

冬の雪道における凸凹現象について

北海学園大学 世戸 憲治 (Kenji Seto)

1. はじめに

私の住む札幌では冬期間相当量の降雪があり、積雪道路上で車を運転することは慣れた人にとっても非常に大変である。雪面に凸凹ができてハンドルをとられたり、あるいは凸凹がなく平らなときはブレーキがきかなくなる。ブレーキがきくとこの真逆では多少凸凹があった方がよいかもしれない。ここではこの凸凹が発生するメカニズムを解明すべく1つの数値解析を試みる。

凸凹の発生状況をまとめると、

1. 1度に多量の降雪があったとき。例えば2~3時分のうちに30cm以上の雪が積もったとき。これはある程度雪がやわらかいと車のタイヤが凸凹が発生しやすいことを意味する。
2. 凸凹が発生するのはほとんどの場合、信号のある交差

桌の前後100m位の範囲である。交差桌の近くでは車が止まるにも発進するにも雪に対し水平方向の力が加わるこれが原因と考えられる。

3. 不思議なことは1台1台の車は走る速度も重量もバラバラであるにもかかわらず、凸凹はほぼ一定周期でしかも横方向にかなりの程度位揃ったものになること。このような波形を一般にはソコバン道路と言っているが、ここではこの種の波形をコセーレントな波と呼ぶことにする。このときの波長は雪がやめらかりときで数10cmで雪が固くなる程波長は短くなるように思われる。
4. 初めから雪が固くしよってなるときはコセーレントにはならず、あちこちに小さな山状のボコボコができる。このような道路をイボイボ道路などと言う。

自然界にはこれと似たような現象はいろいろある。海岸の砂の上に風が吹いてできる風紋、あるいは草原に風が吹くとき波状に草がしなだれる現象がある。いわし雲、鱗雲などもこのような例である。

これらの現象には一歩の異なるメカニズムが関与していると考えられる。

1. 凸凹が発生するためにはある種の《起動力》が必要

- ること。車あるには風から受ける力である。ただしこれだけでは波形はできず。風はどんなに一様に吹いても風紋はできずのだから2番目の要素として、
2. 砂、草あるには雪の中に存在する《力学的非線形性》が関与してはいるはずである。この非線形性が起動力によって発揮されたとき特定の形を持った波形が発生すると考えられる。しかしこれだけではない。
3. 発生するパターンにある種の規則性が発生するためには凸凹の《ならし役》といったものも必要であろう。これは力学的には抵抗であるが、これがなければ全く *at random* なパターンになってしまっただろう。

ここでは雪道に発生する凸凹を上に述べた3つの要素《起動力》、《力学的非線形性》、《ならし役》をうまくとり入れることで解析することを試みよう。しかし雪に対してどのようなモデルが適切であるかというところはよくわかっていない。雪はやあらかるときは流体的な性質を持つが固くなるるとほとんど固体であり、その中間では弾性体あるいは塑性体のような性質を持つ。ここではまず始めとして雪を流体として扱ってみるが、これは自明な根拠があるわけでは無い。しかもここでは雪を2次元の流体として扱う。本来ならば道路に

積もった雪の高低差を問題にするのだから3次元でなければならぬが、方程式を解くことがあまり困難とらるから2次元流体で何が言えるかということを考えることにする。

2. 方程式の導入

ここでは流体力学における Navier - Stokes 方程式

$$\rho[\partial_t \mathbf{V} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V}] = \rho \mathbf{K} - \nabla P + \mu \Delta \mathbf{V} \quad (1)$$

から始める。道路面を (x, y) 平面とし、その上を2次元流体としての雪がおおってあるものとする。ここで $\rho(t, x, y)$, $\mathbf{V}(t, x, y)$, $P(t, x, y)$ は時刻 t , 点 (x, y) におけるそれぞれ、流体の密度、速度、圧力とする。また μ は流体の粘性係数である。また \mathbf{K} は流体の単位質量あたりに作用する外力であるが、ここでは車から作用する水平方向の力 F , および雪と道路面との間に作用する摩擦力 F_N とからなることを考えられる。ただしこれらの力は流体の単位質量あたりではなく、単位面積あたりに作用するものとする。

$$\rho \mathbf{K} = F - F_N \quad (2)$$

とおくことにする。車から作用する力 F は正しくは車が通るたびに毎に発生する力であるが、ここでは時間的にも空間的にも

も平均化した一定の力と考えることにする。

一方摩擦力 F_N の方は方程式の上からは雪と道路面との間に作用する摩擦によるものと考えるのが最も理解しやすいが、実際は3次元的に積もった雪の内部同士に作用する力をも包含するものと考えた方が良さそうだ。この力は雪が潜在的に持つ「非線形性」を代表するものである。

通常摩擦力は静止摩擦と動摩擦に分け、動摩擦の方は最大静止摩擦力より一般に小さく考えられてる。ここでは摩擦力 F_N はより一般的に速度 V の関数と考える。その最も reasonable な形は初め速度の増加と共に摩擦力の元も増大し、ある程度速度が増したところで摩擦力の元は一旦小さくなり、その後速度の増加に伴い摩擦力の元も再び増大して行くというものである。このような摩擦力をここでは速度 V の3次式で近似することにして、

$$F_N = \alpha \left[V^2 - 3b|V| + 3b^2 - a^2 \right] V \quad (3)$$

$$(b > \frac{2}{\sqrt{3}} a > 0)$$

とおくことにする。ここで a, b は速度の次元を持つパラメータ、 α は摩擦力の強さを表わすパラメータである。この摩擦力は $|V| = b$ を中心とする区間 $(b - \frac{a}{\sqrt{3}}, b + \frac{a}{\sqrt{3}})$ で

$d|F_N|/d|V| < 0$, 一方負勾配にあっては「 $\frac{1}{2}$ 」わゆる負性抵抗を示す。それゆえ「起動力」 F の大きさがある程度

大きく、動作点がこの負勾配のところにくると振幅が増大するところから起こる。

以上のことを計算上見やすくするためには V と F を測る原点をずらしておく方がよい。リマ車の走る方向を x 軸方向として、

$$V = b \mathbf{e}_x + v \quad (4)$$

と V から v に、また

$$F = \alpha \left[b(b^2 - a^2) - \frac{f}{4} \right] \mathbf{e}_x \quad (5)$$

と F から f に変換する。 F は方程式中に含まれる唯一の方向性を持った量であることに注意する。この式中の $\alpha b(b^2 - a^2) \mathbf{e}_x$ の項は $v = 0$ 、つまり $V = b \mathbf{e}_x$ のときの摩擦力 F_N とキャンセルするように入力したものである。

あと残り未知の力は圧力からくる $-\nabla P$ である。この項については雪の物理的特性がはっきりしているためよくはわかる。ここでは圧力 P と密度 ρ との間には理想気体のときと同じ関係があるものとして

$$P = \beta \rho \quad (\beta \text{ は正定数}) \quad (6)$$

とおくことにする。もともとこの項はパターン形成にはあまり重要な働きをしていないのでありこの形にこだわる必要はないように思われる。

以上で解くべき方程式が用意された。すなわち (1) 式に (2) (3), (6) を適用し, (4) (5) の変換をほどこすと v に関する方程式が得られる。この v を

$$v = (u, v) \quad (7)$$

と成分に分け, 方程式を成分毎に書き下すと,

$$p[\partial_t u + (u+b)\partial_x u + v\partial_y u] = -\alpha \left[N(u, v)(u+b) - b(b^2 - a^2) + \frac{f}{4} \right] - \beta \partial_x p + \mu \Delta u, \quad (8)$$

$$p[\partial_t v + (u+b)\partial_x v + v\partial_y v] = -\alpha N(u, v)v - \beta \partial_y p + \mu \Delta v \quad (9)$$

となる。ここで $N(u, v)$ は

$$N(u, v) = \left[\sqrt{(u+b)^2 + v^2} - \frac{3}{2}b \right]^2 + \frac{3}{4}(b^2 - \frac{4}{3}a^2) > 0 \quad (10)$$

と定義される。あとはこの (8) (9) 式と連続の方程式

$$\partial_t p + \partial_x [p(u+b)] + \partial_y (pv) = 0 \quad (11)$$

とを連立させて, u, v, p について解くことになる。

もちろんこれらの方程式を解析的に解くことはほとんど不可能であろう。次節ではこれらの方程式を数値的に解いてみるが, その前に特別な場合を考えてみる。圧力項は $\Pi^4 - \Pi$ の形成にはあまりかわるまいから, ここで $\beta = 0$ とおいてみる。このとき (9) 式から $v \equiv 0$ なる解が存在するがこの

解は N の正定値性から安定であることがわかる。このとき
方程式 (8) (11) は簡単になるので、

$$P[\partial_t u + (u+b)\partial_x u] = -\alpha(u^3 - a^2 u + \frac{f}{4}) + u \Delta u \quad (12)$$

$$\partial_t P + \partial_x [P(u+b)] = 0 \quad (13)$$

となる。これでも解析的に解くにはまだ複雑すぎるが、
ここでさらに u, P 共に $\xi = x - \bar{u}t$ (\bar{u} はある一定の速度)
のみの関数であると仮定すると解析的に解くことができて、

$$u = \pm \frac{a}{2} \left\{ 1 \pm \tanh \left[\frac{a}{2} \sqrt{\frac{\alpha}{2\mu}} (\xi - \xi_0) \right] \right\} \quad (14)$$

より kink 解を求めることができる。ここで複号は同順では
なくそれぞれ独立で4通りの解を示す。この kink の幅は

$$\frac{2}{a} \sqrt{\frac{2\mu}{\alpha}}$$

であるが、もしこのように 1-kink だけではなく 2-kink 解
もこのように求められるとすれば、これを周期とする coherent
な波が存在するであろうことを暗示している。

3. 数値解について

ここで前節に述べた u, v, P に関する方程式 (8), (9), (11)
を数値的に解いてみる。まずここで2個のパラメータ μ, a
を $\mu = 1, a = \frac{\sqrt{3}}{2}$ に固定する。初期条件として $u,$

v は一様乱数で与えておくが、 $f=1$ は全平面で一一定とし、 $f=1$ とする。境界条件は車の走る方向である x 方向に $f=1$ は周期境界とするが、それに対し横方向である y 方向に $f=1$ は固定とする。残るパラメータは α, β, b, f の4個であるが、 f に $f=0$ のとき最もパターンが発生しやすいので以下の数値例ではすべて $f=0$ の場合に限定してみた。これらパラメータは α, β, b の3個である。

計算結果の表現法に $f=1$ は本来 (x, y) 平面に横たわる方向を持つ u, v また f に $f=1$ ともすべて (x, y) 平面に垂直な方向の高さとして表現することにする。ここでは雪を2次元として扱った z の高さをもとと現実の雪面に表われる高低差を求めることはできる z の高さがあるが、高低差で表わした密度 f の変化が現実の雪面に起こる凸凹をある程度表わして z と考えて良いたろう。

以下典型的な例を3つあげる。図1は $\alpha=4, \beta=0, b=1$ の場合である。時間 t が $t=1$ から $t=10$ まで u に凸凹が発生し、それが連続の式を通じて f に伝わっていく。この例ではコヒーレントな波は発生せず、凸凹の様子はイボイボ道路の場合と良く似ている。なお v の値は z の場合をすみやかにゼロに収束してしまふので図には示していない。

図2は $\alpha=1, \beta=0, b=8$ の場合である。この例では

波はかなりコセーレントになり、リウチーソロバン道路を良く再現してゐるからである。このから位相が横方向にそろつたためには b の値、つまり速度 V の値が大ききことで、粘性効果によって横方向の雪をも引っぱり込むことが必要である。

最後の図3は $\alpha=4$, $\beta=4$, $b=8$ の場合であるが、このときは u に図1と同じような凸凹ができて、その高さとともに細かい波形が存在する。 ρ の変化はゆっくりした変化部分と粗い変化部分とをおり混ぜたような大変興味あるパターンを示す。これはイボイボ道路とソロバン道路を取り混ぜたようなもので現実の雪面にもこのようなパターンが見られる。

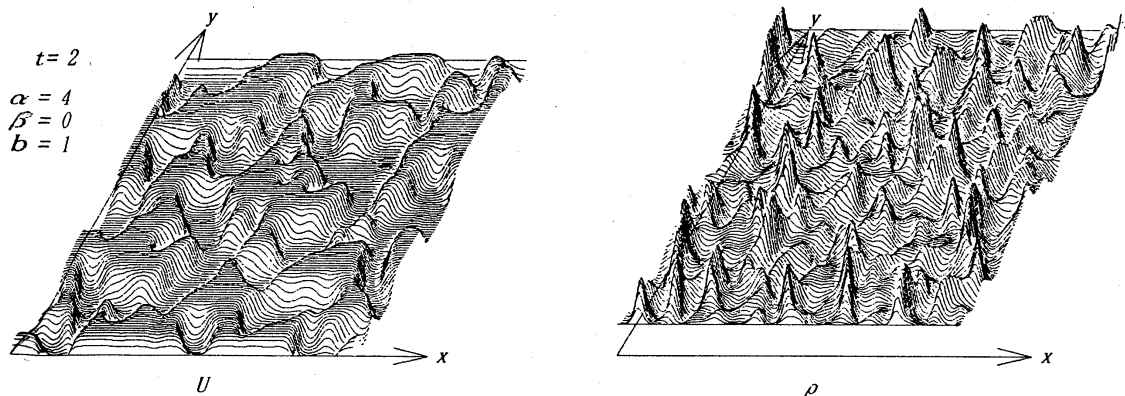
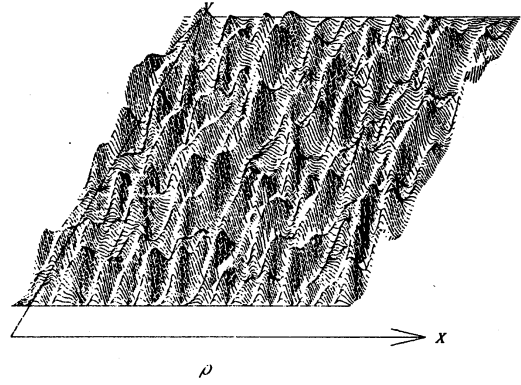
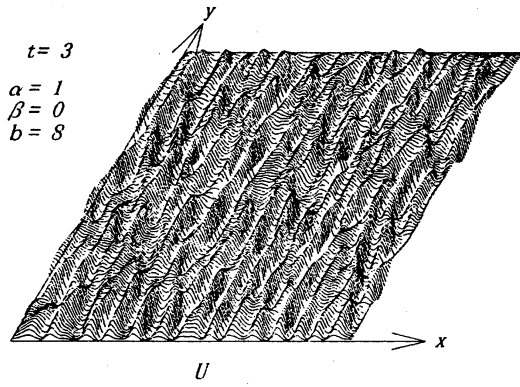
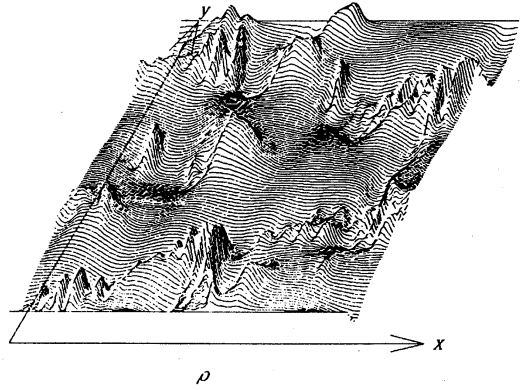
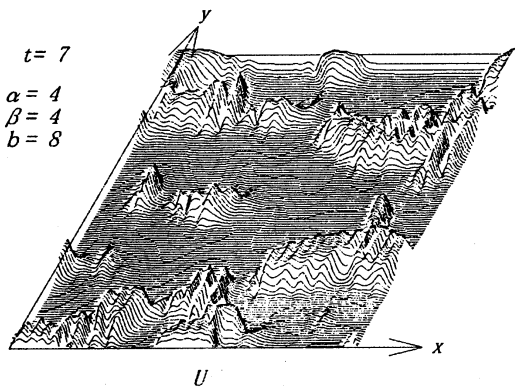


図 1



四 2



四 3