

数理解析研究所講究録
部分多様体論とその周辺

ケーラー磁場の軌道と円

足立 俊明 (Toshiaki ADACHI)

名古屋工業大学数学教室

1. ケーラー磁場の定義

今回取り上げる考察対象の定義から始めよう。ケーラー多様体 (M, \langle, \rangle, J) 上の滑らかな曲線 γ がケーラー磁場の軌道 (trajectory) であるとは、ある定数 k に対して次の微分方程式

$$(T_0) \quad \nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma} = kJ\dot{\gamma}$$

を満たすことを言う。このような曲線族はどのような性質を満たすのだろうか。またこの曲線族の性質から多様体のどのような性質が得られるのであろうか。

まず少し古典的な曲線論の立場から眺めてみよう。弧長によりパラメトライズされた滑らかな曲線 $\sigma = \sigma(t)$ が円 (circle) であるとは、 σ に沿ったベクトル場 $X_1(t) = \dot{\sigma}(t)$, $X_2(t)$ および非負な定数 k が

$$\nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma} = kX_2, \quad \nabla_{\dot{\gamma}} X_2 = -kX_1$$

となるように取れること、即ち

$$\nabla_{\dot{\gamma}} \nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma} = -k^2 \dot{\gamma}$$

を満たすことをいい、この定数 k を測地曲率という。ケーラー多様体上の円に関しては1つの指標として complex torsion と呼ばれる定数

$$\tau = \langle X_1, JX_2 \rangle$$

が考えられる。ケーラー磁場の trajectory に戻ってみるとこの曲線は測地曲率 $|k|$ で complex torsion ± 1 の円になっている。もしも標語的の言い方をすることが許されるならば、ケーラー多様体において complex torsion が 0 である円は real part の性質を反映し、complex torsion が ± 1 で

ある円, つまりケーラー磁場の trajectory は複素構造を反映した曲線族ではないだろうか。

次になぜこの特別な円を磁場の軌道と呼ぶかについて述べよう。空間 \mathbb{R}^3 内の導線に流れる定常電流が作る静磁場を思い出してみよう。磁場は各場所で強さと方向とを表すベクトル値関数 $B : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ でガウスの法則 $\operatorname{div}(B) = 0$ が成り立つものである。この磁場の中で点電荷 e に作用するローレンツ力は, 電荷の速度ベクトルを v で表すと $e \cdot v \times B$ と外積を使って表される。従って点電荷の質量を m とすると運動方程式は

$$m \frac{dv}{dt} = e \cdot v \times B$$

で与えられる。この現象を一般の Riemann 多様体上で考えることはできないだろうか。空間 \mathbb{R}^3 内で磁場を扱うときには右手系, 左手系というように空間の orientation が重要になる。そこでベクトル値関数 $B = (B_1, B_2, B_3)$ を 2-form

$$B = B_1 dy \wedge dz + B_2 dz \wedge dx + B_3 dx \wedge dy$$

と考えてみよう。この時 $\operatorname{div}(B) = 0$ は $dB = 0$ と書き換えられ, 運動方程式は skew symmetric matrix

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & B_3 & -B_2 \\ -B_3 & 0 & B_1 \\ B_2 & -B_1 & 0 \end{pmatrix}$$

を用いると,

$$m \frac{dv}{dt} = e \Omega(v)$$

となる。

この様な考察の基に Riemann 多様体 (M, \langle, \rangle) 上の closed 2-form B は磁場と呼ばれる ([14])。磁場 B に対して skew symmetric operator $\Omega = \Omega_B : TM \rightarrow TM$ を

$$B(u, v) = \langle u, \Omega(v) \rangle$$

がすべての $u, v \in T_x M, x \in M$ について成り立つように取る。この磁場のもとでの単位質量単位電荷の点電子の動きとして運動方程式

$$(T) \quad \nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma} = \Omega(\dot{\gamma})$$

を満たす滑らかな曲線 γ を B の trajectory であるという。磁場の影響がない場合、即ち $B = 0$ の時、空間 \mathbb{R}^3 内で荷電粒子は等速直線運動をするが、一般の多様体上でも $\Omega = 0$ であるからこの方程式 (T) は測地線の方程式になる。

磁場のなかでも各点での磁力が一定であるとき trajectory の様子は分かりやすいはずである。そこで $\nabla \Omega = 0$ を満たすとき、この磁場は一様 (uniform) であるということにしよう。一様な磁場の重要な例として、向き付け可能な曲面上の体積要素の定数倍 $\kappa \cdot \text{Vol}$ とケーラー多様体上の Kaehler form の定数倍 $\kappa \cdot B_J$ が挙げられる。前者は自然に1次元ケーラー多様体と考えることができるからこの両者をケーラー磁場と呼ぶ。この様に磁場という観点からみてもケーラー磁場の軌道は自然な考察対象であると思われる。

2. 磁場の軌道の基本的な性質

まず簡単な trajectory の性質を述べておこう。

$$\frac{d}{dt} \|\dot{\gamma}\|^2 = \langle \Omega(\dot{\gamma}), \dot{\gamma} \rangle + \langle \dot{\gamma}, \Omega(\dot{\gamma}) \rangle = 0$$

だから $\|\dot{\gamma}\| = (\text{一定})$ である。従って M が完備ならば trajectory $\gamma(t)$ は $-\infty < t < \infty$ で定義される。また $\gamma(t)$ が B の trajectory ならば $\gamma(ct)$ は cB の trajectory になるので $\|\dot{\gamma}\| = 1$ となるものを主に考え normal trajectory と呼ぶことにする。測地線の方程式は道のエネルギーに関する変分の Euler-Lagrange 方程式になっているが、磁場の trajectory についてはどうであろうか。磁場 B が完全、即ち $B = dA$ となる 1-form A (これは磁場の大域的なベクトルポテンシャルと呼ばれる) が存在する場合を考えよう。固定点 p, q を結ぶ滑らかな曲線 $\sigma(t)$ ($a \leq t \leq b$) に対して汎関数を

$$E(\sigma) = \int_a^b \left\{ \frac{1}{2} \|\dot{\sigma}(t)\|^2 + A(\dot{\sigma}(t)) \right\} dt$$

と定めると、両端点を固定した変分に対応する Euler-Lagrange 方程式が磁場の trajectory の方程式になることが分かる。実際曲線 $\sigma(t)$ ($a \leq t \leq$

b) に沿ったベクトル場 Y 方向の第1変分は

$$DE(\sigma)(Y) = - \int_a^b \langle \nabla_{\dot{\sigma}} \dot{\sigma} - \Omega(\dot{\sigma}), Y \rangle dt + \langle \dot{\sigma}, Y \rangle \Big|_a^b + A(Y) \Big|_a^b$$

で与えられる。なお Sobolev の埋め込み定理を利用することにより、この汎関数は Palais-Smale の Condition (C) を満たしていることが分かる。

ただ残念な事は磁場 B がきれいな形をしていても A は必ずしもきれいではないことであろう。従って磁場の様子を調べるにあつたつてもむしろその軌道を調べることから始めた方がよいようである。一般には大域的なベクトルポテンシャルが存在しないので大域的な変分原理として表せないが方程式 (T) は意味を持つ。なお曲線 $\sigma(t)$ ($a \leq t \leq b$) に沿ったベクトル場 Y_1, Y_2 方向の第2変分は曲率テンソルを R と表すことにして、

$$D^2E(\sigma)(Y_1, Y_2) = - \int_a^b \langle \nabla_{\dot{\sigma}} \nabla_{\dot{\sigma}} Y_2 + R(Y_2, \dot{\sigma}) \dot{\sigma} - \Omega(\nabla_{\dot{\sigma}} Y_2) - (\nabla_{Y_2} \Omega)(\dot{\sigma}), Y_1 \rangle dt \\ + \langle \nabla_{\dot{\sigma}} Y_2, Y_1 \rangle \Big|_a^b + (\nabla_{Y_2} A)(Y_1) \Big|_a^b$$

で与えられる。

3. 磁場のモデル

測地線を考える場合モデル空間として球面, ユークリッド空間, 双曲空間が扱われるが, ケーラー磁場を考える場合には複素射影空間 CP^n , 複素空間 C^n , 複素双曲空間 CH^n がモデル空間になる。なお参考までに, holonomy 群を考察することにより球面や双曲空間上には非退化一様磁場は存在しないことが分かる。

まずこれらの空間で trajectory を具体的に表示してみよう。方程式 (T) からわかるように trajectory は初期ベクトルを与えると一意的に定まる。そこで trajectory γ について $\dot{\gamma}(t+\omega) = \dot{\gamma}(t)$ をみたす ω が存在するとき γ は closed であるといい, この様な正の数 ω の中で最小のものを周期と呼ぶ。

例1. 複素空間 \mathbb{C}^n 上のケーラー磁場 $\kappa \cdot B_J$ の normal trajectory γ は

$$\gamma(t) = A + e^{\kappa i t} B, \quad A, B \in \mathbb{C}^n, \quad \|B\| = 1/\kappa$$
 (A を中心とする半径 $1/\kappa$ の円) と表され, closed で周期 $2\pi/\kappa$ である。

例2. Hopf ファイブレーションを $\pi : S^{2n+1} \rightarrow \mathbb{C}P^n$ と表す。正則断面曲率 4 の複素射影空間 $\mathbb{C}P^n(4)$ 上のケーラー磁場 $\kappa \cdot B_J$ の normal trajectory γ は

$$\gamma(t) = \pi \left(\cos \sqrt{\kappa^2 + 4} t / 2 \cdot z + (\kappa^2 + 4)^{-1/2} \sin \sqrt{\kappa^2 + 4} t / 2 \cdot (\kappa i z + 2u) \right)$$

$$z, u \in \mathbb{C}^{n+1}, \quad |z| = |u| = 1$$

と表され, closed で周期 $2\pi/\sqrt{\kappa^2 + 4}$ である。

例3. ファイブレーションを $\pi : H_1^{2n+1} \rightarrow \mathbb{C}H^n$ と表す。正則断面曲率 -4 の複素双曲空間 $\mathbb{C}H^n(-4)$ 上のケーラー磁場 $\kappa \cdot B_J$ の normal trajectory γ は磁場の強さ κ によりその性質が異なる。

$$\gamma(t) = \pi \left(\cos \sqrt{\kappa^2 - 4} t / 2 \cdot z + (\kappa^2 - 4)^{-1/2} \sin \sqrt{\kappa^2 - 4} t / 2 \cdot (\kappa i z + 2u) \right),$$

$$|\kappa| > 2,$$

$$\gamma(t) = \pi \left((1 \mp i t) z + t u \right), \quad \kappa = \pm 2,$$

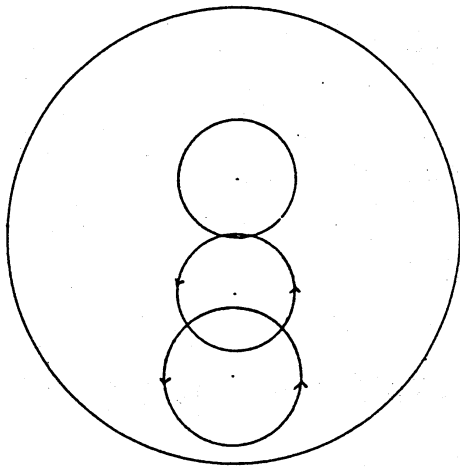
$$\gamma(t) = \pi \left(\cosh \sqrt{4 - \kappa^2} t / 2 \cdot z + (4 - \kappa^2)^{-1/2} \sinh \sqrt{4 - \kappa^2} t / 2 \cdot (-\kappa i z + 2u) \right),$$

$$|\kappa| < 2,$$

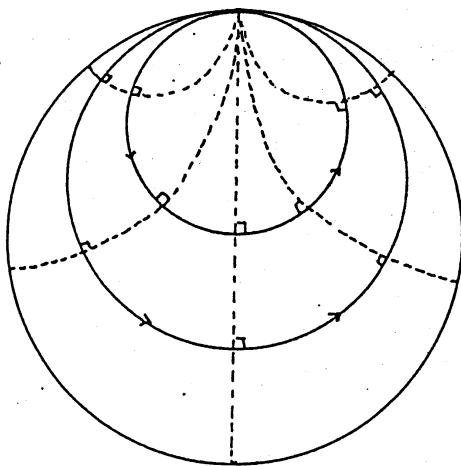
$$z, u \in \mathbb{C}^{n+1}, \quad |z|_1 = -1, \quad |u|_1 = 1$$

なお \mathbb{C}^{n+1} に $(z, w)_1 = -z_0 \bar{w}_0 + \sum_{j=1}^n z_j \bar{w}_j$ と内積を定め $\|z\|_1^2 = (z, z)_1$, $H_1^{2n+1} = \{z \in \mathbb{C}^{n+1} \mid \|z\|_1 = -1\}$ とする。従って, $|k| > 2$ の場合 normal trajectory は closed で周期 $2\pi/\sqrt{k^2-4}$ である。しかし $|k| \leq 2$ の場合 normal trajectory は両方向に unbounded な曲線になる。

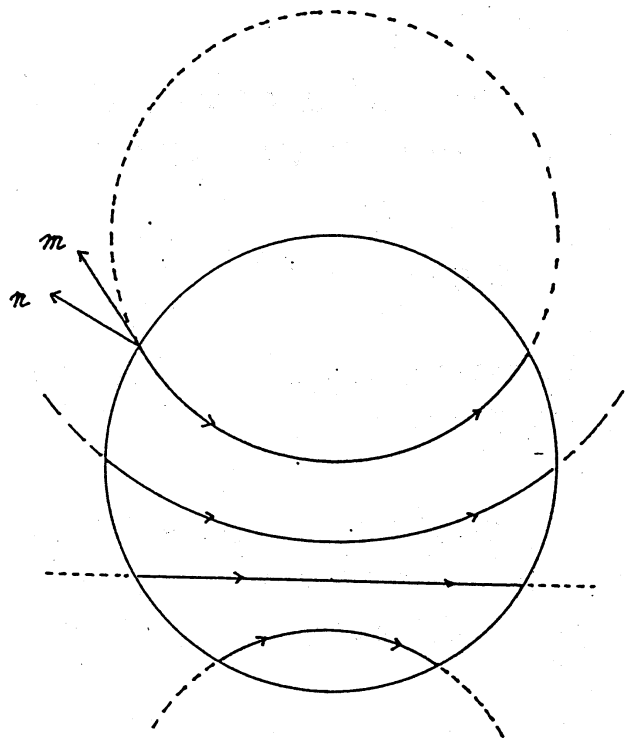
$\mathbb{C}H^n$ を \mathbb{C}^n の 開球として表示してみると normal trajectory は次の図のようになる。



$|k| > \sqrt{c}$.



$k = \pm \sqrt{c}$



$|k| < \sqrt{c}$

複素双曲空間 CH^n は Hadamard 多様体 (単連結非正曲率多様体) でその理想境界はこの同一視により単位球面として表されていることに注意しておこう。Hadamard 多様体 M に対しその理想境界を $M(\infty)$ と表し $\bar{M} = M \cup M(\infty)$ と書く。例3の表示及び図から $CH^n(-4)$ 上の $\kappa \cdot B_J$ の normal trajectory は, $|\kappa| < 2$ の場合には測地線と似た性質を持ち, $\kappa = \pm 2$ の場合には双曲平面における horocycle と似た性質を持つことが分かる。即ち

命題1 ([1]). 正則断面曲率 $-c$ の複素双曲空間 $CH^n(-c)$ 上のケーラー磁場 $\kappa \cdot B_J$ を考える。

1) normal trajectory は $|\kappa| < \sqrt{c}$ の場合2つの異なる無限遠点

$$\gamma(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} \gamma(t), \quad \gamma(-\infty) = \lim_{t \rightarrow -\infty} \gamma(t) \in \overline{CH^n}$$

を持ち, $\kappa = \pm\sqrt{c}$ の場合無限遠点はただ1つ $\gamma(\infty) = \gamma(-\infty)$ である。

2) $\kappa = \pm\sqrt{c}$ の場合 normal trajectory は無限遠点へ行く測地線と直交する。

3) $|\kappa| < \sqrt{c}$ の場合を考える。 $\overline{CH^n}$ 内の任意の異なる2点を結ぶ normal trajectory が2本だけ存在する。

なお $p, q \in CH^n(-c)(\infty)$, $p \neq q$ を結ぶ測地線と $\kappa \cdot B_J$ の normal trajectory とが理想境界において成す角 $\angle(m, n)$ は常に $\cos^{-1} \sqrt{c - \kappa^2}/c$ になる。

測地線に対して測地流を考えたように磁場の trajectory を力学系として捉えてみよう。磁場 B に対して単位接バンドル UM 上の magnetic flow $B\varphi_t : UM \rightarrow UM$ を次のように定める。

$$B\varphi_t(v) = \dot{\gamma}_v(t), \quad v \in UM, \quad -\infty < t < \infty$$

ここで γ_v は B の normal trajectory で $\dot{\gamma}_v(0) = v$ を満たすものとする。一般に2つの flow $\varphi_t : N_1 \rightarrow N_1$ と $\psi_t : N_2 \rightarrow N_2$ とが strong smoothly conjugate であるとは, diffeomorphism $\Psi : N_1 \rightarrow N_2$ および定数 c で $\psi_{ct} \cdot \Psi = \Psi \cdot \varphi_t$ が全ての t について成り立つようなものが存在することをいう。trajectory の表示を調べることにより

定理1 ([1]). 正則断面曲率 c の複素射影空間 $CP^n(c)$ 上のケーラー磁場 $B = \kappa \cdot B_J$ に対する magnetic flow は互いに strong smoothly conjugate である。測地流を φ_t と表すと,

$$\Psi_\kappa^{-1} \cdot B\varphi_t \cdot \Psi_\kappa = \varphi_{\sqrt{\kappa^2 + ct}/\sqrt{c}}$$

を満たす diffeomorphism $\Psi_\kappa : UCP^n \rightarrow UCP^n$ が存在する。

定理2 ([1]). 正則断面曲率 $-c$ の複素双曲空間 $CH^n(-c)$ 上のケーラー磁場 $B = \kappa \cdot B_J$ に対する magnetic flow は

- 1) $\kappa > \sqrt{c}$ および $\kappa < -\sqrt{c}$ の場合の rotation flow
- 2) $\kappa = \sqrt{c}$ および $\kappa = -\sqrt{c}$ の場合の horocyclic flow
- 3) $|\kappa| < \sqrt{c}$ の場合 (測地流に conjugate)

という3つの strong smoothly conjugate class に分類される。

特に3)の場合について測地流 φ_t との関係を表しておく

$$\Psi_\kappa^{-1} \cdot B\varphi_t \cdot \Psi_\kappa = \varphi_{\sqrt{c - \kappa^2}t/\sqrt{c}}$$

を満たす diffeomorphism $\Psi_\kappa : UCH^n \rightarrow UCH^n$ が存在する。従ってこの場

合 magnet-ic flow は hyperbolic であって topological entropy は $\sqrt{c-\kappa^2}/2$ である。

ここで hyperbolic flow について触れておくことにする。多様体 N 上の flow ψ_t が hyperbolic (または Anosov flow) であるとは

1) N の接バンドル TN は3つの $d\psi_t$ -invariant な部分バンドル $E^t \oplus E^s \oplus E^u$ に連続的に分解され

2) E^t は flow の接ベクトルで生成される線バンドル

3) $\|\psi_t(\xi)\| \leq Ce^{-\lambda t}\|\xi\|$, $\xi \in E^s$, $t > 0$

$\|\psi_{-t}(\xi)\| \leq Ce^{-\lambda t}\|\xi\|$, $\xi \in E^u$, $t > 0$

を満たす正の定数 C , λ が存在する。

の条件を満たしていることをいう。コンパクト負曲率多様体の測地流が hyperbolic であることは良く知られている。hyperbolic という性質について構造安定性 (hyperbolic な flow を少し perturb しても hyperbolic という性質が保たれること) が成り立つので $|\kappa|$ が十分小さければ対応する magnetic flow は hyperbolic であることは自明である。定理2は hyperbolic flow から horocyclic flow へ自然に変形していけることを示している点が重要である。

なお $n = 1$ の場合 $CP^1(c)$ は断面曲率 c の球面 $S^2(c)$, $CH^n(-c)$ は断面曲率 $-c$ の双曲平面 $H^2(-c)$ とし, volume form を Kaehler form と考える。

4. Magnetic Jacobi 場

前節ではモデル空間における磁場のついて考察したが, 一般の空間ではどうなっているかを考察することにしよう。このために測地線の時に使われた概念をいくつか拡張しておくことにする。

完備リーマン多様体 M 上の一様磁場 B を考える。この磁場の trajectory γ に沿ったベクトル場 Y が B の magnetic Jacobi 場であるとは,

$$(MJ) \quad \nabla_{\dot{\gamma}} \nabla_{\dot{\gamma}} Y - \Omega(\nabla_{\dot{\gamma}} Y) + R(Y, \dot{\gamma})\dot{\gamma} = 0$$

を満たすことをいう。(2節の第2変分の式を見れば両端点を固定した変分についての null 方向を与えている。) まず $\dot{\gamma}$ 自身 γ に沿った B の magnetic Jacobi 場になる。 B の magnetic Jacobi 場は B の trajectory の変分により得られ $2\dim(M)$ 次元ベクトル空間をなす。magnetic Jacobi 場 Y について $\langle \nabla_{\dot{\gamma}} Y, \dot{\gamma} \rangle$ は γ 上で一定の値を取るが、特に $\langle \nabla_{\dot{\gamma}} Y, \dot{\gamma} \rangle = 0$ を満たすとき *normal* であるという。normal magnetic Jacobi 場は normal trajectory の変分により得られ $2\dim(M)-1$ 次元ベクトル空間をなし、normal trajectory の考察に非常に役にたつ。 γ に沿った B の normal magnetic Jacobi 場 Y で

$$Y(0) = 0 \text{ かつ } \text{Proj}(Y(t_0)) = 0$$

を満たすものが存在する時、点 $\gamma(t_0)$ は $\gamma(0)$ の γ に沿った B に関する *magnetic conjugate point* であるという。ここで $\text{Proj} : T_{\gamma(t_0)} M \rightarrow \langle \dot{\gamma}(t_0) \rangle \frac{1}{\mathbb{R}}$ は射影を表す。また t_0 を $\gamma(0)$ の B に関する *magnetic conjugate value* と呼び、この様な t_0 のうち正のものがあればその最小値を $t_c(\gamma(0))$ と表すことにする。magnetic Jacobi 場 Y を考えるとき trajectory に直交する成分 $Y^\# = \text{Proj}(Y)$ が重要なのである。まずモデル空間での様子を調べてみよう。

例1. 複素空間 \mathbb{C}^n 上のケーラー磁場 $\kappa \cdot B_j$ の normal trajectory γ に沿った normal magnetic Jacobi 場は $Y(0) = 0$ とすると

$$Y(t) = a\{(1-\cos \kappa t)\dot{\gamma}(t) + \sin \kappa t J \dot{\gamma}(t)\} + (\gamma(t), (1-e^{\kappa i t})A)$$

と表示され、magnetic conjugate value は $\pi j / \kappa$, $j = \pm 1, \pm 2, \dots$ である。

例2. 正則断面曲率 c の複素射影空間 $CP^n(c)$ 上のケーラー磁場 $\kappa \cdot B_J$ の normal trajectory γ に沿った normal magnetic Jacobi 場は $Y(0) = 0$ とすると

$$Y(t) = \alpha \{ \kappa(1 - \cos\sqrt{\kappa^2 + ct})\dot{\gamma}(t) + \sqrt{\kappa^2 + c} \sin\sqrt{\kappa^2 + ct} J\dot{\gamma}(t) \} \\ + d\pi \left(\dot{\gamma}(t), e^{\kappa it/2} \left(\sin\frac{1}{2}\sqrt{\kappa^2 + ct} A + \cos\frac{1}{2}\sqrt{\kappa^2 + ct} B \right) \right)$$

と表示される。ここで $\dot{\gamma}$ は γ の S^{2n+1} への horizontal lift の1つで、 $A, B \in \mathbb{C}^{n+1}$ は \mathbb{C}^{n+1} の標準内積を (\cdot, \cdot) と表したとき $(A, \dot{\gamma}(0)) = (A, \dot{\gamma}(0)) = (B, \dot{\gamma}(0)) = (B, \dot{\gamma}(0))$ を満たすものである。従って magnetic conjugate value は $\pi j / \sqrt{\kappa^2 + c}$, $j = \pm 1, \pm 2, \dots$ である。

例3. 正則断面曲率 $-c$ の複素双曲空間 $CH^n(-c)$ 上のケーラー磁場 $\kappa \cdot B_J$ の normal trajectory γ に沿った normal magnetic Jacobi 場は $Y(0) = 0$ とすると

1) $|\kappa| > \sqrt{c}$ の場合

$$Y(t) = \alpha \{ \kappa(1 - \cos\sqrt{\kappa^2 - ct})\dot{\gamma}(t) + \sqrt{\kappa^2 - c} \sin\sqrt{\kappa^2 - ct} J\dot{\gamma}(t) \} \\ + d\pi \left(\dot{\gamma}(t), e^{\kappa it/2} \left(\sin\frac{1}{2}\sqrt{\kappa^2 - ct} A + \cos\frac{1}{2}\sqrt{\kappa^2 - ct} B \right) \right)$$

と表示され、magnetic conjugate value は $\pi j / \sqrt{\kappa^2 - c}$, $j = \pm 1, \pm 2, \dots$ である。

2) $\kappa = \pm \sqrt{c}$ の場合

$$Y(t) = \alpha \{ ct^2/2 \cdot \dot{\gamma}(t) + \kappa t J\dot{\gamma}(t) \} + d\pi \left(\dot{\gamma}(t), e^{\kappa it/2} (tA + B) \right)$$

3) $|\kappa| < \sqrt{c}$ の場合

$$Y(t) = \alpha \{ \kappa(1 - \cosh\sqrt{c - \kappa^2} t)\dot{\gamma}(t) + \sqrt{c - \kappa^2} \sinh\sqrt{c - \kappa^2} t J\dot{\gamma}(t) \}$$

$$+ d\pi(\gamma(t), e^{\kappa it/2}(\sinh \frac{1}{2}\sqrt{c-\kappa^2}tA + \cosh \frac{1}{2}\sqrt{c-\kappa^2}tB))$$

と表示され, $|\kappa| \leq \sqrt{c}$ の場合 magnetic conjugate point を持たない。

Jacobi 場の比較定理に対応して Kaehler magnetic Jacobi 場についても trajectory に直交する成分に関して比較定理が成り立つ。ケーラー磁場 $B = \kappa \cdot B_J$ の normal trajectory に直交するベクトル場 $W = hJ\dot{\gamma} + W^\perp$ に対して index form を

$$J_T(W) = \int_0^T h^2 - \kappa^2 h^2 + \langle \nabla W^\perp - \kappa J W^\perp, \nabla W^\perp \rangle - \langle R(W, \dot{\gamma})\dot{\gamma}, W \rangle dt$$

と定める。B に関する normal magnetic Jacobi 場 Y が $Y^\#(0) = W(0) = 0$, $Y^\#(T) = W(T)$ を満たすと $J_T(Y^\#) \leq J_T(W)$ となることから,

定理3 ([3]). 2つのケーラー多様体 M, \hat{M} 上の同じ強さのケーラー磁場 $B = \kappa \cdot B_J, \hat{B} = \kappa \cdot \hat{B}_J$ を考える。 Y, \hat{Y} は B, \hat{B} の normal trajectory $\gamma, \hat{\gamma}$ に沿った normal magnetic Jacobi 場とする。いま

$$a) \inf \langle R_M(v, \dot{\gamma}(t))\dot{\gamma}(t), v \rangle \geq \sup \langle R_{\hat{M}}(v, \dot{\hat{\gamma}}(t))\dot{\hat{\gamma}}(t), v \rangle, \\ (0 \leq t \leq t_c(\gamma(0)))$$

b) $\dim(M) \geq \dim(\hat{M})$
と仮定すると,

- 1) $t_c(\hat{\gamma}(0)) \geq t_c(\gamma(0))$
- 2) $Y^\#(0) = 0, \hat{Y}^\#(0) = 0, \|\nabla Y^\#(0)\| = \|\nabla \hat{Y}^\#(0)\|$ ならば $\|Y^\#(t)\| \leq \|\hat{Y}^\#(t)\|$

γ に沿った B の normal magnetic Jacobi 場 Y で

$$(\nabla Y^\#)^\#(0) = 0 \text{ かつ } Y^\#(t_0) = 0$$

を満たすものが存在する時, 点 $\gamma(t_0)$ は $\gamma(0)$ の γ に沿った B に関する magnetic focal point であるという。また t_0 を $\gamma(0)$ の B に関する magnetic focal value と呼ぶことにし, この様な t_0 のうち正のものがあればその最小値を $t_f(\gamma(0))$ と表すことにする。

定理 3' ([3]). 2つのケーラー多様体 M, \hat{M} 上の同じ強さのケーラー磁場 $B = \kappa \cdot B_J, \hat{B} = \kappa \cdot \hat{B}_J$ を考える。 Y, \hat{Y} は B, \hat{B} の normal trajectory $\gamma, \hat{\gamma}$ に沿った normal magnetic Jacobi 場とする。いま

$$a) \inf \langle R_M(v, \dot{\gamma}(t)) \dot{\gamma}(t), v \rangle \geq \sup \langle R_{\hat{M}}(v, \dot{\hat{\gamma}}(t)) \dot{\hat{\gamma}}(t), v \rangle, \\ (0 \leq t \leq t_f(\gamma(0)))$$

$$b) \dim(M) \geq \dim(\hat{M})$$

と仮定すると,

$$1) t_f(\hat{\gamma}(0)) \geq t_f(\gamma(0))$$

$$2) \|Y^\#(0)\| = \|\hat{Y}^\#(0)\|, (\nabla Y^\#)^\#(0) = 0, (\nabla \hat{Y}^\#)^\#(0) = 0 \text{ ならば} \\ \|Y^\#(t)\| \leq \|\hat{Y}^\#(t)\|$$

次に magnetic flow と normal magnetic Jacobi 場との関係について述べておく。射影を $\tau_M : TM \rightarrow M$ 接続写像を $\mathcal{K} : TTM \rightarrow TM$ と表すと TTM の horizontal subbundle \mathcal{H} および vertical subbundle \mathcal{V} への分解は $(\tau_M, \mathcal{K}) : TTM \rightarrow TM \oplus TM = \mathcal{H} \oplus \mathcal{V}$ で与えられる。以下この表示を使うことにする。 B の normal trajectory γ は $\dot{\gamma}(0) = v$ を満たすとす。ベクトル

$$\xi = (\xi_{\mathcal{H}}, \xi_{\mathcal{V}}) \in T_{\gamma(0)} TM \subset \mathcal{H}_{\gamma(0)} \oplus \mathcal{V}_{\gamma(0)}$$

に対し normal magnetic Jacobi 場 Y を

$$Y(0) = \xi_{\mathcal{H}}, \nabla_{\dot{\gamma}} Y(0) = \xi_{\mathcal{V}}$$

と取ると

$$d\mathcal{B}\mathcal{V}_t(\xi) = (Y(t), \nabla_{\dot{\gamma}} Y(t))$$

となる。従って $d\mathcal{B}\mathcal{V}_t$ -invariant な subbundle は normal magnetic Jacobi 場から構成できる。

曲面上の一樣磁場とケーラー磁場とは少しだけ様子が異なり，曲面上の一樣磁場の方が易しいのでまず前者について述べることにする。断面曲率 $-c$ の双曲平面 $H^2(-c)$ 上の一樣磁場 $B = \kappa \cdot \text{Vol}$ で $|\kappa| < \sqrt{c}$ である場合の magnetic flow に対する $TU H^2(-c)$ の分解に付いて，

$$Y^S(t) = \exp(-\sqrt{c-\kappa^2}t) \{ \kappa \dot{\gamma}(t) - \sqrt{c-\kappa^2} J \dot{\gamma}(t) \}$$

$$Y^U(t) = \exp(\sqrt{c-\kappa^2}t) \{ \kappa \dot{\gamma}(t) + \sqrt{c-\kappa^2} J \dot{\gamma}(t) \}$$

が γ に沿った stable, unstable normal magnetic Jacobi 場になることから，

$$E_{\mathcal{V}}^t = \{ \lambda(v, \kappa J v) \in \mathcal{H}_v \oplus \mathcal{V}_v \mid \lambda \in \mathbb{R} \}$$

$$E_{\mathcal{V}}^S = \{ \lambda(\kappa v - \sqrt{c-\kappa^2} J v, c J v) \in \mathcal{H}_v \oplus \mathcal{V}_v \mid \lambda \in \mathbb{R} \}$$

$$E_{\mathcal{V}}^U = \{ \lambda(\kappa v + \sqrt{c-\kappa^2} J v, c J v) \in \mathcal{H}_v \oplus \mathcal{V}_v \mid \lambda \in \mathbb{R} \}$$

により与えられ，この分解は滑らかである。曲率条件 $-\beta^2 \leq \text{Riem}_M \leq -\alpha^2$ ($0 < \alpha \leq \beta$) を満たす一般の負曲率曲面 M 上の一樣磁場 $B = \kappa \cdot \text{Vol}$ で $|\kappa| < \alpha$ となるものの magnetic flow についても，normal magnetic Jacobi 場との関係を利用することにより，各 orbit ρ に対応して $TU M|_{\rho}$ の分解が以下のようにして与えられる。関数 G は

$$(R) \quad G'(t) + G^2(t) + \kappa^2 + R_t = 0,$$

$$\sqrt{\alpha^2 - \kappa^2} \leq G(t) \leq \sqrt{\beta^2 - \kappa^2}$$

を満たす唯一の関数, F はこの G に対して

$$(L) \quad F'(t) = \kappa - G(t)F(t)$$

$$\kappa/\sqrt{\beta^2 - \kappa^2} \leq F(t) \leq \kappa/\sqrt{\alpha^2 - \kappa^2}$$

を満たす唯一の関数とする。ただし $R_t(\cdot) = R(\cdot, \dot{\gamma}(t))\dot{\gamma}(t)$ とする。2つの方程式 (R) と (L) は normal magnetic Jacobi 場の方程式を書き換えたものである。この時 γ に沿った stable, unstable normal magnetic Jacobi 場は

$$Y^S(t) = g^S(t)(F(-t)\dot{\gamma}(t) - J\dot{\gamma}(t)),$$

$$Y^U(t) = g^U(t)(F(t)\dot{\gamma}(t) + J\dot{\gamma}(t)),$$

$$g^S(t) = \exp\left(-\int_0^t G(-s)ds\right), \quad g^U(t) = \exp\left(\int_0^t G(s)ds\right)$$

と表されるので

$$E_t^t = \{\lambda(\dot{\gamma}(t), \kappa J\dot{\gamma}(t)) \in \mathcal{N}_{\dot{\gamma}(t)} \oplus \mathcal{U}_{\dot{\gamma}(t)} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$$

$$E_t^S = \{\lambda(F(-t)\dot{\gamma}(t) - J\dot{\gamma}(t), (\kappa F(-t) + G(-t))J\dot{\gamma}(t)) \in \mathcal{N}_{\dot{\gamma}(t)} \oplus \mathcal{U}_{\dot{\gamma}(t)} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$$

$$E_t^U = \{\lambda(F(t)\dot{\gamma}(t) + J\dot{\gamma}(t), (\kappa F(t) + G(t))J\dot{\gamma}(t)) \in \mathcal{N}_{\dot{\gamma}(t)} \oplus \mathcal{U}_{\dot{\gamma}(t)} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$$

と分解することができる。

命題2 ([4]). 曲率条件 $-\beta^2 \leq \text{Riem}_M \leq -\alpha^2$ を満たす曲面 M 上の一様磁場 $B = \kappa \cdot \text{Vol}$ ($|\kappa| < \alpha$) を考える。normal trajectory γ による $B\varphi_t$ -orbit π 上のバンドル $TUM|_\pi$ の上記の連続的な分解 $T_{\dot{\gamma}(t)}UM = E_t^t \oplus E_t^S \oplus E_t^U$ について, 任意の $t \geq 0$ と t_0 に対して

1) $\xi \in E_{t_0}^S$ であれば

$$\begin{aligned} \left(\frac{\beta^2 - \kappa^2}{\alpha^2 - \kappa^2}\right)^{\frac{1}{2}} \|\xi\| \exp(-\sqrt{\alpha^2 - \kappa^2}(t-t_0)) &\geq \|dB\psi_t(\xi)\| \\ &\geq \left(\frac{\alpha^2 - \kappa^2}{\beta^2 - \kappa^2}\right)^{\frac{1}{2}} \|\xi\| \exp(-\sqrt{\beta^2 - \kappa^2}(t-t_0)) \end{aligned}$$

2) $\xi \in E_{t_0}^u$ であれば

$$\begin{aligned} \left(\frac{\beta^2 - \kappa^2}{\alpha^2 - \kappa^2}\right)^{\frac{1}{2}} \|\xi\| \exp(\sqrt{\beta^2 - \kappa^2}(t-t_0)) &\geq \|dB\psi_t(\xi)\| \\ &\geq \left(\frac{\alpha^2 - \kappa^2}{\beta^2 - \kappa^2}\right)^{\frac{1}{2}} \|\xi\| \exp(\sqrt{\alpha^2 - \kappa^2}(t-t_0)) \end{aligned}$$

が成り立つ。

正則断面曲率 $-c$ の複素双曲空間 $CH^n(-c)$ 上のケーラー磁場 $\kappa \cdot B_J$, $|\kappa| < \sqrt{c}$ に対しても normal trajectory γ に沿った stable, unstable normal magnetic Jacobi 場が

$$\begin{aligned} Y^s(t) &= \exp(-\sqrt{c-\kappa^2}t) \{ \kappa \dot{\gamma}(t) - \sqrt{c-\kappa^2} J \dot{\gamma}(t) \} \\ &\quad + d\pi \left(\dot{\gamma}(t), \exp \frac{1}{2} (-\sqrt{\kappa^2 - c} + \kappa i) t A \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y^u(t) &= \exp(\sqrt{c-\kappa^2}t) \{ \kappa \dot{\gamma}(t) + \sqrt{c-\kappa^2} J \dot{\gamma}(t) \} \\ &\quad + d\pi \left(\dot{\gamma}(t), \exp \frac{1}{2} (\sqrt{\kappa^2 - c} + \kappa i) t A \right) \end{aligned}$$

で与えられるので $TUCh^n(-c)$ の滑らかな分解が与えられる。一般の負曲率ケーラー多様体 M の Kaehler magnetic flow について, 各 orbit μ に対応して $TUM|_{\mu}$ の分解が曲面の場合と同様にして与えられる。ケーラー磁場

$B = \kappa \cdot B_J$ の normal trajectory γ に直交する空間 $\langle \dot{\gamma}(t) \rangle_{\mathbb{R}}^{\perp}$ を $\langle J\dot{\gamma}(t) \rangle_{\mathbb{R}} \oplus \langle J\dot{\gamma}(t) \rangle_{\mathbb{C}}^{\perp}$ と分解する。 γ に直交するベクトル場 $W = hJ\dot{\gamma} + W^{\perp}$ に対して $\text{Proj} \cdot \nabla(W) = h'J\dot{\gamma} + \nabla W^{\perp}$ を対応させる作用素 $L(t) = G(t) \oplus S(t)$ を考える。

$$U(t) = S(t) - \frac{1}{2}\kappa J : \langle J\dot{\gamma}(t) \rangle_{\mathbb{C}}^{\perp} \rightarrow \langle J\dot{\gamma}(t) \rangle_{\mathbb{C}}^{\perp}$$

として $P(t) = G(t) \oplus U(t)$ とおくと normal Jacobi 場の方程式は

$$(R) \quad P'(t) + P^2(t) + \kappa^2(1 \oplus \frac{1}{4}Id) + R_t = 0$$

と書き換えられる。ただし $R_t : \langle \dot{\gamma}(t) \rangle_{\mathbb{R}}^{\perp} \rightarrow \langle \dot{\gamma}(t) \rangle_{\mathbb{R}}^{\perp}$ は曲率ベクトル

$R_t(W) = R(W, \dot{\gamma}(t))\dot{\gamma}(t)$ を表すものとする。この時 (R) を満たす P で

その固有値がすべて $[\sqrt{\alpha^2 - \kappa^2}, \sqrt{\beta^2 - \kappa^2}/4]$ に含まれるものが取れる。従って、

命題 2'. 曲率条件 $-\beta^2 \leq \text{Riem}_M \leq -\alpha^2$ を満たすケーラー多様体 M 上のケーラー磁場 $B = \kappa \cdot B_J$ ($|\kappa| < \alpha$) を考える。normal trajectory γ による $B\mathcal{V}_t$ -orbit を π と表すと、バンドル $TUM|_{\pi}$ は以下の性質を満たすように連続的に $T_{\dot{\gamma}(t)}UM = E_t^t \oplus E_t^s \oplus E_t^u$ と分解される。

$$1) \quad E_t^t = \{ \lambda(\dot{\gamma}(t), \kappa J\dot{\gamma}(t)) \in \mathcal{H}_{\dot{\gamma}(t)} \oplus \mathcal{V}_{\dot{\gamma}(t)} \mid \lambda \in \mathbb{R} \}$$

2) 任意の $t \geq 0$ と t_0 に対して

$\xi \in E_{t_0}^s$ であれば

$$\left(\frac{\beta^2 - \kappa^2/4}{\alpha^2 - \kappa^2} \right)^{\frac{1}{2}} \|\xi\| \exp\left(-\sqrt{\alpha^2 - \kappa^2}(t - t_0)\right) \geq \|dB\mathcal{V}_t(\xi)\|$$

$$\geq \left(\frac{\alpha^2 - \kappa^2}{\beta^2 - \kappa^2/4} \right)^{\frac{1}{2}} \|\xi\| \exp(-\sqrt{\beta^2 - \kappa^2/4}(t-t_0))$$

$\xi \in E_{t_0}^u$ であれば

$$\left(\frac{\beta^2 - \kappa^2/4}{\alpha^2 - \kappa^2} \right)^{\frac{1}{2}} \|\xi\| \exp(\sqrt{\beta^2 - \kappa^2/4}(t-t_0)) \geq \|dB\varphi_t(\xi)\|$$

$$\geq \left(\frac{\alpha^2 - \kappa^2}{\beta^2 - \kappa^2/4} \right)^{\frac{1}{2}} \|\xi\| \exp(\sqrt{\alpha^2 - \kappa^2}(t-t_0))$$

この命題により各 orbit に対しての分解が示せたので hyperbolicity をいうためには orbit に関する連続性を示せば良いことになる。このために trajectory の無限遠点での挙動が問題になる。

5. 負曲率曲面上の一樣磁場の軌道

磁場 B に対して magnetic exponential map $B\exp_p : T_p M \rightarrow M$ を

$$B\exp_p(v) = \gamma_{v_0}(\|v\|), \quad v \neq 0_p, \quad B\exp_p(0_p) = p$$

と定める。ただし $v_0 = v/\|v\| \in U_p M$, $0_p \in T_p M$ は origin を表すものとする。magnetic exponential map の origin での微分は $dB\exp_p(0_p) = I$ となり局所同型である。そして

$$\text{Proj} \cdot dB\exp_p(t_0 v) : T_{t_0 v}(t_0 \cdot U_p M) \rightarrow \langle \gamma_v(t_0) \rangle_{\mathbb{R}}$$

が退化するための必要十分条件は、 $\gamma_v(t_0)$ が $\gamma_v(0)$ の γ_v に沿った B に関する magnetic conjugate point であることとなる。前節の比較定理を利用すれば、ケーラー多様体 M が曲率条件 $\text{Riem}_M \leq -\alpha^2 < 0$ を満たしているとき、ケーラー磁場 $B = \kappa \cdot B_J$ が $|\kappa| < \alpha$ であれば magnetic expo-

ponential map $B\exp_p$ は各点で非退化であることが分かる。この条件のもとで $B\exp_p$ は covering map と予想されるが, Hopf-Rinow の定理に対応する部分が難しく, 残念ながら著者はまだ証明できていない。

そこで対象を曲面に限ることにする。この場合 trajectory γ に直交する測地線族が作る γ -Jacobi 場を考察することにより,

命題3 ([2]). Hadamard 曲面 M が曲率条件 $Riem_M \leq -\alpha^2$ を満たすとき, この上の一様磁場 $\kappa \cdot Vol$ ($|\kappa| \leq \alpha$) の normal trajectory は両方向に unbounded で無限遠点を持つ。しかも $|\kappa| < \alpha$ であれば無限遠点は2つになる。

命題2, 3から magnetic exponential map の全単写性がわかり,

命題4 ([3]). 曲面 M が曲率条件 $Riem_M \leq -\alpha^2$ を満たすとき, この上の一様磁場 $B = \kappa \cdot Vol$ ($|\kappa| \leq \alpha$) に関する magnetic exponential map $B\exp_p : T_p M \rightarrow M$ は covering map である。

系. Hadamard 曲面 M は曲率条件 $-\beta^2 \leq Riem_M \leq -\alpha^2$ を満たしている。この上の一様磁場 $B = \kappa \cdot Vol$ ($|\kappa| < \alpha$) を考えると, 任意の2点 $p, q \in \bar{M}$, $p \neq q$ に対して p から q への normal trajectory がただ1つ存在する。

この系の考察から曲率条件 $-\beta^2 \leq Riem_M \leq -\alpha^2$ を満たす Hadamard 曲面 M について, $v_1, v_2 \in UM$ に対して $u(v_1, v_2) \in UM$ で

$$\gamma_{v_1}^{(\infty)} = \gamma_{u_+(v_1, v_2)}^{(\infty)}, \quad \gamma_{v_2}^{(-\infty)} = \gamma_{u_+(v_1, v_2)}^{(-\infty)}$$

を満たすものが存在し連続的に挙動する。従って,

定理4 ([4]). 曲面 M が曲率条件 $-\beta^2 \leq \text{Riem}_M \leq -\alpha^2$ を満たすとき, この上の一様磁場 $B = \kappa \cdot \text{Vol.}$ ($|\kappa| < \alpha$) に関する magnetic flow $B\varphi_t$ は hyperbolic である。

6. 複素双曲空間上の円

前節の考察でも考えたように trajectory の漸近的な挙動が重要であり, 命題3, 4はケーラー磁場についても正しいであろうと思われる。この節では参考のために複素双曲空間上の円の挙動をまとめておく。複素空間形 (複素射影空間, 複素双曲空間) 上では測地曲率と complex torsion とにより holomorphic な合同クラスが定まる。即ち, 複素空間形上の2つの円 γ, σ について, holomorphic isometry ϕ で $\sigma = \phi \circ \gamma$ となるものが存在するための必要十分条件は, 両者の測地曲率と complex torsion が一致することである。第2節の例3のようにファイブレーションを利用して考察すると,

命題5 ([6]). 定数 τ ($|\tau| \leq 1$) に対して $27k^2\tau^2 = 4(k^2-1)^3$ の正の (実数) 解を κ_τ とおく。複素双曲空間 $\text{CH}^n(-c)$ 上の測地曲率 κ complex torsion τ の円 γ について次のことが成り立つ。

- 1) $\kappa \leq \sqrt{c}\kappa_\tau/2$ ならば γ は両方向に unbounded な単純曲線で無限遠点を持つ。
- 2) $\kappa < \sqrt{c}\kappa_\tau/2$ ならば無限遠点は2つであり, $\kappa = \sqrt{c}\kappa_\tau/2$ ならば無限遠点は1つになる。
- 3) $\kappa = \sqrt{c}\kappa_\tau/2$ の時 $\gamma(t_0)$ と $\gamma(\infty)$ とを結ぶ測地線 ρ とは $\gamma(t_0)$ で直交する。
- 4) $\kappa \geq \sqrt{c}\kappa_\tau/2$ ならば γ は有界な単純曲線で,
 - a) $\tau = 0$ の時 closed で周期 $4\pi/\sqrt{4\kappa^2-c}$

b) $\tau = \pm 1$ の時も closed で周期 $2\pi/\sqrt{\kappa^2-c}$

c) $0 < |\tau| < 1$ の時は 3 次の代数方程式

$$c\lambda^3 - (4\kappa^2 - c)\lambda - 2\sqrt{c}\kappa\tau = 0$$

の 3 つの解 a, b, d ($a < b < d$) について

i) $a/b, b/d, d/a$ が有理数であれば closed で周期は $4\pi/\sqrt{c}(b-a)$

と $4\pi/\sqrt{c}(d-a)$ との最小公倍数。

ii) $a/b, b/d, d/a$ が有理数でなければ開曲線になる。

なおこの命題の κ_τ は曲率の言葉で表すことができる。

最近、合田徳夫氏（東京大学数理科学研究科）により、一般の一様磁場及び曲面上の磁場の magnetic flow に付いても定理 4 のタイプの定理が証明されたらしい。申し訳ないが著者は彼の証明法を知らない。[15] を見る限りでは無限遠点での様子を調べる必要はなくこのノートでの方法とは少し異なるようである。また糸川-小林-園部[16]の研究により magnetic Jacobi 場の考察がケーラー多様体の研究に役立つことが報告されている。

References

- [1] T. Adachi, Kaehler magnetic flows for a manifold of constant holomorphic sectional curvature, preprint, Nov., 1993.
- [2] ———, Curvature bound and trajectories for magnetic fields on a Hadamard surface, to appear in Tsukuba J. Math.
- [3] ———, Magnetic Jacobi fields and exponential maps on Riemann surfaces, preprint, Feb., 1994.
- [4] ———, Magnetic flows for a surface of negative curvature, preprint, March, 1994.
- [5] T. Adachi, S. Maeda and S. Udagawa, Circles in a complex

- projective space, to appear in Osaka J. Math.
- [6] T. Adachi and S. Maeda, Global behaviours of circles in a complex hyperbolic space, preprint Jan., 1994.
- [7] D. Anosov, Geodesic flows on closed Riemannian manifolds of negative curvature, Proc Steklov Inst. Mat., Providence, R.I.A.M.S. 1967.
- [8] W. Ballmann, M. Gromov and V. Schroeder, *Manifolds of nonpositive curvature*, Progress in Math. 61(1985), Birkhauser.
- [9] J. Cheeger and D. Ebin, *Comparison theorems in Riemannian geometry*, North Holland, 1975.
- [10] A. Comtet, On the Landau levels on hyperbolic plane, Ann of Phys. 173(1987), 185-209.
- [11] P. Eberline, When is a geodesic flow of Anosov type? I, II, J. Diff. Geom. 8(1972), 437-463 & 565-577.
- [12] W. Klingenberg, *Riemannian Geometry*, Walter de Gruyter, 1982.
- [13] K. Nomizu and K. Yano, On circles and spheres in Riemannian geometry, Math. Ann. 210(1974), 163-170.
- [14] T. Sunada, Magnetic flows on a Riemann surface, Proc. KAIST Math. Workshop, 8(1993), *Analysis and Geometry*, 93-108.
- [15] N. Gohda, Magnetic flows on Riemannian manifolds, 研究集会「大域解析と幾何」予稿集(岡山大学 1995.1.9.12), 60-65.
- [16] Y. Itokawa, R. Kobayashi, Y. Sonobe, Magnetic fields and rigidity of positively curved Kaehler manifolds, preprint (Nagoya Univ.) 1995

Toshiaki ADACHI

Nagoya Institute of Technology,

Gokiso, Showa-ku, Nagoya 466, Japan

e-mail adress: d43019a@nucc.cc.nagoya-u.ac.jp