数理解析研究所講究録
907巻 1995年 44-51

複素空間形の複素螺旋について

前田定廣（島根大学理学部）

はじめに.

M を n 次元 Kaehler 多様体、J と $<,>$ をそれぞれ M の複素構造とリーマン計量とする。$\gamma = \gamma(t)$ ($t : \gamma$ の弧長）を M 上の $d(\leq 2n)$ 次の螺旋、$\{V_1, \cdots, V_d\}$ を γ 上のフレネ標構とするとき、我々は γ の複素れい率(complex torsions) $\tau_{ij}(t)$ を次のように定義する: $\tau_{ij}(t) = < V_i(t), JV_j(t) >$ $(1 \leq i < j \leq d)$. Kaehler 多様体上の螺旋の研究において複素れい率は重要な働きをする。我々は、すべての複素れい率がそれぞれ一定である螺旋を複素螺旋(complex helix)と呼ぶことにする。論文 [3] において、「複素空間形（即ち、複素射影空間、複素双曲空間または複素ユークリッド空間）内の任意の曲線 γ が複素螺旋になるための必要十分条件は、γ が複素キリングベクトル場の積分曲線になることである。」が示されている。これは、「実空間形内の任意の曲線 γ が螺旋になるための必要十分条件は、γ がキリングベクトル場の積分曲線になることである。」と言う事実の complex version になっている。このことからもわかるように複素空間形の幾何学において、複素螺旋の研究は基本的なものの一つである。

本稿の主たる目的は、複素空間形内の3次の複素螺旋全体の作る moduli を調べることにある。1次の螺旋は当然のことながら測地線である。2次の螺旋は通常、円 (*circle*) と呼ばれる。これら1次及び2次の螺旋は、すべて複素螺旋である。しかし、3次以上の螺旋の族では、複素螺旋でないものが無数に存在する。これを精密に述べると n 次元複素空間形では、3次の複素螺旋全体の成す *moduli* 空間は $n \geq 3$ のときは、3個の実数でパラメトライズされ、$n = 2$ のときは、2個の実数でパラメトライズされる（参照: 定理5）。これ以外の結果として2次元の複素空間形のすべての複素螺旋全体の成す *moduli* 空間を調べた（詳しくは、定理4、5を参照)。尚、本稿は *T. Adachi* との *joint work* を解説したものである。

1. 複素螺旋の複素れい率.

まず、螺旋の定義を復習しよう。弧長 t でパラメトライズされた曲線 $\gamma = \gamma(t)$ が本来 d 次の螺旋 *(a helix of proper order d)* とは、γ 上の正規直交標構 $\{V_1 = \dot{\gamma}, \cdots, V_d\}$ と正数 $k_1, \cdots, k_{d-1}$ が存在して、 γ が次の微分方程式系を満たすことを言う。

$$\nabla_t V_j(t) = -k_{j-1}V_{j-1}(t) + k_j V_{j+1}(t), \quad j = 1, \cdots, d \tag{1.1}$$

ここで、 $V_0 = V_{d+1}$ で ∇_t は γ に沿った共変微分を表す。そして、定数 k_j $(1 \le j \le d-1)$ をγ の曲率、$\{V_1, \cdots, V_d\}$ を γ のフレネ標構と呼ぶ。曲線 γ が d 次の螺旋 *(a helix of order d)* とは　γ が本来 $r(\le d)$ 次の螺旋のことである。このときは *(1.1)* において $k_j = 0$ $(r \le j \le d-1)$, $V_j = 0$ $(r+1 \le j \le d)$ と考えることにする。ここで、*Kaehler* 多様体上の任意の螺旋は実解析的な曲線であることに注意。

複素れい率の定義より $|\tau_{ij}(t)| \le 1$ が常に成立しているが、これから複素螺旋の曲率と複素れい率が満たすべき関係式を調べて見よう:

複素螺旋の複素れい率を微分することにより *(1.1)* から

$$\frac{d}{dt}\tau_{ij}(t) = -k_{i-1}\tau_{i-1,j}(t) + k_i\tau_{i+1,j}(t) - k_{j-1}(t)\tau_{i,j-1}(t) + k_j\tau_{i,j+1}(t),$$

これより次の結果を得た:

命題 1 . **Kaehler** 多様体上の本来 d(:奇数) 次の複素螺旋の複素れい率は、次の関係式を満たす。

$$\begin{aligned}
\tau_{i,i+2k} &= 0 \text{ for } i = 1, 2, \cdots, d-2k;\ k = 1, 2, \cdots, (d-1)/2, \\
k_1\tau_{2d} &= k_{d-1}\tau_{1,d-1}, \\
k_1\tau_{2j} + k_j\tau_{1,j+1} &= k_{j-1}\tau_{1,j-1} \text{ for } j = 3, 5, \cdots, d-2, \\
k_{i-1}\tau_{i-1,d} + k_{d-1}\tau_{i,d-1} &= k_i\tau_{i+1,d} \text{ for } i = 3, 5, \cdots, d-2, \\
k_{i-1}\tau_{i-1,j} + k_{j-1}\tau_{i,j-1} &= k_i\tau_{i+1,j} + k_j\tau_{i,j+1} \\
&\qquad \text{for } i = 2, 3, \cdots, d-3,\ j = i+2, i+4, \cdots, d-1.
\end{aligned}$$

命題 2 . Kaehler 多様体上の本来 d(:偶数) 次の複素螺旋の複素れい率は、次の関係式を満たす。

$$
\begin{aligned}
\tau_{i,i+2k} &= 0 \text{ for } i = 1, 2, \cdots, d-2k;\ k = 1, 2, \cdots, (d-2)/2, \\
k_1 \tau_{2d} &= k_{d-1} \tau_{1,d-1}, \\
k_1 \tau_{2j} + k_j \tau_{1,j+1} &= k_{j-1} \tau_{1,j-1} \text{ for } j = 3, 5, \cdots, d-1, \\
k_{i-1} \tau_{i-1,d} + k_{d-1} \tau_{i,d-1} &= k_i \tau_{i+1,d} \text{ for } i = 2, 4, \cdots, d-2, \\
k_{i-1} \tau_{i-1,j} + k_{j-1} \tau_{i,j-1} &= k_i \tau_{i+1,j} + k_j \tau_{i,j+1} \\
&\qquad \text{for } i = 2, 3, \cdots, d-3,\ j = i+2, i+4, \cdots, d-1.
\end{aligned}
$$

逆に Kaehler 多様体 M 上の螺旋 γ がある点 p において命題 1 又は命題 2 の関係式を満たしているならば、γ のすべての複素れい率の任意の n 次導関数は点 p において零になるから曲線 γ の解析性より γ は複素螺旋になる。よって、常微分方程式の解の一意性より次の結果を得る：

命題 3 . Kaehler 多様体上の点 p における正規直交ベクトル $v_1, \cdots, v_d$ に対して $\tau_{ij} = < v_i, Jv_j > (1 \leq i < j \leq d)$ と置く。このとき、この τ_{ij} が適当な正数 $k_1, \cdots, k_{d-1}$ に対して命題 1 又は命題 2 の関係式を満たすならば、$k_1, \cdots, k_{d-1}$ を曲率に持ち、$v_1, \cdots, v_d$ を初期ベクトルとする複素螺旋が M 上一意的に存在する。

次のことは容易に証明される：

命題 4 . Kaehler 多様体 M 上の本来 d 次の複素螺旋の複素れい率は次の不等式を満たす。$\Sigma_{j=1}^{i-1} \tau_{ji}^2 + \Sigma_{j=i+1}^{d} \tau_{ij}^2 \leq 1$ for every i.

証明. $\tau_{i,i+2k} = 0$ であるから $\{V_{2l-1}, JV_{2l-1} | l = 1, 2, \cdots\}$ と $\{V_{2l}, JV_{2l} | l = 1, 2, \cdots\}$ は正規直交系を成す。i が奇数のときは、不等式の左辺は $V_i(0)$ を $\{V_{2l-1}(0), JV_{2l-1}(0) | l = 1, 2, \cdots\}$ によって張られる線形部分空間上に射影したベクトルの長さと等しい。よって、不等式は確かに成立する。i が偶数のときも同様である。 □

これから次数 3 の複素螺旋を考察する。そのために正規直交系 $v_1, v_2, v_3 \in T_pM$ を

$$k_1 < v_2, Jv_3 >= k_2 < v_1, Jv_2 >,\ < v_1, Jv_3 >= 0$$

を満たすように取る必要がある。そこで T_pM を C^n と同一視することにより

$\tau^2+\rho^2\leq 1$ を満たす正数 τ と ρ に対して v_1,v_2,v_3 を次のように定義する:

$$v_1=(1,0,\cdots,0),$$
$$v_2=(-i\tau,\sqrt{1-\tau^2},0,\cdots,0),$$
$$v_3=(0,-i\rho/\sqrt{1-\tau^2},\sqrt{1-\tau^2-\rho^2}/\sqrt{1-\tau^2},0,\cdots,0)$$

こうすると v_1,v_2,v_3 は正規直交系になり $<v_1,Jv_2>=\tau$, $<v_2,Jv_3>=\rho$, $<v_1,Jv_3>=0$ を満たす。これより次の定理１、２を得る:

定理１． M を 3 次元以上の Kaehler 多様体とする。このとき、次の事が成り立つ。

(1) 次数 3 の複素螺旋は次の関係式を満たす:

$$k_1\tau_{23}=k_2\tau_{12},\ \tau_{13}=0,\ |\tau_{12}|\leq k_1/\sqrt{k_1^2+k_2^2}.$$

(2) 逆に、非負定数 k_1,k_2 と $|\tau|\leq k_1/\sqrt{k_1^2+k_2^2}$ を満たす定数 τ に対して、k_1 を第１曲率、k_2 を第２曲率、τ を第１複素れい率（即ち、$\tau_{12}=\tau$）に持つ次数 3 の複素螺旋が存在する。

(3) $|\tau|>k_1/\sqrt{k_1^2+k_2^2}$ のときは、上述の性質を満たす次数 3 の複素螺旋は存在しない。

定理２． M を 2 次元 Kaehler 多様体とするとき、次のことが成り立つ。

(1) M 上の本来次数 3 の複素螺旋 γ の複素れい率は次のようになる:

$$\tau_{12}=k_1/\sqrt{k_1^2+k_2^2},\ \tau_{13}=0,\ \tau_{23}=k_2/\sqrt{k_1^2+k_2^2} \tag{1.2}$$

または

$$\tau_{12}=-k_1/\sqrt{k_1^2+k_2^2},\ \tau_{13}=0,\ \tau_{23}=-k_2/\sqrt{k_1^2+k_2^2}, \tag{1.3}$$

ここで、k_1,k_2 は γ の曲率である。

(2) 逆に任意に与えられた正数 k_1,k_2 に対してそれを曲率にもつ本来次数 3 の複素螺旋 γ が存在する。γ の複素れい率は (1.2) または (1.3) で与えられる。

次数 4 の複素螺旋の記述はより複雑であり定理１、２のような簡明な statement は望めない。そこで、2 次元 Kaehler 多様体 M 上で考えることにしよう。

$\tau^2+\rho^2=1$ を満たす τ と ρ に対して $T_pM \simeq C^2$ 内で次のようにベクトルを取る:

$$v_1=(1,0),\ v_2=(-i\tau,\rho),\ v_3=(0,-i),\ v_4=\mp(i\rho,\tau)$$

そうするとこれらは正規直交系を成し、しかも次の関係式を満たす:

$$<v_1,Jv_2>=\tau,\ <v_2,Jv_3>=\rho,\ <v_1,Jv_4>=\pm\rho$$

$$<v_1,Jv_3>=<v_2,Jv_4>=0,\ <v_3,Jv_4>=\pm\tau.$$

他方、命題2より螺旋 γ が複素螺旋になるための必要十分条件は、次が成り立つことである:

$$\tau_{13}(0)=\tau_{24}(0)=0,\ k_1\tau_{23}(0)+k_3\tau_{14}=k_2\tau_{12}(0),$$

$$k_1\tau_{14}(0)+k_3\tau_{23}(0)=k_2\tau_{34}(0).$$

定理3. M を 2次元 Kaehler 多様体とするとき、次のことが成り立つ。
(1) 曲率 k_1,k_2,k_3 を持つ本来次数 4 の複素螺旋の複素れい率は次の関係式を満たす:

(1.4) $$\tau_{12}=\tau_{34}=\tau,\ \tau_{23}=\tau_{14}=k_2\tau/(k_1+k_3),\ \tau_{13}=\tau_{24}=0,$$

ここで、$\tau=\pm(k_1+k_3)/\sqrt{k_2^2+(k_1+k_3)^2}$,

(1.5) $$\tau_{12}=-\tau_{34}=\tau,\ \tau_{23}=-\tau_{14}=k_2\tau/(k_1-k_3),\ \tau_{13}=\tau_{24}=0,$$

ここで、$k_1\neq k_3$, $\tau=\pm(k_1-k_3)/\sqrt{k_2^2+(k_1-k_3)^2}$ または

(1.5') $$\tau_{12}=\tau_{34}=\tau_{13}=\tau_{24}=0,\ \tau_{23}=-\tau_{14}=\pm1,$$

ここで、$k_1=k_3$.
(2) 逆に、任意に与えられた正数 k_1,k_2,k_3 に対して、これらを曲率に持つ本来次数 4 の複素螺旋 γ が存在する。γ の複素れい率は (1.4), (1.5) または (1.4), (1.5') で与えられる。

2. 複素空間形の複素螺旋の成す **moduli** について.

$M_n(c)$ を n 次元正則断面曲率 c の完備単連結複素空間形とする。良く知られているように任意の複素空間形は、正則断面曲率 c が正、負、零に対応して複素射影空間、複素双曲空間、複素ユークリッド空間と局所的に複素解析的等長同型である。ここで、$M_n(c)$ の螺旋（必ずしも複素螺旋でなくてもよい）に対する合同定理を紹介しよう。

命題5 **([3]).** γ, σ をそれぞれ $M_n(c)$ における次数 p, q の螺旋とする。ここで, $\{k_1, \cdots, k_{p-1}\}$, $\{\lambda_1, \cdots, \lambda_{q-1}\}$ をそれぞれ γ, λ の曲率、そして $\tau^{\gamma}_{ij}(t)$, $\tau^{\sigma}_{kl}(t)$ をそれぞれ γ, λ の複素れい率とするとき、$\gamma = \varphi \circ \sigma$ を満たす $M_n(c)$ の *holomorphic isometry* φ が存在するための必要十分条件は、$p = q$, $k_i = \lambda_i\,(1 \leq i \leq p-1)$ かつ $\tau^{\gamma}_{ij}(0) = \tau^{\sigma}_{ij}(0)\,(1 \leq i < j \leq p)$ が成り立つことである。

本節では、$M_n(c)$ 上の $d(\leq 2n)$ 次の複素螺旋全体を $M_n(c)$ の holomorphic isometries で割った商空間を考えそれを $Hh^d(M_n(c))$ と書くことにする。命題5より集合 $Hh^d(M_n(c))$ はユークリッド空間 $R^{(d+2)(d-1)/2}$ の部分集合 $[0,\infty)^{d-1} \times [-1,1]^{d(d-1)/2}$ と同一視できる。よって、ここでは $Hh^d(M_n(c))$ に自然な位相を入れておく。言うまでもなく $M_n(c)$ 内の **totally real totally geodesic submanifold** $M^n(c/4)$ 上の任意の螺旋は（$M_n(c)$ において複素れい率が、すべて零の）複素螺旋になるから $M_n(c)$ 上の本来 $d(\leq n)$ 次の複素螺旋全体の成す集合は空ではない。

定理3と命題5より次の結果を得る:

定理4. 与えられた任意の正数 k_1, k_2, k_3 に対して、これらを曲率に持つ本来次数 4 の複素螺旋が $M_2(c)$ 内で *holomorphic isometries* の差を除いて 4 本存在する。しかもこれら 4 本の複素螺旋の複素れい率は (1.4), (1.5) または (1.4), (1.5′) で与えられる。

これから $CP_2(c)$ 内の本来次数 4 の複素螺旋の例を提示しよう。ここで、$\pi : S^{2n+1}(1)(\subset C^{n+1}) \to CP^n(4)$ は Hopf fibration を表す。

例1・$0<k<\sqrt{2}$ を満たす任意の k に対して、次のように置く。

$$
\begin{aligned}
A &= \sqrt{(4-k^2-\sqrt{(2-k^2)(8-k^2)})/2(8-k^2)},\\
B &= 2/\sqrt{8-k^2},\\
C &= \sqrt{(4-k^2+\sqrt{(2-k^2)(8-k^2)})/2(8-k^2)},\\
\alpha &= (\sqrt{2-k^2}+\sqrt{8-k^2})/\sqrt{2},\\
\beta &= \sqrt{2-k^2}/\sqrt{2},\\
\delta &= (\sqrt{2-k^2}-\sqrt{8-k^2})/\sqrt{2}.
\end{aligned}
$$

ここで、$\tilde{\gamma}$ を $\tilde{\gamma}(t)=(Ae^{i\alpha t}, Be^{i\beta t}, Ce^{i\delta t})$ によって定義された C^3 上の曲線とするとき、これは $S^5(1)$ 上の t を弧長とする **(Hopf fibration** π に関する) **horizontal curve** になる。しかも曲線 $\pi(\tilde{\gamma})$ は $CP_2(4)$ 内の本来 4 次の複素螺旋になり、曲率は $k_1=k$, $k_2=\sqrt{(18-9k^2)/2}$, $k_3=k$ で、複素れい率は $\tau_{12}=\tau_{13}=\tau_{24}=\tau_{34}=0$, $\tau_{14}=1$, $\tau_{23}=-1$ である。この曲線の複素れい率は $(1.5')$ を満たす。

例2・$\tilde{\gamma}$ を次式によって定義される C^3 上の曲線とする:

$$\tilde{\gamma}(t)=((1/\sqrt{3})e^{it},(1/\sqrt{14})e^{2it},(5/\sqrt{42})e^{-4it/5}).$$

このとき、$\pi(\tilde{\gamma})$ は $CP_2(4)$ 内の本来 4 次の複素螺旋になり、曲率は $k_1=3\sqrt{2}/5$, $k_2=11\sqrt{2}/10$, $k_3=1/\sqrt{2}$ で、複素れい率は $\tau_{12}=\tau_{14}=\tau_{23}=\tau_{34}=-1/\sqrt{2}$, $\tau_{13}=\tau_{24}=0$ である。この曲線の複素れい率は (1.4) を満たす。

最後に **moduli space** $Hh^2(M_n(c))(d=1,2,3)$ を調べよう。$Hh^1(M_n(c))$ は明らかに1点から成る集合である。定理1、2と命題5より次の結果を得る:

定理5・
(1) $Hh^2(M_n(c))$ は $n\geq 2$ のときは R^2 における錐と位相同型になり、$n=1$ のときは半直線と位相同型になる。これをもっと正確に述べると $n\geq 2$ のときは $Hh^2(M_n(c))=[0,\infty)\times[-1,1]/\sim$ であり、$n=1$ のときは $Hh^2(M_n(c))=[0,\infty)$ である。ここで、同値関係 $\sim$ は $(0,\tau)\sim(0,\rho)\ for\ \tau,\rho\in[-1,1]$ を意味する。
(2) $Hh^3(M_n(c))$ は連結であり更に $n\geq 3$, $n=2$ に対応してそれぞれ次のようになる。

$$
Hh^3(M_n(c)) = \begin{cases} \{(k_1,k_2,\tau)\in[0,\infty)\times[0,\infty)\times[-1,1]\,|\,\tau^2\leq k_1^2/(k_1^2+k_2^2)\}/\sim, \\ ([0,\infty)\times\{0\}\times[-1,1]\cup\{(k_1,k_2,\pm k_1/\sqrt{k_1^2+k_2^2})\,|\,k_1>0,k_2>0)\})/\sim. \end{cases}
$$

ここで、同値関係 $\sim$ は $(0,k,\tau) \sim (0,l,\rho)$ *for* τ, $\rho \in [-1,1]$ を意味する。

注意. γ を $M_n(c)$ における本来次数 3 の複素螺旋とし、γ の曲率を k_1, k_2、第 1 複素れい率を $\tau_{12} = \tau$ とする。このとき γ が $M_n(c)$ の *totally real totally geodesic submanifold* $M^n(c/4)$ 上にあるための必要十分条件は、$\tau = 0$ であり、γ が $M_n(c)$ の *holomorphic totally geodesic submanifold* $M_2(c)$ 上にあるための必要十分条件は、$\tau = \pm k_1/\sqrt{k_1^2 + k_2^2}$ である。

References

[1] D. Ferus ans S. Schirrmacher, *Submanifolds in Euclidean space with simple geodesics*, Math. Ann. 260(1982), 57-62.

[2] S.L. Hong, *Isometric immersions of manifolds with planar geodesics into Euclidean space*, J. Diff. Geom. 8(1973), 259-278.

[3] S. Maeda and Y. Ohnita, *Helical geodesic immersions into complex space forms*, Geometriae Dedicata 30(1989), 93-114.