数理解析研究所講究録
907巻 1995年 82-92

NATURALLY REDUCTIVE HOMOGENEOUS SPACES の全測地的部分多様体について

東條晃次 (KOJI TOJO)

千葉大学大学院自然科学研究科

0. 序説.

E.Cartan により, 対称空間において, 全測地的部分多様体が存在するための必要十分条件は Lie triple system が存在することであるということが知られている。また, 対称空間の全測地的部分多様体についてはよく研究されており, 特に Chen-Nagano によって, それはより深まったといえる。彼らの結果のうちの1つに次がある。

Theorem 0.1. *([3])* 既約な対称空間で, 全測地的超曲面を許容するものは定曲率空間に限る。

対称空間を含む Riemann 等質空間の class の1つに naturally reductive homogeneous space というものがある。ここでは, この等質空間にたいし, 'Lie triple system' に相当する条件を求め, さらに, その応用として Theorem 0.1 と同様の問題を考えることにする。また, '全測地的' という条件を少し変えた問題も扱うことにする。

この講義録の構成は以下の通りである。

Section 1 において, (一般の)Riemann 等質空間の共変微分を Lie 環の言葉を用いて書き表す。

Section 2 では, Cartan による全測地的部分多様体の存在に関する定理を用いて, naturally reductive homogeneous space において, 全測地的部分多様体が存在するための必要十分条件を Lie 環の bracket で表す。

Section 3 では, naturally reductive homogeneous space の1つの例である normal homogeneous space を root system を用いて見てみる。Section 4 においては, 全測地的超曲面を許容する normal homogeneous space の分

類を試みる。さらに extrinsic hypersphere と呼ばれる超曲面についても同様のことをする。そのとき Section 3 での結果が必要となる。

Riemann 多様体が全測地的超曲面を許容すれば, その (ある点における) 接空間には curvature invariant hyperplane が存在する。Theorem 0.1 から, 既約な対称空間で curvature invariant hyperplane を許容するものは定曲率空間のみであるが, normal homogeneous space では, そうではない。その例を Section 5 で与える。

1. 等質空間の **Levi-Civita** 接続

G を Lie 群, K を G の閉部分群とする。また, $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{k}$ をそれぞれ G, K の Lie 環とする。$\mathfrak{g}$ の部分空間 $\mathfrak{p}$ で

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p} \ \ (\text{部分空間の直和}), \ \ [\mathfrak{k}, \mathfrak{p}] \subset \mathfrak{p}$$

を満たすものが存在するとき, 等質空間 G/K は reductive であるという。

G/K を reductive homogeneous space とし,G/K に G- 不変計量 $<,>$ が存在すると仮定する。$\mathfrak{p}$ と接空間 $T_o(G/K)$ $(o = \{K\})$ を同一視すれば, $<,>$ は $\mathfrak{p}$ 上の $\mathrm{Ad}(K)$-invariant 内積となる。このとき, connection function Λ は以下で定義される ([5])。

$$\Lambda(X)(Y) = \frac{1}{2}[X, Y]_{\mathfrak{p}} + U(X, Y) \ \ (X, Y \in \mathfrak{p}), \tag{1.1}$$

ここで, $Z \in \mathfrak{p}$ に対し

$$< U(X, Y), Z >= \frac{1}{2}\{< [Z, X]_{\mathfrak{p}}, Y > + < [Z, Y]_{\mathfrak{p}}, X >\}. \tag{1.2}$$

reductive homogeneous space G/K が, さらに $U = 0$ を満たすとき, G/K は naturally reductive であると言う。

次に, $(G/K, <,>)$ の Levi-Civita connection ∇ を $\mathfrak{g}$ の bracket $[,]$ で表すことをする。

$\pi : G \to G/K$ を canonical projection とする。W を, $\mathfrak{p}$ の 0 を含む open subset で

$$\pi \circ \exp : W \longrightarrow \pi(\exp W)$$

が diffeomorphism となるようにとる。$X \in \mathfrak{p}$ に対して, $\pi(\exp W)$ の上の vector field X_* を

$$(X_*)_{\pi(\exp x)} = \tau(\exp x)_*\{X\}$$

と定義する。ここで, $\tau(g)$ $(g \in G)$ は G/K の左移動を表す。また, μ : $\pi(\exp W) \to \exp W$ を

$$\mu(\pi(\exp x)) = \exp x \quad (x \in W) \quad \text{と定義する。}$$

$\{X_\alpha\}_{\alpha\in A}$ を $\mathfrak{k}$ の基底, $\{X_i\}_{i\in I}$ を $\mathfrak{p}$ の $<,>$ に関する正規直交基底とする。($\mathfrak{g}$ の元と G の左不変 vector field を同一視して) ω^α, ω^i $(\alpha \in A,\ i \in I)$ をそれぞれ X_α, X_i の dual 1-form とする。

Lemma 1.1. $\{(X_i)_*\}$ $(i \in I)$ に対応する *connection forms* $\theta_j{}^i$ $(i, j \in I)$ は次で与えられる。

$$\theta_j{}^i = -\mu^*\{\sum_{\alpha\in A} c^i{}_{j\alpha}\omega^\alpha + \frac{1}{2}\sum_{k\in I}(c^i{}_{jk} - c^j{}_{ik} - c^k{}_{ij})\omega^k\}.$$

ここで, $c^p{}_{qr}$ は $\{X_\alpha\}$, $\{X_i\}$ に関する $\mathfrak{g}$ の構造定数。

Helgason [4] によると, $\exp : \mathfrak{g} \to G$ の微分写像は

$$(\exp_*)_x(y) = (L_{\exp x})_* \circ \Phi_x(y) \quad (x, y \in \mathfrak{g})$$
$$\Phi_x(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)!}(\mathrm{ad}x)^n(y)$$

で与えられる。$p_{\mathfrak{k}}$, $p_{\mathfrak{p}}$ をそれぞれ $\mathfrak{g}$ から $\mathfrak{k}$, $\mathfrak{p}$ への射影とする。W を小さくとって

$$p_{\mathfrak{p}} \circ \Phi_x|\mathfrak{p} : \mathfrak{p} \longrightarrow \mathfrak{p}$$

が各 $x \in W$ に対して isomorphism となるようにしておく。このとき, (1.1), (1.2), Lemma 1.1 から次を示すことができる。

Theorem 1.2. $x \in W$, $X, Y \in \mathfrak{p}$ に対して

$$(\nabla_{X_*}Y_*)_{\pi(\exp x)} = \tau(\exp x)_*\{\Lambda(X)(Y) + [h_x(X), Y]\}.$$

ここで

$$h_x(X) = p_{\mathfrak{k}} \circ \Phi_x \circ (p_{\mathfrak{p}} \circ \Phi_x|\mathfrak{p})^{-1}(X).$$

Corollary 1.3.

$$(\nabla_{\tau(\exp x)_* \circ p_{\mathfrak{p}} \circ \Phi_x(X)} Y_*) = \tau(\exp x)_*\{\Lambda(p_{\mathfrak{p}} \circ \Phi_x(X))(Y) + [p_{\mathfrak{k}} \circ \Phi_x(X), Y]\}.$$

2. Totally geodesic submanifolds.

ここでは, $(G/K, <,>)$ は naturally reductive とする。

このとき, 定義から connection function Λ は $\Lambda(X)(Y) = (1/2)[X,Y]_{\mathfrak{p}}$ で与えられる。また, よく知られているように $o = \{K\}$ で $X \in \mathfrak{p}$ に接する geodesic は $\gamma(t) = \pi(\exp tX)$ と書ける。このとき, Section 1 の結果を使って $\gamma(t)$ に沿った parallel vector field を得ることができる。

Lemma 2.1. $Y(t)$ を測地線 $\gamma(t) = \pi(\exp tX)$ $(X \in \mathfrak{p})$ に沿った *parallel vector field* で $Y(0) = Y$ $(Y \in \mathfrak{p})$ となるものとすると

$$Y(t) = \tau(\exp tX)_*\{e^{-t\Lambda(X)}(Y)\}.$$

ここで $e^{-t\Lambda(X)}(Y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-t)^n}{n!}(\Lambda(X))^n(Y)$.

Proof. Theorem 1.2 において, $x = tX$ とすると

$$(\nabla_{X_*} Y_*)_{\pi(\exp tX)} = \tau(\exp tX)_*\{\Lambda(X)(Y) + [h_{tX}(X), Y]\}.$$

$\Phi_{tX}(X) = X$ より $h_{tX}(X) = p_{\mathfrak{k}}(X) = 0$. このことから Lemma 2.1 は容易に示せる。 □

もう 1 つ Theorem 1.2 の応用を与えてみよう。

よく知られているように $(G/K, <,>)$ の点 o における curvature tensor R は $X, Y, Z \in \mathfrak{p}$ に対して

$$R(X,Y)Z = [[X,Y]_{\mathfrak{k}}, Z] + \frac{1}{2}[[X,Y]_{\mathfrak{p}}, Z]_{\mathfrak{p}} - \frac{1}{4}[X,[Y,Z]_{\mathfrak{p}}]_{\mathfrak{p}} + \frac{1}{4}[Y,[X,Z]_{\mathfrak{p}}]_{\mathfrak{p}} \tag{2.1}$$

で与えられる。これを Theorem 1.2 を用いて示してみよう。

まず $(\nabla_{X_*}\nabla_{Y_*}Z_*)_o$ を求めてみよう。t を $|t|$ が十分小さい実数とする。このとき,Theorem 1.2 から

$$(\nabla_{Y_*}Z_*)_{\pi(\exp tX)} = \tau(\exp tX)_*\{\Lambda(Y)(Z) + [h_{tX}(Y), Z]\}$$

となる。よって

$$\begin{aligned}(\nabla_{X_*}\nabla_{Y_*}Z_*)_o &= \Lambda(X)\Lambda(Y)(Z) + \Lambda(X)([h_0(Y), Z]) \\ &\quad + \frac{d}{dt}|_{t=0}[h_{tX}(Y), Z].\end{aligned}$$

さらに $h_0(Y) = 0$, $\frac{d}{dt}|_{t=0}h_{tX}(Y) = -(1/2)[X,Y]_{\mathfrak{k}}$ より

$$(\nabla_{X_*}\nabla_{Y_*}Z_*)_o = \frac{1}{4}[X,[Y,Z]_{\mathfrak{p}}]_{\mathfrak{p}} - \frac{1}{2}[[X,Y]_{\mathfrak{k}}, Z]$$

となる。このことから(2.1)は容易に導ける。

次に $(G/K, <,>)$ の totally geodesic submanifold が存在するための必要十分条件を $\mathfrak{g}$ の bracket で書き表そう。

(M,g) を Riemann 多様体, p を M の点, x を T_pM の元とする。p で x に接する M の測地線を $\gamma_x(t)$ $(\gamma_x(0) = p)$ とするとき

$$P_{tx} : T_pM \longrightarrow T_{\gamma_x(t)}M$$

で平行移動を表す。このとき次が知られている。

Theorem 2.2. *(E.Cartan)* V を T_pM の部分空間とすると次は同値。

(i) V に接する (M,g) の *totally geodesic submanifold* が存在する。

(ii) 次をみたす正数 ϵ が存在する。$|x| = 1$ なる任意の $x \in V$ と $t \in \mathbb{R}$ $(|t| < \epsilon)$ に対して

$$({P_{tx}}^{-1}R)(V,V)V \subset V.$$

ここで ${P_{tx}}^{-1}R$ は,$\gamma_x(t)$ における *curvature tensor* を P_{tx} によって p に引き戻したものである。

この Theorem と Lemma 2.1 から次を得る。

Proposition 2.3. *G/K を naturally reductive homogeneous space とし, V を $\mathfrak{p}$ の部分空間とすると, 次は同値。*

(1) *V に接する G/K の totally geodesic submanifold が存在する。*

(2) *各 $X \in V$ に対して, $e^{-\Lambda(X)}(V)$ は $\mathfrak{p}$ の曲率不変部分空間, すなわち*

$$R(e^{-\Lambda(X)}(V), e^{-\Lambda(X)}(V)) \subset e^{-\Lambda(X)}(V)$$

が成立する。

Remark 2.4. 実は, Proposition 2.3 の (1) は次の (3) と同値。(3) 各 $X \in V$ に対して次が成り立つ。

$$R(X, e^{-\Lambda(X)}(V)) \subset e^{-\Lambda(X)}(V).$$

3. Normal homogeneous spaces.

G を compact Lie 群, K を G の閉部分群とする。G の biinvariant metric から導入された metric $<,>$ を備えた等質空間 $(G/K, <,>)$ を normal homogeneous space と言う。$\mathfrak{g}$, $\mathfrak{k}$ をそれぞれ G, K の Lie 環, $\mathfrak{p}$ を $<,>$ に関する $\mathfrak{k}$ の直交補空間とすると, この $\mathfrak{p}$, $<,>$ に関して $(G/K, <,>)$ は naturally reductive となる。

次に G を compact simple Lie group としよう。$\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ を $\mathfrak{g}$ の複素化とし, $\mathfrak{h}$ をその Cartan subalgebra とする。また, Δ を $\mathfrak{h}$ に関する nonzero root の集合とし, Ψ を Killing form とする。$\alpha \in \Delta$ に対し, $H_\alpha \in \mathfrak{h}$ を $\Psi(H_\alpha, H) = \alpha(H)$ $(H \in \mathfrak{h})$ で定義する。さらに root vector E_α を次を満たすようにとる。

$$\begin{aligned} &\Psi(E_\alpha, E_{-\alpha}) = 1, \quad [E_\alpha, E_{-\alpha}] = H_\alpha \\ &[E_\alpha, E_\beta] = N_{\alpha,\beta} E_{\alpha+\beta}, \quad N_{\alpha,\beta} = -N_{-\alpha,-\beta} \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{3.1}$$

このとき, 次の $\mathfrak{g}_u$ は $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ の compact real form となる。

$$\mathfrak{g}_u = \sum_{\alpha \in \Delta} \mathbb{R}\sqrt{-1} H_\alpha + \sum_{\alpha \in \Delta} (\mathbb{R} A_\alpha + \mathbb{R} B_\alpha).$$

ここで, $A_\alpha = E_\alpha - E_{-\alpha}$, $B_\alpha = \sqrt{-1}(E_\alpha + E_{-\alpha})$. 以下では, $\mathfrak{g}$ と $\mathfrak{g}_u$ を同一視する。

$\alpha, \beta \in \Delta$ に対し, $\{\beta + n\alpha \in \Delta : p \leq n \leq p\}$ を, β を含む α-series とする。このとき, 次はほぼ明らかであろう。

Lemma 3.1.

$$\begin{cases} 0 \leq q-p \leq 1, & (\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} \text{ は } A_l, D_l, E_6, E_7, E_8 \text{ のいずれか}) \\ 0 \leq q-p \leq 2, & (\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} \text{ は } B_l, C_l, F_4 \text{ のいずれか}) \\ 0 \leq q-p \leq 3, & (\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} \text{ が } G_2\text{-type のとき}) \end{cases}$$

K を G の閉部分群とする。我々の考える等質空間は normal であり, $\mathfrak{g}$ の任意の 2 つの maximal abelian subalgebra は互いに conjugate なので $\mathfrak{k}$(K の Lie 環) の maximal abelian subalgebra は $\sum_\alpha \mathbb{R}\sqrt{-1}H_\alpha$ に含まれていると仮定する。(それを $\mathfrak{h}_1$ と書く。)

以下, 簡単のため

$$\mathfrak{h}_{\mathbb{R}} = \sum_{\alpha\in\Delta} \mathbb{R}H_\alpha, \quad \mathfrak{g}_\alpha = \mathbb{R}A_\alpha + \mathbb{R}B_\alpha$$

と書こう。

Berger [1] によれば,$X \in \mathfrak{g}_\alpha$ に対して, X の $\mathfrak{k}$ 成分 $X_{\mathfrak{k}}$ は, 次のように与えられる。

Lemma 3.2.

$$X_{\mathfrak{k}} = \sum_{\lambda\in\Delta(\alpha)} p_\lambda X_\lambda \qquad \textit{where:}$$

(1) $\Delta(\alpha) = \{\lambda \in \Delta : \lambda = \alpha \ \ \textit{on}\ \mathfrak{h}_1\}$; (2) $p_\lambda \geq 0$; (3) $X_\lambda \in \mathfrak{g}_\lambda$.

Lemma 3.2 の記号の下で, $\mathfrak{g}$ の部分空間 $\mathfrak{g}(\alpha)$ を次のように定義する。

(3.2) $$\mathfrak{g}(\alpha) = \bigoplus_{\substack{\lambda\in\Delta(\alpha) \\ p_\lambda\neq 0}} \mathfrak{g}_\lambda.$$

さらに

$$\begin{aligned} \Delta_{\mathfrak{p}} &= \{\alpha \in \Delta : \mathfrak{g}(\alpha) = 0\} = \{\alpha \in \Delta : \mathfrak{g}_\alpha \subset \mathfrak{p}\} \\ \Delta_{\mathfrak{k}} &= \{\alpha \in \Delta : \mathfrak{g}(\alpha) = \mathfrak{g}_\alpha\} = \{\alpha \in \Delta : \mathfrak{g}_\alpha \subset \mathfrak{k}\} \\ \Delta' &= \Delta \setminus (\Delta_{\mathfrak{p}} \cup \Delta_{\mathfrak{k}}) \end{aligned}$$

とおく。もし, $\mathrm{rk}(G) = \mathrm{rk}(K)$ ならば,$\Delta' = \emptyset$ である。$\mathrm{rk}(G) = \mathrm{rk}(K) + 1$ のときは次が成立する。

Proposition 3.3. *([6]) G を compact simple Lie 群, K を G の閉部分群とし, G/K を normal homogeneous space とする。((3.2)において) 全ての $\lambda_i, \lambda_j \in \Delta(\alpha)$ に対して, ある $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$ の元 H が存在して $(H_{\lambda_i} - H_{\lambda_j})$ と H が平行となると仮定する。(もし, $\mathrm{rk}(G) = \mathrm{rk}(K) + 1$ ならば, この仮定は満たされる。) このとき次が成立する。*

(1) $\mathfrak{g}$ は G_2-*type* でないとすると, $\mathfrak{g}(\alpha)$ $(\alpha \in \Delta')$ は次の *2* つのどちらかの形になる。

(*a*) $\mathfrak{g}_\alpha + \mathfrak{g}_\beta$. ここで β は $\alpha - \beta \notin \Delta$ を満たす Δ の元.

(*b*) $\mathfrak{g}_\alpha + \mathfrak{g}_\beta + \mathfrak{g}_\gamma$. ここで $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ は以下を満たす $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ と一致する。

$$\alpha_3 = 2\alpha_1 - \alpha_2, \quad \frac{2\alpha_1(H_{\alpha_2})}{\alpha_2(H_{\alpha_2})} = 1, \quad \frac{2\alpha_1(H_{\alpha_2})}{\alpha_1(H_{\alpha_1})} = 2.$$

(2) $\mathfrak{g}$ を G_2-*type* の *Lie* 環とすると $\mathfrak{g}(\alpha)$ $(\alpha \in \Delta')$ は次の *3* つのうちのいずれかとなる。

(*a*) $\mathfrak{g}_\alpha + \mathfrak{g}_\beta$. ここで β は $\alpha - \beta \notin \Delta$ を満たす Δ の元.

(*b*) $\mathfrak{g}_\alpha + \mathfrak{g}_{\beta_1} + \mathfrak{g}_{\beta_2}$. ここで $\{\alpha, \beta_1, \beta_2\}$ は以下を満たす $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ と一致する。

$$\alpha_3 = 2\alpha_1 - \alpha_2 \quad \text{and} \quad \frac{2\alpha_1(H_{\alpha_2})}{\alpha_1(H_{\alpha_1})} = \frac{2\alpha_1(H_{\alpha_2})}{\alpha_2(H_{\alpha_1})}.$$

(*c*) $\mathfrak{g}_\alpha + \mathfrak{g}_{\gamma_1} + \mathfrak{g}_{\gamma_2}$. ここで $\{\alpha, \gamma_1, \gamma_2\}$ は以下を満たす $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ と一致する。

$$\alpha_3 = 3\alpha_1 - 2\alpha_2, \quad \frac{2\alpha_1(H_{\alpha_2})}{\alpha_2(H_{\alpha_2})} = 1 \quad \text{and} \quad \frac{2\alpha_1(H_{\alpha_2})}{\alpha_1(H_{\alpha_1})} = 3.$$

(*d*) $\mathfrak{g}_\alpha + \mathfrak{g}_{\delta_1} + \mathfrak{g}_{\delta_2} + \mathfrak{g}_{\delta_3}$. ここで $\{\alpha, \delta_1, \delta_2, \delta_3\}$ は以下を満たす $\{\alpha_1, \alpha_2, 2\alpha_1 - \alpha_2, 2\alpha_2 - \alpha_1\}$ と一致する。

$$\frac{2\alpha_1(H_{\alpha_2})}{\alpha_2(H_{\alpha_2})} = \frac{\alpha_1(H_{\alpha_2})}{\alpha_1(H_{\alpha_1})} = 1.$$

4. 主な結果.

ここでは, これまでに得たことを用いて, normal homogeneous space の hypersurface に関して得られた結果を報告する。

(M,g) を m- 次元 Riemann 多様体とし, N を (M,g) の n- 次元部分多様体とする。また, ∇, $\tilde{\nabla}$ をそれぞれ N, M の Levi-Civita connection とする。このとき, N の second fundamental form σ は次で与えられる。

$$\sigma(X,Y) = \tilde{\nabla}_X Y - \nabla_X Y.$$

ここで X,Y は N に接する M の vector field である。

$H = (1/n)\mathrm{trace}(\sigma)$ を N の mean curvature vector とする。$\sigma(X,Y) = g(X,Y)H$ のとき N は umbilical であると言う。

N が umbilical で, さらに, $H \neq 0$ であり, H が normal connection に関して平行であるとき, N を (M,g) の extrinsic sphere という ($H = 0$ のとき, N は totally geodesic)。N が extrinsic sphere ならば $g(H,H)$ は nonzero constant である。さらに, 任意の $p \in N$ に対して, Codazzi の方程式から T_pN は T_pM の curvature invariant subspace である。すなわち

(4.1) $\quad R(T_pN, T_pN)T_pN \subset T_pN \quad$ (R:M の curvature tensor)

が成立する。もちろん, N が totally geodesic でも(4.1)が成立する。

Theorem 0.1 と同様の問題を, M が normal homogeneous space の場合にも考えたとき, 次を示すことができた ([6])。

Theorem 4.1. *G を compact simple Lie group とする。もし normal homogeneous space G/K が totally geodesic hypersurface を許容するならば, G/K は定曲率空間である。*

Proposition 2.3 と proposition 3.3 を使って, この定理は証明できる。特に, $\mathrm{rk}(G) = \mathrm{rk}(K)$ のときは, Lemma 3.1 を用いて次を示すことができる。

Theorem 4.2. *G を compact simple Lie 群とし, K を $\mathrm{rk}(G) = \mathrm{rk}(K)$ となる G の閉部分群とする。もし normal homogeneous space G/K の o における接空間が curvature invariant hyperplane を許容するならば G/K は定曲率空間である。*

次に, G を compact Lie 群, K をその閉部分群とする。さらに normal homogeneous space G/K が extrinsic hypersphere N を許容すると仮定す

る。$o \in N$ として, $V = T_oN$ とおく。$x \in V$ と十分小さい $t \in \mathbb{R}$ に対して, $\tau(\exp X(t))$ を $t=0$ で x に接する N の測地線とする。また, ξ を長さ1の V に直交する vector とする。このとき, N の定義と Corollary 1.3 より, N の長さ1の normal vector field は $\tau(\exp X(t))$ 上, 次のように書ける。

$$\tau(\exp X(t))_*\{\xi - t(\lambda x + \frac{1}{2}[x,\xi]_{\mathfrak{p}}) + o(t)\}. \tag{4.2}$$

(4.1), (4.2), Proposition 3.3 を使って次を得ることができる。

Theorem 4.3. *G を compact Lie 群, K をその閉部分群とする。もし normal homogeneous space G/K が extrinsic hypersphere を許容するならば, G/K は定曲率空間である。*

5. 曲率不変超平面を許容する例

ここでは, 曲率不変超平面を許容する normal homogeneous space を構成しよう。

G/K を compact type の Hermitian symmetric space で, (G,K) が symmetric pair であるものとする。$\mathfrak{g}$, $\mathfrak{k}$ をそれぞれ G, K の Lie 環とする。このとき $\mathfrak{g}$ の subspace $\mathfrak{p}$ で $[\mathfrak{p},\mathfrak{p}] \subset \mathfrak{p}$ となるものが存在して, この $\mathfrak{p}$ と,$\mathfrak{g}$ の Killing form に関して G/K は normal homogeneous space となる。よく知られているように, $\mathfrak{k}$ には1次元の center が存在する。(それを $\mathbb{R}Z$ とする。)

$\mathfrak{p}' = \mathfrak{p} \oplus \mathbb{R}Z$ とし, $\mathfrak{k}'$ を Killing form に関する $\mathfrak{p}'$ の直交補空間とする。このとき

$$[\mathfrak{k}',\mathfrak{k}'] \subset \mathfrak{k}', \quad [\mathfrak{k}',\mathfrak{p}'] \subset \mathfrak{p}, \quad [\mathfrak{p}',\mathfrak{p}']_{\mathfrak{p}'} \subset \mathbb{R}Z.$$

が成り立つ。K' を $\mathfrak{k}'$ に対応する G の Lie subgroup とすれば, $\mathfrak{p}'$ は G/K' の接空間と同一視でき, 簡単な計算から $\mathfrak{p}$ は $\mathfrak{p}'$ の curvature invariant hyperplane であることがわかる。

References

1. M. Berger, *Les variétés Riemanniennes homogénes normales simplement connexes á courbure strictement positive*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa **15** (1961), 179–246.
2. B. Y. Chen, *Extrinsic spheres in Riemannian manifolds*, Houston J. Math. **5** (1979), 319–324.

3. B. Y. Chen and T. Nagano, *Totally geodesic submanifolds of symmetric spaces, II*, Duke Math. J. **45** (1978), 405–425.
4. S. Helgason, *Differential Geometry, Lie Groups, and Symmetric Spaces*, Academic Press, 1978.
5. K. Nomizu, *Invariant affine connections on homogeneous spaces*, Amer. J. Math. **76** (1954), 33–65.
6. K. Tojo, *Totally geodesic hypersurfaces of normal homogeneous spaces*, preprint.