

水面重力波間の非線形エネルギー輸送について
— Hasselmann 理論の検証 —

岐阜大工 田中光宏 (TANAKA Mitsuhiro)

§1. Hasselmann 方程式とその性質

無限に深い水の表面の波を考える。対象とする波動の波長は表面張力が無視できる程度に十分長く、したがってすべての波動モードは重力波として扱えるものとする。平均水面からの表面変位を $\eta(\mathbf{x}, t)$ 、またアンサンブル平均を $\langle \quad \rangle$ とすると、エネルギースペクトル $E(\mathbf{k}, t)$ は

$$\langle \eta^2 \rangle = \int E(\mathbf{k}) d\mathbf{k} \quad (1)$$

によって定義される。ここで \mathbf{k} は 2 次元の波数ベクトルで、また積分は今後とも波数ベクトルの取り得る全範囲にわたるものとする。この時、Hasselmann (1962) の解析によると、 $N(\mathbf{k}) = E(\mathbf{k})/\omega(\mathbf{k})$ (ここで $\omega(\mathbf{k}) = \sqrt{g|\mathbf{k}|}$) により定義されるアクション密度 $N(\mathbf{k})$ は

$$\frac{\partial N(\mathbf{k})}{\partial t} = \iiint G_{0,1,2,3} \{ (N_0 + N_1) N_2 N_3 - N_0 N_1 (N_2 + N_3) \} \delta_{0+1-2-3}^{\mathbf{k}} \delta_{0+1-2-3}^{\omega} d\mathbf{k}_{123} \quad (2)$$

なる方程式にしたがって時間発展する。ここで $G_{0,1,2,3}$ は非線形相互作用の結合係数で、 $\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3$ に依存する複雑な関数である。また (2) の表現には

$$N_0 = N(\mathbf{k}, t), \quad N_1 = N(\mathbf{k}_1, t), \quad d\mathbf{k}_{123} = d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 d\mathbf{k}_3, \\ \delta_{0+1-2-3}^{\mathbf{k}} = \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3), \quad \delta_{0+1-2-3}^{\omega} = \delta(\omega(\mathbf{k}) + \omega(\mathbf{k}_1) - \omega(\mathbf{k}_2) - \omega(\mathbf{k}_3))$$

などの略記法を用いた。(2) は「Hasselmann 方程式」と呼ばれており、海洋の波浪予測においては非常に重要な式となっている。* その導出法および成立の前提条件などに関しては Hasselmann (1962), Yuen & Lake (1982), Zakharov et al. (1992) 等を参照されたい。

(2) に対しては

$$\frac{d}{dt} \int N(\mathbf{k}) d\mathbf{k} = 0, \quad \frac{d}{dt} \int \omega(\mathbf{k}) N(\mathbf{k}) d\mathbf{k} = 0, \quad \frac{d}{dt} \int \mathbf{k} N(\mathbf{k}) d\mathbf{k} = 0, \quad (3a, b, c)$$

が成り立つが、これらはそれぞれアクション、エネルギー、運動量の保存則に対応している。

(2) の右辺はこのままでは 6 重積分であるが、2 つの δ 関数の存在により 3 重積分に帰着される。しかしこの時積分核が特異性を有することになり、その処理には細かい工夫が必要になる。これらの点及び従来の Hasselmann 方程式の数値計算に関する歴史などについては、小松・草場・増田 (1993) の最近の報告及びそこでの引用文献を参考にされたい。

* (2) が現実の海洋波に適用される場合には、右辺に風からのエネルギーの流入と砕波によるエネルギー散逸を表現する 2 つの項が、また左辺には群速度による伝播を表現する項がそれぞれ付加される。

(3) で示したように (2) はエネルギーとアクションという2つのスカラーの保存量を持ち、このために流体乱流の Kolmogorov スペクトルに対応する平衡スペクトルとして2つの異なるべき則が存在する。その一つはエネルギー保存則に起因するもの、すなわち「エネルギーフラックス Q が一定」という条件が決めるスペクトルであり、等方性の仮定のもとでは

$$E_k \sim \alpha_q g^{-1/2} Q^{1/3} k^{-7/2}, \quad (E_\omega \sim \omega^{-4}) \quad (4)$$

と表わされる (Zakharov & Filonenko, 1966)。これが成り立つ領域においては低波数から高波数へのカスケードが存在する。もう一つはアクション保存則に起因するもの、すなわち「アクションフラックス P が一定」という条件が決めるスペクトルであり、やはり等方性の仮定のもとでは

$$E_k \sim \alpha_p P^{1/3} k^{-10/3}, \quad (E_\omega \sim \omega^{-11/3}) \quad (5)$$

と表わされる (Zakharov & Zaslavskii, 1982)。これが成り立つ領域においては高波数から低波数への逆カスケードが存在する。海洋における風波はその発達にともないスペクトルのピークが次第に低波数側へシフトしていく事 (aging) が知られているが、この現象はこの逆カスケードの表れと考えることができる。(2) に人為的な source と sink を加えた数値計算によって、これら2種類の Kolmogorov スペクトルが確かに再現されたという最近の報告もある (Polnikov, 1994)。上のような状況は、非粘性の極限でエネルギーとエンストロフィーという2つの保存量を有する2次元の流体乱流のそれと酷似している。

§2. 本研究の動機と方法

動機

Hasselmann 方程式が与えるのは振幅展開によって導出された「最低次の」エネルギー輸送である。しかしこの最低次の評価ですら現在の計算機能力をもってしてもかなりの時間を要し、未だ現実的な波浪予測に適用されるまでには至っておらず、世界各国のグループが競ってより効率的な数値コードの開発を進めているのが現状である。

そのような状況のゆえか、より高次の効果が省みられることはいままではほとんどなされていないように思われる。しかし、非線形エネルギー輸送のうちの最低次のみを残したということは、この理論の枠内にはそれ自身の正当性、すなわちどのような振幅パラメタの範囲でどの程度正しいのかを判定する方法が存在しないこと意味している。次世代の波浪予測の基礎として世界中が Hasselmann 方程式 (2) を採用しようとしている以上、その成立範囲、適用限界についてもう少ししっかり押さえておく必要があるのではないか？もし何らかの方法で、現実の海がその最も荒れた状態においてすら、(2) の適用範囲に収まることが確認されたならば、その時はじめて安心して (2) を今後の波浪予測の出発点として採用できるのではないだろうか？

方法

上述の問題を解決する最も直接的な手段は、(2) の導出と全く同様な解析を続けて、非線形エネルギー輸送に対するより高次の補正項を求めることであろう。しかし (2) の導出に要した解析の複雑さを見る時、この方法はあまり現実的でないように思われる。そこで我々は以下のようなより強く計算機に依存したアプローチを採用することにする。最近では水の波の時間発展をその基礎方程式に基づいて追跡するさまざまな数値コードが開発されている。その中で Dommermuth & Yue (1987) により開発された「高次スペクトル

法」*はいわゆる擬スペクトル法で、多価の水面変形は表現できないものの、FFTをうまく利用した高速のスキームであり、実用的な計算時間内で3次元問題が扱える可能性が十分にある。†

数値シミュレーションによる水の波の時間発展の追跡においては数値的な overflow (時間刻みと空間分解能の関係から起こる) や、より本質的な overflow (例えばスキームでは波形が水平空間座標の1価関数と仮定されているにもかかわらず、シミュレートされる波動運動が砕波に至るような場合、数値スキームは砕波波形を忠実に追跡しようとする必然的に破綻をきたす) の出現にしばしば悩まされるのであるが、今目指している「Hasselmann 理論との比較」という目的のためには必ずしも時間発展を追跡する必要はない。Hasselmann 方程式は、あるエネルギースペクトル $E(k)$ が与えられた時にその変化率 $dE(k)/dt$ を与えるものであり、したがって数値実験のほうもある波形を与えた時にその瞬間の時間微分を与えてくれさえすればいいのである。

この数値実験では、ある決められたエネルギースペクトルを持つ勝手な初期波形を、位相をランダムに与えることによって非常に多数作り、その1つ1つが与える瞬間的な時間微分の情報をアンサンブル平均することにより $dE(k)/dt$ を出そうというものである。Dommermuth-Yue スキームは初期条件として波形 $\eta(x)$ と共に自由表面に沿った速度ポテンシャル $\psi(x)$ の分布を要求する。今のところ $\psi(x)$ の与え方に関して特に合理的と思える方法もないので、とりあえずは波形 $\eta(x)$ から線形進行波の関係が成り立つように決めることにする。

本研究はまだ予備的段階なので、まずとりあえずは1次元問題に絞り、また波はすべて1方向に伝播するものと仮定する。またスペクトルとしては、風波の標準的なスペクトルのひとつである JONSWAP スペクトルを対象とする。

波の作成

JONSWAP スペクトルは

$$\Phi(\omega) = \beta \omega^{-5} \exp\left(-\frac{5}{4\omega^4}\right) \gamma^{\exp\{-(\omega-1)^2/2\sigma^2\}},$$

$$\sigma = \begin{cases} 0.07 & (\omega \leq 1) \\ 0.09 & (\omega > 1) \end{cases}, \quad \beta = 1.2 \times 10^{-3}, \quad \gamma = 3.3$$
(6)

と表現される。なおここでスペクトルのピーク ω_p が1、重力加速度 g が1になるような規格化をしている。

$$\langle \eta^2 \rangle = \int_0^\infty \Phi(\omega) d\omega = \int_0^\infty E(k) dk, \quad \omega(k) = \sqrt{k}$$
(7)

より波数空間におけるエネルギースペクトル $E(k)$ は $\Phi(\omega)$ から

$$E(k) = \Phi(\omega(k))/2\omega(k)$$
(8)

によって与えられる。

* これと非常によく似た、そしてある点においてはこれより優れていると思われる数値スキームがほぼ同時に West et al. (1987) によっても開発されている。

† このスキームの3次元問題への応用例としては、例えば Tanaka (1993) を参照。

計算領域の空間周期を L とする時、表面変位 $\eta(x)$ および自由表面での速度ポテンシャル $\psi(x)$ は

$$\begin{cases} \eta(x) = \sum_j (a_j \cos k_j x + b_j \sin k_j x), \\ \psi(x) = \sum_j \frac{1}{\omega_j} (-b_j \cos k_j x + a_j \sin k_j x), \end{cases} \quad k_j = j\Delta k, \quad \Delta k = 2\pi/L \quad (9)$$

のようにフーリエ表現される。エルゴード性を仮定してアンサンブル平均 $\langle \quad \rangle$ と空間平均 (上線) を同一視すると

$$\overline{\eta^2} = \frac{1}{2} \sum_j (a_j^2 + b_j^2) = \frac{1}{2} \sum_j A_j^2 = \langle \eta^2 \rangle \approx \sum_j E(k_j) \Delta k \quad (10)$$

が成り立ち、これより第 j モードの振幅 A_j は

$$A_j = \sqrt{2E(k_j) \Delta k} \quad (11)$$

と決めればよい。各モードの位相は $[0, 2\pi]$ でランダムに分布しているとして、(9) のフーリエ係数 $\{a_j, b_j\}$ は

$$\begin{pmatrix} a_j \\ b_j \end{pmatrix} = A_j \begin{pmatrix} \cos \theta_j \\ \sin \theta_j \end{pmatrix}, \quad \theta_j \text{ は } [0, 2\pi] \text{ の一様乱数} \quad (12)$$

と与え、こうして1組の $\{\eta, \psi\}$ ができる。一様乱数 θ の列を取り替えることにより、同じスペクトルを持つ $\{\eta, \psi\}$ の組を必要なだけ作り出すことができる。Dommermuth-Yue のスキームより各 $\{\eta, \psi\}$ の組に対して $da_j/dt, db_j/dt$ が求まれば、エネルギー輸送関数 $T(k)$ は

$$T(k_j) = \frac{dE(k_j)}{dt} = \frac{1}{\Delta k} \left\langle a_j \frac{da_j}{dt} + b_j \frac{db_j}{dt} \right\rangle \quad (13)$$

で求めることができる。

§3. 計算結果と今後の検討課題

図1は1次元、1方向伝播を仮定したときの、波数スペクトルとしての JONSWAP スペクトルを示し、図2は空間平均から定義されたエネルギースペクトルが図1の JONSWAP スペクトルになるような波形の一例を示す。ここでは $L = 20\pi$ としている。図3は、図2に示された波形が与えるエネルギー輸送の一サンプルを示し、また図4はこのようにして得られるエネルギー輸送の、10,000個のサンプルに対する相加平均として求められた $T(k)$ を示している。

これらの結果は、この研究方法から何らかの有意義な結論を導き出すまでにはまだまだ煮詰めなければならない点が山ほど残されていることを示唆している。この準備段階を通じて実感された今後検討を要する点、および疑問点としては以下のようなものが挙げられる。

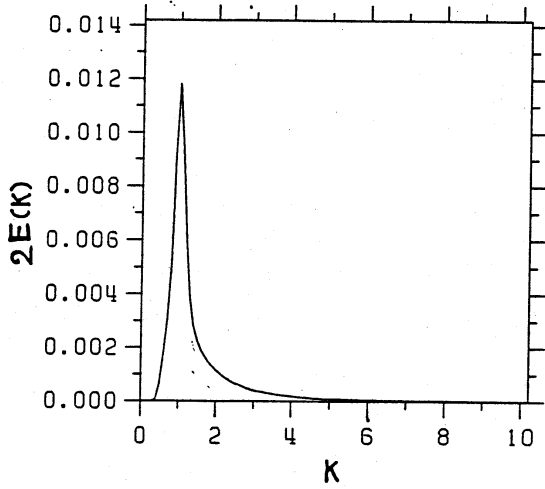


図1 : JONSWAP スペクトル.

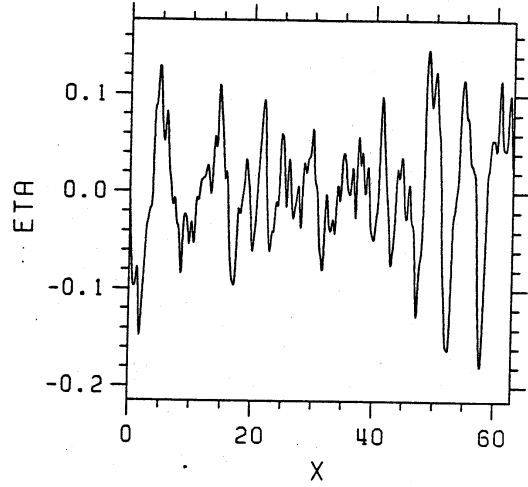


図2 : JONSWAP スペクトルを持つ波形の一例.

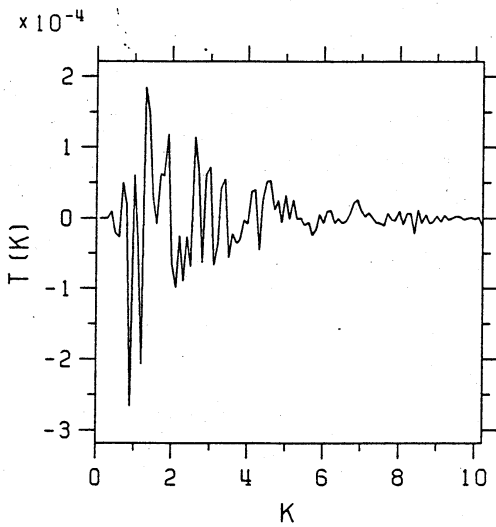


図3 : 図2の波形が与えるエネルギー輸送.

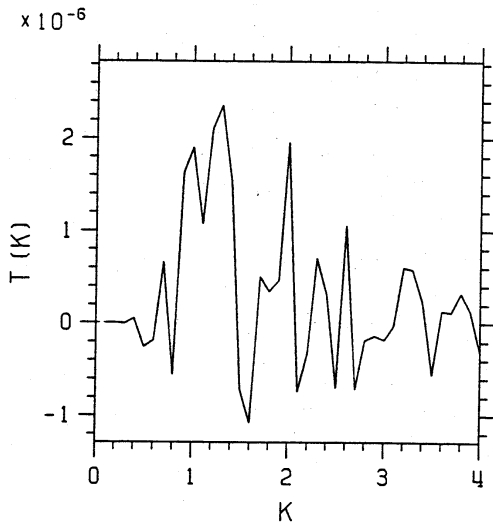


図4 : 10,000個のサンプル波形から得られたエネルギー輸送関数 $T(k)$.

- (1) Hasselmann 理論によるとエネルギー輸送はエネルギースペクトルの3乗のオーダーであり、したがって $T(k) \sim (ak)^6$ である。一方1つのサンプル波形から数値計算によって求められるエネルギー輸送は、deterministic な Zakharov 方程式から推測すると $(ak)^4$ の程度であろう。したがって、仮に $ak \sim 0.1$ とすると、我々が今やろうとしていることは、大きさ100程度の変動を無数に集めて、その中から大きさ

1 程度のトレンドを正しく出そうとしている事になり、その実現のためには、かなり正確な da_j/dt , db_j/dt の計算が必要となるはずである。ところで Dommermuth & Yue スキームでは振幅についての平均水面まわりの Taylor 展開が用いられており、その打ち切りのオーダー M (すなわち非線形効果取り込みのオーダー) がひとつの計算パラメタとなるが、このような高精度計算のためには M を十分大きく取る必要があろう。一方 Hasselmann 理論は 4 波共鳴理論に基づいており、これは $M = 3$ に対応している。数値計算で $M = 3$ とした計算では目標としているような相対誤差 1% 以下といった精度を達成できるとは思えない。Dommermuth-Yue スキームで $M = 3$ と固定して数値計算すれば、Hasselmann 理論と符合する結果が出せるのであろうか？

- (2) そもそも Hasselmann 理論に考慮されていない高次非線形性効果の影響を評価しようとしているのにもかかわらず、波形 $\eta(x)$ と表面速度ポテンシャル $\psi(x)$ の間に線形進行波の関係を仮定しているが、それでやろうとしている事と本当に矛盾しないであろうか？もし改良するとすれば他にどんな $\psi(x)$ の与え方が考えられるか？
- (3) 上で示した計算例では計算領域の長さ L は $L = 20\pi$, すなわちドミナントな波の 10 波分にすぎない。非常に多くのサンプルについてのアンサンブル平均を取るといことで、各サンプルに含まれる波の数はそれほど多くしなくてもいいのではないかという楽観に基づくものであったが、この考えは明らかに修正を要する。現に $L = 40\pi$ と 2 倍にしてやはり 10,000 個の平均から $T(k)$ を出すと、 $L = 20\pi$ のそれとは全く異なる結果を与える。前節で述べたように、波形を与えるに当たって、エルゴード性に基づいて、空間平均によるエネルギースペクトルが JONSWAP スペクトルを与えるように波形のフーリエ係数を決めているが、この手続きが正当化されるためには、長さ L の計算領域中にかなりの数の波が含まれる必要があるであろう。多数の小さなサンプルのアンサンブル平均に変わって、非常に大きな一つのサンプルにおける空間平均を考えるべきなのかも知れない。もしこれが取るべき道だとすると将来本当の問題である 3 次元問題に取り組む際には計算機のメモリとの兼ね合いでネックになってくる可能性もある。

今回は時間切れで、かなり情けない発表になってしまいましたが、上で述べたような疑問点、課題を一つ一つクリアーして、必ずや近い将来には発表に価するような結果を得たいと考えております。

参考文献

- Dommermuth, D.G. & Yue, D.K.P. 1987 A high-order spectral method for the study of nonlinear gravity waves. *J. Fluid Mech.* 184, 267-288.
- Hasselmann, K. 1962 On the nonlinear energy transfer in a gravity wave spectrum. Part I. General Theory. *J. Fluid Mech.* 12, 481-500.
- 小松幸生、草場忠夫、増田章: 風波成分波間の非線形エネルギー伝達—新しく開発した効率的な計算法について—九州大学応用力学研究所所報 75(1993), 121-146.
- Polnikov, V.G.: Numerical modelling of flux spectra formation for surface gravity waves. *J. Fluid Mech.* 278(1994), 289-296.
- Tanaka, M. 1993 Mach reflection of a large amplitude solitary wave. *J. Fluid Mech.* 248, 637-661.

- West, B.J., Brueckner, K.A., Janda, R., Milder, D.M. & Milton, R.L. 1987 A new numerical method for surface hydrodynamics. *J. Geophys. Res.* 92 (C11), 11,803-11,824.
- Yuen, H.C. & Lake, B.M. 1982 Nonlinear dynamics of deep water gravity waves. *Adv. Appl. Mech.* 22, 67-229.
- Zakharov, V.E. & Filonenko, N.N. 1966 The energy pectrum for stochastic surface level oscillations. *Dokl. Akad. Nauk SSSR.* 170, 1292-1295.
- Zakharov, V.E., L'vov, V.S. & Falkovich, G. 1992 *Kolmogorov epectra of Turbulence I. Wave turbulence* (Springer)
- Zakharov, V.E. & Zaslavskii, M.M. 1982 Kinetic equation and Kolmogorov's spectra in a weak turbulent theory of wind waves. *Izv. Acad. Sci. USSR, Atmos. Ocean. Phys.* 18, 970-979.