数理解析研究所講究録
907巻 1995年 123-130

平行な平面場を持つリーマン多様体のベッチ数について

大町英理子（ Eriko Omachi ）

§1．序． M^n を向き付け可能な連結コンパクト n 次元 Riemann 多様体とし，Riemann 計量を $g=(g_{ji})$で表す．また M^n の p次 Betti 数を b_p で表す．M^n が1個または2個の平行ベクトル場を持つとき，その Betti 数に関して L. Karp や A. Lichnerowicz 等が研究しているが（[1][2]），より一般に，M^nが r 個の平行ベクトル場を持つ場合，Betti 数に関して次の不等式が知られている（[3]）：

定理（Ogawa - Tachibana） M^nが r（$1\leq r\leq n$）個の平行ベクトル場を持つとき，不等式

$$\sum_{i=0}^{p} (-1)^i \binom{s+i-1}{i} b_{p-i} \geq 0, \qquad (1\leq s\leq r,\ 1\leq p\leq n)$$

が成り立つ．

ここでは，M^nが向き付け可能な平行２次元 distribution を持つ場合に，Betti 数に関してどのような不等式が成り立つかを調べる．扱う関数やテンソルはすべてC^∞とする．

H_p を M^n上の調和 p-形式全体のなすベクトル空間とすれば，$\dim H_p = b_p$ である．便宜上，$p>n$ または $p<0$ の時には $H_p=\{0\}$ とし，その上では各作用素は自明に作用するものとする．

ベクトル場 $u^j(\partial/\partial x^j)$ は 1-形式 $u_i dx^i$（$u_i=g_{ij}u^j$）と必要に応じて同一視し，ともに u で表す．u による外積および内積作用素を $e(u)$，$i(u)$ で表す．すなわち，p-形式 w に対しては，X_1，$\cdots$，X_{p-1} を接ベクトルとするとき

$$e(u)w = u \wedge w$$

$$(i(u)w)(X_1, \cdots, X_{p-1}) = W(u, X_1, \cdots, X_{p-1})$$

であり，

$$e(u)^2 = i(u)^2 = 0$$

をみたす．また，単位ベクトル u に対しては

$$i(u)e(u) + e(u)i(u) = I$$

が成り立つ．ここに I は恒等作用素である．上の定理はこれらの性質を使って証明される．

§2．平行な平面場に関連する作用素． 以下，M^n は向き付け可能な平行２次元 distribution Dを持つと仮定する．Dの正規直交基底 $u = (u^i)$，$v = (v^i)$ をとる．これらは局所的な C^∞ ベクトル場である

このとき

$$\pi_{ji} = u_j v_i - u_i v_j$$

とおくと $\nabla_k \pi_{ji} = 0$，すなわち $\pi = (\pi_{ji})$ が平行であることが示される．また，π は同じ向きを持つDの正規直交基底のとり方によらず，大域的に定まることも分かる．すなわち $\pi = \frac{1}{2}\pi_{ji}dx^j \wedge dx^i$ は，u，v を 1-形式と見なせば，$\pi = u \wedge v$ で定義される大域的な 2-形式である．π に関する外積および内積作用素を定義する．p-形式 $w = (1/p!)w_{i_1 i_2 \cdots i_p} dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p}$ に対して

$$e(\pi)w = \pi \wedge w$$

$$i(\pi)w = (1/(p-2)!)(\tfrac{1}{2}\pi^{kj} w_{kj i_3 \cdots i_p})dx^{i_3} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p} \quad (p \geqq 2)$$

$$i(\pi)w = 0 \quad (p = 0,\ 1)$$

によって作用素 $e(\pi)$ および $i(\pi)$ を定める．また

$$\phi(\pi) = e(u)i(u) + e(v)i(v)$$

により作用素 $\phi(\pi)$ を定義する．u，v は局所的であるが，$\phi(\pi)$ は大域的な作用素であることが確かめられる．

§3．結果．　πに関する内積と外積の定義より

$$i(\pi)=i(v)i(u),\quad e(\pi)=e(u)e(v) \tag{1}$$

であり，これらを使って

$$i(\pi)^2 = e(\pi)^2 = 0$$

が示される．さらに，$i(\pi)e(\pi)$ を p-形式 w に作用させ(1)を使うことによって，次の定理が証明される．

定理1　$$I = i(\pi)e(\pi) + \phi(\pi) - e(\pi)i(\pi) \tag{2}$$

が成り立つ．

$e(\pi)$，$i(\pi)$，$\phi(\pi)$を p-形式に対して作用させる時，それぞれ $e(\pi)_p$，$i(\pi)_p$，$\phi(\pi)_p$ と書くことにする．もし w が調和であれば，$i(\pi)w$ および $e(\pi)w$ もまた調和であることが，直接，計算によって示される．ここで

$$K_p = i(\pi)_p^{-1}(0) \cap H_p$$

とおくと，(1)から

$$i(\pi)_p(H_p) \subset K_{p-2}$$

が得られる．

さてここで，前節で定義した作用素ϕに関する条件

$$\phi(\pi) = 2\, e(\pi)i(\pi) \tag{A}$$

を考える．p-形式に対する条件(A)，すなわち

$$\phi(\pi)_p = 2\, e(\pi)_{p-2}i(\pi)_p \tag{A$_p$}$$

を$(A)_p$で表す．

いま，条件$(A)_{p-2}$を仮定しておく．すなわち

$$\phi(\pi)_{p-2} = 2\, e(\pi)_{p-4}i(\pi)_{p-2} \tag{A$_{p-2}$}$$

が成り立つものとする．このとき(2)によって

$$I = i(\pi)_p e(\pi)_{p-2} + e(\pi)_{p-4}i(\pi)_{p-2}$$

が得られる．これを使うと，$w \in K_{p-2}$ に対して

$$w = Iw = i(\pi)_p e(\pi)_{p-2} w$$

となり，w が$i(\pi)_p(H_p)$に含まれることが分かる．従って $K_{p-2} \subset i(\pi)_p(H_p)$ である．このことから，条件 $(A)_{p-2}$ のもとで，H_p は K_p と K_{p-2} の直和にベクトル空間として同型であることが分かる．従って K_p の次元を k_p とし，$p<0$, $p>n$ の時には $k_p = 0$ とすれば，次の定理が成り立つ．

定理２　　条件$(A)_{p-2}$を仮定すれば，関係

$$b_p = k_p + k_{p-2}$$

が成り立つ．

この定理から次の定理が得られる．

定理３　　n を越えない偶数（または奇数）p と任意の自然数 r に対して，条件$(A)_q$ が $p-4r-2 \leqq q \leqq p-2$ をみたすすべての偶数（または奇数）q に対して成り立つならば，

$$\sum_{i=0}^{2r} (-1)^i b_{p-2i} = k_p + k_{p-4r-2} \geqq 0$$

が成り立つ．

§４．条件(Ａ)の局所表現.　　前節において仮定した条件(Ａ)について考えよう．まず，今までに導入した作用素間に，次の関係が成り立つことに注意する．

$$i(u)e(\pi)i(\pi) = e(v)i(\pi)$$

$$i(v)e(\pi)i(\pi) = -e(u)i(\pi)$$

$$i(u)\phi(\pi) = i(u) + e(v)i(\pi)$$

$$i(v)\phi(\pi) = i(v) - e(u)i(\pi)$$

これらの関係を使って次の定理が証明される．

定理４　　条件(Ａ)は，

$$i(u) = e(v)i(\pi) \tag{3}$$

と

$$i(v) = -e(u)i(\pi) \tag{4}$$

が同時に成立することと同値である.

定理4を使って，条件$(A)_p$の局所表現を与えよう. (3)と(4)を p-形式 $w = (w_{i_1 \cdots i_p})$に作用させると

$$u^r w_{ri_2 \cdots i_p} = \sum_{\ell=2}^{p} (-1)^{\ell} v_{i_\ell} u^r v^s w_{rs i_2 \cdots \hat{i}_\ell \cdots i_p} \tag{5}$$

$$v^r w_{ri_2 \cdots i_p} = \sum_{\ell=2}^{p} (-1)^{\ell} u_{i_\ell} v^r u^s w_{rs i_2 \cdots \hat{i}_\ell \cdots i_p} \tag{6}$$

が得られる. $\hat{}$ は，その部分の添字が除かれていることを表す.

ここで，Dに直交する distribution を$D^{\perp}$で表せば，Dが平行であることから，DとD$^{\perp}$は共に積分可能である. 従って M^n は局所的には Riemann 積 $M'^2 \times M''^{n-2}$ に等長である. M'^2 の局所座標 $\{x^a\ ;\ a=1,2\}$ と M''^{n-2} の局所座標 $\{x^\lambda\ ;\ \lambda=3, \cdots,$ $n\}$ から構成される M^n の座標 $\{x^I\ ;\ I=1,2,3,\cdots,n\}$ をとり，これを adapted coordinate と呼ぼう. この座標に関して，p-形式 w は

$$\begin{aligned} w &= \sum_{I_1 < \cdots < I_p} w_{I_1 \cdots I_p} dx^{I_1} \wedge \cdots \wedge dx^{I_p} \\ &= \sum_{\lambda_1 < \cdots < \lambda_p} w_{\lambda_1 \cdots \lambda_p} dx^{\lambda_1} \wedge \cdots \wedge dx^{\lambda_p} \\ &\quad + \sum_{\lambda_2 < \cdots < \lambda_p} w_{a\lambda_2 \cdots \lambda_p} dx^a \wedge dx^{\lambda_2} \wedge \cdots \wedge dx^{\lambda_p} \qquad (7) \\ &\quad + \sum_{\substack{a<b \\ \lambda_3 < \cdots < \lambda_p}} w_{ab\lambda_3 \cdots \lambda_p} dx^a \wedge dx^b \wedge dx^{\lambda_3} \wedge \cdots \wedge dx^{\lambda_p} \end{aligned}$$

と表せる. 添字の範囲は, a, b = 1, 2, $\lambda_1, \cdots, \lambda_p = 3, \cdots, n$ である. (7)の右辺の第1，第2，第3各項をそれぞれ $w^{(I)}$, $w^{(II)}$, $w^{(III)}$ で表せば p-形式 w は $w = w^{(I)} + w^{(II)} + w^{(III)}$ と分解される. $w = w^{(I)}$ のときI型, $w = w^{(II)}$ のとき

II型，$w = w^{(III)}$ のときIII型であるとよぶことにする．w が調和であれば，$w^{(I)}$，$w^{(II)}$，$w^{(III)}$ も 調和であることが 直接計算することによって示せる． adapted coordinate に関して $u = \Sigma\, u_a dx^a$，$v = \Sigma\, v_a dx^a$ とすれば，(5)と(6)は

$$u^a w_{a I_2 \cdots I_p} = \sum_{\ell=2}^{p} (-1)^{\ell}\, v_{I_\ell} u^a v^b w_{ab I_2 \cdots \hat{I}_\ell \cdots I_p} \tag{8}$$

$$v^a w_{a I_2 \cdots I_p} = \sum_{\ell=2}^{p} (-1)^{\ell}\, u_{I_\ell} v^a u^b w_{ab I_2 \cdots \hat{I}_\ell \cdots I_p} \tag{9}$$

となる．

w がI型の場合には(8)と(9)は常に成り立つ．w がII型の場合には(8)および(9)の右辺は0であるから

$$u^1 w_{1\lambda_2\cdots\lambda_p} + u^2 w_{2\lambda_2\cdots\lambda_p} = 0$$
$$v^1 w_{1\lambda_2\cdots\lambda_p} + v^2 w_{2\lambda_2\cdots\lambda_p} = 0$$

となり，これと u，v が正規直交であることから

$$w_{a\lambda_2\cdots\lambda_p} = 0$$

が得られる．wがIII型である場合には，(8)と(9)は

$$u^a w_{ac\lambda_3\cdots\lambda_p} = v_c u^a v^b w_{ab\lambda_3\cdots\lambda_p}$$
$$v^a w_{ac\lambda_3\cdots\lambda_p} = u_c v^a u^b w_{ab\lambda_3\cdots\lambda_p}$$

である．従って，次の定理が成り立つ．

定理5　adapted coordinate に関して，条件$(A)_p$ は，p-形式 w に対して次の(i)(ii)が共に成り立つことと同値である：

(i) $w^{(II)} = 0$

(ii) $w^{(III)}$ に対して

$$u^a w_{ac\lambda_3\cdots\lambda_p} = v_c\, \alpha_{\lambda_3\cdots\lambda_p}$$
$$v^a w_{ac\lambda_3\cdots\lambda_p} = -u_c\, \alpha_{\lambda_3\cdots\lambda_p}$$

を満たす (P-2)-形式 $\alpha_{\lambda_3\cdots\lambda_p}$ が存在する．

$w^{(I)}$ に対しては$(A)_p$は何の条件も課さない．

§5．Riemann 積の場合． この節では，M^n が Riemann 積 $M'^2 \times M''^{n-2}$ であるとする．M'^2 および M''^{n-2} は連結，コンパクト，向き付け可能であると仮定しておく．M^n, M'^2, M''^{n-2} の p次 Betti 数をそれぞれ b_p, b'_p, b''_p で表せば，これらの間に関係

$$b_p = \sum_{i=0}^{p} b'_i b''_{p-i}$$

が知られている．これを使って，$b'_0 = b'_2 = 1$, $b'_q = 0$ $(q \geqq 3)$ に注意すれば，

$$\sum_{i=0}^{2r} (-1)^i b_{p-2i} = b''_p + b''_{p-4r-2} + b'_1 (b''_{p-1} - b''_{p-3} + b''_{p-5} - \cdots + b''_{p-4r-1})$$

が得られる．この式から次の定理が導かれる．

定理6 Riemann 積多様体 $M^n = M'^2 \times M''^{n-2}$ において，

$$b'_1 = 0$$

または

$$b''_{p-3} = b''_{p-7} = \cdots = b''_{p-4r+1} = 0$$

の何れかが成り立つならば，不等式

$$\sum_{i=0}^{2r} (-1)^i b_{p-2i} \geqq 0$$

が任意の自然数 r に対して成り立つ．

定理６で得た不等式は，定理３で得たものと同じ不等式である．

ところで$H_p(M^n)$の基底は次の３つのタイプから構成される：

Ⅰ型　w_1　$(w_1 \in H_p(M''^{n-2}))$,

Ⅱ型　$\theta \wedge w_2$　$(\theta \in H_1(M'^2),\ w_2 \in H_{p-1}(M''^{n-2}))$,

Ⅲ型　$\pi \wedge w_3$　$(w_3 \in H_{p-2}(M''^{n-2}))$

Ⅱ型に対して，条件$(A)_p$は，b'_1 または b''_{p-1} の何れかが０になることと同値である．Ⅲ型に対しては，定理５におけるαとして w_3 をとることができ，$(A)_p$が常に

みたされていることが分かる．以上より次の定理が得られる．

定理7　Riemann 積多様体 $M^n = M'^2 \times M''^{n-2}$ において，条件$(A)_{p-2}$，$(A)_{p-6}$，$\cdots$，$(A)_{p-4r+2}$が成り立つならば，不等式

$$\sum_{i=0}^{2r} (-1)^i b_{p-2i} \geqq 0$$

が任意の自然数 p，r に対して成り立つ．

参考文献

[1] L. Karp, Parallel vector fields and the topology of manifolds, Bull. Amer. Math. Soc. 83(1976), 1051-1053.

[2] A. Lichnerowicz, Théorie globale des connexions et des groupes d'holonomie, Ed. Cremonese, Roma, 1955.

[3] Y. Ogawa and S. Tachibana, Parallel vector fields and the Betti number, Proc. Japan Acad. 54(1978), 292-294.