x, B) \geq \frac{\pi}{2}\right\}$$

とおく．$N_2 \subset B$ だから，$\dim B \geq 1$ である．A は Γ_0-不変だから，B もそうである．さらに，B は連結で，$\dim B \geq 1$ であることが示される．補題 3.3.1 (2) より，B は V に埋め込まれた，コンパクト，連結，全測地的部分多様体になり，$d(x, A) = \frac{\pi}{4}$ $(x \in B)$ である．補題 3.3.1 (1) から C は V の全 π-凸部分集合になる．C が連結でないならば，V はユークリッド単位球面 $S^m(1)$ に等長で C は 2 点よりなる．この場合，B は $S^m(1)$ の $(m-1)$ 次元大球と等長になるので，$i(N) = \frac{\pi}{4}$ を得る．次に C は連結とする．C は Γ_0 によって不変だから，$\dim C \geq 1$ である．補題 3.3.1 (2) より C は V に埋め込まれた，コンパクト，連結，全測地的部分多様体で，$B = \{x \in V; d(x, C) \geq \frac{\pi}{2}\}$ である．このとき，$r = \frac{\pi}{2}$ が分かり，$i(N) = \frac{\pi}{4}$ を得る．$\sharp\Gamma \geq 3$ だから，Synge の定理より m は奇数になる．このとき補題 3.4.3 が適用出来て，定理の主張が示せる．

(2) G が $\pi_1(M)$ の真部分群の場合：$p^{-1}(N)$ の連結成分を $N_1, \cdots, N_s$ とする．$s \geq 2$ である．必要なら添数を入れ換えて，

$$d(N_1, N_2) = \min\{d(N_i, N_j); 1 \leq i < j \leq s\}$$

としてよい．仮定 $i(N) \geq \frac{\pi}{4}$ より，$r := d(N_1, N_2) \geq \frac{\pi}{2}$ である．上の (1) の証明において，$A = N_1$ とおき，B，C を同様に定義する．後は (1) と同様な方法で証明出来る．

4.3

定理 2.3 は定理 2.2 から従う．

4.4 定理 2.4 の証明

$i(N) \geq \frac{\pi}{4}$ を仮定し，$\Gamma \cong Z_2$，$i(N) = \frac{\pi}{4}$ かつ V はユークリッド単位球面 $S^m(1)$ に等長であることを示す．仮定 $G = \{1\}$ より，$p^{-1}(N)$ の連結成分の個数は少なくとも 2 である．L を $p^{-1}(N)$ の一つの連結成分とする．L は V に埋め込まれた閉超曲面だから，$V \setminus L$ は丁度 2 個の連結成分をもつ．$p^{-1}(N)$ の各連結成分間の距離は $\frac{\pi}{2}$ より小さくない．また $d(V) \leq \pi$ である．以上のことと Toponogov の最大直径定理により，$\Gamma \cong Z_2$ が示せる．次に $i(N) = \frac{\pi}{4}$ であることと V が $S^m(1)$ に等長であることを示す．N_1，N_2 を $p^{-1}(N)$ の連結成分とする．このとき $d(N_1, N_2) \geq \frac{\pi}{2}$，$i(N_i) \geq \frac{\pi}{4}$ $(i = 1, 2)$ である．D_{i1}，D_{i2} $(i = 1, 2)$ を $V \setminus N_i$ の連結成分とする．$N_1 \subset D_{21}$，$N_2 \subset D_{12}$ としてよい．各 N_i に対し $C_{ij} = \{x \in D_{ij}; d(x, N_i) \geq \frac{\pi}{4}\}$ $(j = 1, 2)$ とおく．これらは空集合でなく，$N_1 \subset C_{21}$，$N_2 \subset C_{12}$ である．このとき，$d(C_{11}, C_{22}) = \pi$ が分かる．これより $i(N) = \frac{\pi}{4}$ で V は $S^m(1)$ に等長である．従って，C_{ii} $(i = 1, 2)$ は 1 点 x_i よりなる．補題 3.5.1 (1) により N_i は x_i を中心とする半径 $\frac{\pi}{4}$ の V における測地的超球面になるので，それは 曲率 2 の $(m-1)$ 次元ユークリッド球面 $S^{m-1}(2)$ に等長になる．$\varphi \in \Gamma$ を自明でない V の等長変換とする．φ は対合で $\varphi(N_1) = N_2$ である．以上のことより，定理の主張が従う．

4.5　定理 2.5 証明

先ず次の定理を準備する.

4.5.1　定理

L を V に埋め込まれたコンパクト, 連結超曲面で ユークリッド球面 S^{m-1} に同相でないとする. このとき,

$$i(N) \leq \frac{\pi}{4}$$

が成立する. 上の不等式において等号が成立し m が奇数ならば, V は $S^m(1)$ に等長で L はリーマン積 $S^k(2) \times S^{m-k-1}(2)$ $(1 \leq k \leq m-2)$ に等長である. 更にこの場合, V における L の最小跡 C_L はコンパクト, 全測地的部分多様体である. C_L は丁度 2 個の連結成分をもち, V の全 π-凸部分集合である.

V, L を定理 4.5.1 の通りとする. D_1, D_2 を $V \setminus L$ の連結成分とする. 以下において

$$C_i = \left\{ x \in D_i ; d(x, L) \geq \frac{\pi}{4} \right\} \quad (i = 1, 2)$$

とおく.

4.5.2　補題

$i(L) \geq \frac{\pi}{4}$ を仮定する. このとき次が成立する.

(1) 各 C_i は V に埋め込まれたコンパクト, 連結, 全測地的部分多様体で全 π-凸である. また $\dim C_i \geq 1$ である.

(2) $i(L) = \frac{\pi}{4}$, $d(x, y) = \frac{\pi}{2}$ $(x \in C_i,\ y \in C_2)$.

(3) $C_L = C_1 \cup C_2$.

補題 4.5.2 の証明 : 補題 3.5.1 より C_1, C_2 は V の全 π-凸部分集合で連結になる. $\dim C_1 \geq 1$ かつ $\partial C_1 = \emptyset$ を示そう. その為に C_1 は 1 点からなるかまたは $\dim C_1 \geq 1$ かつ $\partial C_1 \neq \emptyset$ と仮定し矛盾を導く. ある $t \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ に対し $\partial B(C_1, t)$ はユークリッド球面 S^{m-1} に同相である. これは C_1 が 1 点なら明かで, $\dim C_1 \geq 1$ かつ $\partial C_1 \neq \emptyset$ ならば補題 3.2.2 による. この事実と補題 3.5.1 (4) より L は S^{m-1} と同相になる. これは L の仮定に矛盾である. 同様に, $\dim C_2 \geq 1$ かつ $\partial C_2 =$ である. (2) , (3) は補題 3.4.1 , 3.5.1 から従う.

4.5.3　定理 4.5.1 の証明

$i(L) \geq \frac{\pi}{4}$ を仮定し, $i(L) = \frac{\pi}{4}$ を示す. C_1, C_2 は補題 4.5.2 の前で定義された通りとする. 主張は補題 4.5.2 より従う. 次に $i(L) = \frac{\pi}{4}$, m は奇数と仮定する. 補題 3.5.1 より V は $S^m(1)$ に等長である. このとき L はリーマン積 $S^k(2) \times S^{m-k-1}(2)$ に等長である. ここに, $k = \dim C_1 \geq 1$, $m - k - 1 = \dim C_2 \geq 1$ である. 定理の他の主張は補題 4.5.2 から従う.

定理 2.5 の証明の為に次の補題を準備しよう.

4.5.4 補題

$i(N) \geq \frac{\pi}{4}$ で N は S^{m-1} によって(位相的な意味で)被覆されないと仮定する．このとき $G = \pi_1(M)$ である．

補題 4.5.4 の証明：$G \neq \pi_1(M)$ と仮定し矛盾を導く．$G = \{1\}$ のとき，定理 2.4 より N は $S^{m-1}(2)$ に等長である．これは N についての仮定に矛盾する．以下 $\sharp G \geq 2$ とする．$N_1, \cdots, N_s$ を $p^{-1}(N)$ の連結成分とする．G は $\pi_1(M)$ の真部分群だから，$s \geq 2$ である．必要なら添数を入れ換えて，

$$d(N_1, N_2) = \min\{d(N_i, N_j); 1 \leq i < j \leq s\}$$

とする．$r := d(N_1, N_2) \geq 2i(N)$ だから $r \geq \frac{\pi}{2}$ である．補題 3.3.1 (1) より $A = \{x \in V; d(x, N_1) \geq \frac{\pi}{2}\}$ は N_i $(2 \leq i \leq s)$ を含む V の全 π-凸部分集合である．N_1 は Γ_1 により不変だから，補題 3.3.1 (2) から A は V に埋め込まれたコンパクト，連結，全測地的部分多様体になる．また $d(x, N_1) = \frac{\pi}{2}$ $(x \in A)$ である．各 N_i はコンパクト，連結超曲面であるから $A = N_2$ かつ $s = 2$ である．$V \setminus A$ は丁度 2 個の連結成分をもち A はそれらの共通の境界であるから，$d(x, N_1) > \frac{\pi}{2}$ となる $x \in V \setminus A$ が存在する．これは矛盾である．

4.5.5 定理 2.5 の証明

補題 4.5.4 により $L := p^{-1}(N)$ は V に埋め込まれたコンパクト，連結超曲面で Γ によって不変である．仮定により L は S^{m-1} に同相でないから，定理 4.5.1 によって $i(L) \leq \frac{\pi}{4}$ である．$i(N) \leq i(L)$ だから $i(N) \leq \frac{\pi}{4}$ を得る．以下 $i(N) = \frac{\pi}{4}$ で m は奇数であると仮定する．定理 4.5.1 によって V は $S^m(1)$ に等長で L はリーマン積 $S^k(2) \times S^{m-k-1}(2) \subset S^m(1)$ (embedded) $(1 \leq k \leq m-2)$ に等長である．L の最小跡 C_L は丁度 2 個の連結成分 C_1，C_2 をもち，これらは V に埋め込まれたコンパクト，全測地的部分多様体でしかも全 π-凸である．よって M は定曲率 1 で N はリーマン積 $S^k(2) \times S^{m-k-1}(2)$ によって(局所等長的に)被覆される．N の最小跡 C_N は C_L によって(局所等長的に)被覆される．C_N が連結な場合，$\varphi(C_1) \neq C_1$ となる $\varphi \in \Gamma$ が存在する．$\varphi(L) = L$ だから $\varphi(C_1) = C_2$ である．よって $m = 2k+1$ である．このとき $S^k(2) \times S^k(2)$ は $S^m(1)$ の極小超曲面であるから N は M の極小超曲面になる．

4.6 定理 2.6 の証明

以下 V，N を定理 2.6 の通りとし，$i(N) \geq \frac{\pi}{2}$ を仮定する．

$$A = \left\{x \in V; d(x, N) \geq \frac{\pi}{2}\right\}, \quad B = \left\{x \in V; d(x, A) \geq \frac{\pi}{2}\right\}$$

とおく．これらは空でない．

上で述べた条件の下で，以下の補題を得る．

4.6.1 補題

(1) $N = B$.

(2) N は V の全 π-凸部分集合である．従って N は V において全測地的である．
(3) A は V のコンパクト，連結，全 π-凸部分集合である．

補題 4.6.1 の証明：$N \subset B$ である．補題 3.3.1 (1) より A，B は V の全 π-凸部分集合である．B の内部が全測地的であることと $d(A,B) \geq \frac{\pi}{2}$ より $\dim B = \dim N$ が分かる．このことから $N = B$ である．仮定 $1 \leq \dim N \leq m-2$ より A は連結である．

4.6.2　補題
$\partial B(N,t) = \partial B(A, \frac{\pi}{2} - t) \quad (t \in (0, \frac{\pi}{2}))$.

4.6.3　補題
m または n は奇数と仮定する．このとき次を得る．
(1) $a := \dim A \geq 1$，$\partial A = \emptyset$.
(2) $d(x,y) = \frac{\pi}{2} \quad (x \in A,\, y \in N)$.
(3) $i(N) = i(A) = \frac{\pi}{2}$.

補題 4.6.3 の証明：$a = 0$ と仮定する．このとき A は連結だから 1 点よりなる．正数 $r \in (0, \frac{\pi}{2})$ が存在して $\partial B(A,r)$ は S^{m-1} に同相になる．仮定 $i(N) \geq \frac{\pi}{2}$ と補題 4.6.2 より $\partial B(A,r) = \partial B(N, \frac{\pi}{2} - r)$ だから，N 上の単位法球束 $\pi_N : U(N) \to N$ の全空間 $U(N)$ は S^{m-1} に同相である．偶数次元ユークリッド球面 S^k は連続な接 j-次元平面場を許容 $(1 < j < k)$ しないから，$m-1$ は奇数である．それ故仮定により n は奇数にならなければならない．ここで $\pi_N : U(N) \to N$ のファイバー F は S^1，S^3，S^7 の何れか一つとホモトピー同値になることに注意する ([1])．このことより $\dim F$ は 1，3，7 の何れかになる．しかしこのことは $\dim F = m - n - 1$ が偶数になることに矛盾する．よって $a \geq 1$ を得る．次に $\partial A = \emptyset$ を示す．そこで $\partial A \neq \emptyset$ と仮定する．このとき補題 3.2.2 により ある $r \in (0, \frac{\pi}{2})$ が存在して $\partial B(A,r)$ は S^{m-1} に同相になる．上で述べたことと同じ理由により $U(N)$ は S^{m-1} に同相になる．上と同じ議論により矛盾を得る．よって $\partial A = \emptyset$．主張 (2) は 補題 3.4.1 より従う．また主張 (3) は (2) と 補題 4.6.2 から従う．

補題 3.4.3，4.6.1，4.6.2，4.6.3 から次を得る．

4.6.4　補題
m が奇数または $n = 1$ ならば V は $S^m(1)$ に等長である．

以下において $n \geq 2$ と仮定する．2 点 $x \in A$，$y \in N$ を取る．補題 4.6.3 (2) より $d(x,y) = d(A,N) = \frac{\pi}{2}$ である．S を x における A の単位法ベクトル全体からなる $(m-a-1)$ 次元ユークリッド単位球面とする．補題 3.4.2 (2) により $p_N : S \to N$ $(p_N(Y) = Exp_x(\frac{\pi}{2}Y))$ は Riemannian submersion になる．N は単連結で 各 $z \in N$ に対し ${p_N}^{-1}(z)$ は連結になることに注意する．

4.6.5　補題
m は偶数，n は奇数で $n \geq 3$ と仮定する．このとき V は $S^m(1)$ と等長である．

補題 4.6.5 の証明： 上で述べた Riemannian submersion $p_N : S \to N$ を考える．先ず $m = a + n + 1$ を示す．その為に，$m > a + n + 1$ と仮定し矛盾を導く．このとき各 $z \in N$ に対し $\dim p_N{}^{-1} \geq 1$ である．$\dim S = m - a - 1$ は奇数でなければならない．一方 $\dim p_N{}^{-1}$ は奇数である ([5])．以上より n は偶数となり矛盾を得る．よって $m = a + n + 1$ である．これより N は $S^n(1)$ に等長になることが分かる．N は V において全 π-凸だから $d(V) = \pi$ である．Toponogov の最大直径定理により V は $S^m(1)$ に等長になる．

以上の補題から定理 2.6 が従う．

5 補足

正定曲率の連結等質リーマン空間は基本群によって完全に分類されることが知られている ([19])．非単連結の場合の基本群は巡回群，双正二面体群，3 種類の双正多面体群である．この節では，単純閉測地線の法指数写像の単射半径を用いて双正二面体群を基本群にもつ正定曲率の等質リーマン多様体の一つの特徴付けを与える．

5.1

双正二面体群 D_k^* $(k \geq 2)$ は二つの元 a, b で生成され，基本関係 $a^{2k} = e$, $a^k = b^2$, $bab^{-1} = a^{-1}$ ($2k$ は a の位数 $(k \geq 2)$) をもつ位数 $4k$ の有限群である．四元数群 $Q8$ は D_2^* に同型である．

5.2 定理 ([10])

M を等質リーマン多様体とし，γ を点曲線にホモトープでない M の単純閉測地線とする．$\pi_1(M)$ が巡回群でないならば，

$$i(\gamma) \leq \frac{\pi}{4}$$

が成立する．ここで等号が成立すれば M は定曲率 1 で $\pi_1(M)$ は双正二面体群 D_k^* に同型であり，$[\gamma] \in \pi_1(M)$ の位数 d は偶数である．ここで，$d = 2$ ならば $k = 2$，$d \geq 4$ ならば $d = 2k$ である．

上の定理の証明は [10], [11] を参照してほしい．

参考文献

[1] W. Browder, *Higher torsion in H-spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. 108(1963), 353-375.

[2] J. Cheeger and D. G. Ebin, Comparison Theorems in Riemannian Geometry, North Holland Mathematical Library, 1975.

[3] J. Cheeger and D. Gromoll, *On the structure of complete manifolds of nonnegative curvature*, Ann. of Math., 96(1972), 414-443.

[4] T. Frankel, *Manifolds with positive curvature*, Pac. J. Math. 11(1961), 165-174.

[5] É. Ghy, *Feuilletages riemanniens sur les variété simplement connexes*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble), 34(1984), 203-223.

[6] D. Gromoll and K. Grove, *A generalization of Berger's rigidity theorem for positivery curved manifolds*, Ann. Scient. Éc. Norm. Sup., 20(1987), 227-239.

[7] D. Gromoll and K. Grove, *The low-dimensional metric foliations of Euclidean spheres*, J. Differential Geometry, 28(1988), 143-156.

[8] K. Grove and K. Shiohama, *A generalized sphere theorems*, Ann. of Math., 106(1977), 201-211.

[9] R. Ichida, *A certain inequality on Riemannian manifolds of positive curvature* II, Memoirs of the Faculty of Sci. Kyushu Univ., 47(1993), 41-57.

[10] R. Ichida, *An inequality for injectivity radii of Riemannian manifolds with positive curvature*, Kyushu J. Math., 48(1994), 233-248.

[11] R. Ichida, 第 41 回幾何学シンポジウム講演要旨, (1994), 134-143.

[12] H. Nakagawa, 大域の Riemann 幾何学, 海外出版貿易, 1977.

[13] T. Sakai, *On the diameter of some Riemannian manifold*, Archive der Math., 30(1978), 427-434.

[14] T. Sakai, リーマン幾何学, 数学選書 11, 裳華房, 1992.

[15] T. Sakai and K. Shiohama, *On the structure of positively curved manifolds with certain diameter*, Math. Z., 127(1972), 75-82.

[16] K. Shiohama, *The diameter of δ-pinched manifolds*, J. Differential Geometry, 5(1971).

[17] N. E. Steenrod, Topology of Fibre Bundles, Princeton University Press, 1951.

[18] Y. Tukamoto, *On certain Riemannian manifolds of positive curvature*, Sci. Rep. Fac. Engineer, Kyushu Univ., 42(1969), 1-3.

[19] J. A. Wolf, Spaces of Constan Curvature, Publish or Perish, 1972.