

回転する水路を伝わる三次元非線形定常波

阪大基礎工 高岡正憲 (Masanori Takaoka)

阪大基礎工 杉本信正 (Nobumasa Sugimoto)

1 はじめに

Korteweg-de Vries (K-dV) 方程式は、水路を一方向に伝播する浅水波を良く記述し、定常解として孤立波（ソリトン）や周期波列（クノイド波）を持つことが知られている。ところが、運河やフィヨルドに沿って伝播するような大規模な浅水波では、地球の回転による Coriolis 力の影響を無視することが出来ない。この場合、波は三次元的構造を示すようになり、K-dV 方程式の多次元版である Kadomtsev-Petviashvili (K-P) 方程式に更に回転の効果を持った方程式で記述される。表面波及び内部波に対して同方程式が導かれている。

この回転効果が孤立波の伝播に及ぼす影響に興味を持たれるようになり、水平面内で緩やかに回転している水路を伝わる内部浅水波の実験が行なわれた (Maxworthy, '83; Renouard *et al.*, '87)。観測された結果は次のようなものである (図 1 参照); (1) 振幅が最大値をとる水路の側壁での波形と位相速度は、回転にはほとんど独立で K-dV 方程式のそれと良く一致する。(2) 波高は側壁から離れるに従って指数関数的に減少する。これは Coriolis 力による捕捉波である。(3) 波高が高いほど波は速く進み、従って波峰が進行方向に対して後方に曲がる。(4) 波高は進行するに従って全体的に減衰する。つまり定常な孤立進行波は観測されていない。

この現象を記述する方程式が、Grimshaw と Melville ('89) らによって多重尺度法を用いて導かれているそして、非定常の数値シミュレーションも行なわれ、実験との対比も行なわれている (Katsis and Akylas '87)。また、K-dV 方程式の定常孤立波解からの摂動という形で、この方程式の定常解についても議論されている (Tomasson *et al.*, '89)。これまでの観測と研究では定常孤立波は存在できないと考えられる。しかしながら、定常周期波列の存在可能性については不明である。本講演では、より複雑な三次元的構造を持つ周期定常波解の存在の可能性について数値的に調べた結果を報告する。

2 支配方程式の導出と線形解

Grimshaw と Melville('89) は, この現象を記述する方程式を次のように導いた. 十分長い水路が, 図 2 に示すように鉛直軸 z の回りに角速度 $f/2$ で回転しているものとする. ただし水底は水平で, 水路幅 l は一定とする. 回転は遠心力が無視できる程度に弱く Coriolis 力のみ考慮する. 流体は非粘性非圧縮の完全流体とすると, 基礎方程式は Euler 方程式と連続の式であり, 一方境界条件は, 自由表面では運動学的条件と圧力連続の条件, 底と側壁では流体が付き抜けれないという条件である. K-P 方程式を導く時と同じスケーリングを行ない, 回転の効果を幅方向の変化と同程度に小さいとして, 多重尺度展開を用い波高に対する閉じた式を導く.

その式は, 一般性を失うことなく, 適当なスケーリングの後に以下のように書ける:

$$(A_T + AA_X + A_{XXX})_X + A_{YY} - F^2 A = 0. \quad (1)$$

一方, 側壁での境界条件は

$$A_Y + FA = 0 \quad \text{on } Y = 0, L. \quad (2)$$

によって与えられる. ここに, (T, X, Y, L) は (t, x, y, l) に, A は波高に対応するもので, F は回転の大きさを表すパラメータである. この式は Rotation-Modified K-P 方程式 (RM K-P 方程式) と呼ばれる.

この式の特性を調べるため, まず線形解について考える. X 方向に正弦的に伝播する波を仮定して

$$A(X, Y, T) = \phi(Y) e^{i(kX - \omega T)}, \quad (3)$$

とおくと, $\phi(Y)$ に対する次の常微分方程式を得る:

$$(k\omega + k^4 - F^2) \phi + \phi_{YY} = 0. \quad (4)$$

この方程式の解は次の 3 つに大別される.

(I) $-k\omega - k^4 + F^2 < 0$ のとき, 解は $\phi_0(Y) = C_0 e^{-FY}$, $\omega = \omega_0(k) \equiv -k^3$, となり, 波の振幅が Y -方向に指数関数的に減少する波を表す. これは, Kelvin 波モードと呼ばれる.

(II) $-k\omega - k^4 + F^2 = 0$ のときは, $\phi(Y) = 0$ なる自明の解となる.

(III) $-k\omega - k^4 + F^2 > 0$ のとき, 解は $\phi_n(Y) = C_n \left(\cos \frac{n\pi}{L} Y - \frac{FL}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{L} Y \right)$,

$\omega = \omega_n(k) \equiv -k^3 + \frac{F^2 + (\frac{n\pi}{L})^2}{k} \equiv -k^3 + \frac{b_n^2}{k}$, ($n = 1, 2, 3, \dots$) となり, 波の振幅が Y -方向に振動する波を表す. これは, Poincaré 波モードと呼ばれる.

図 3 は, Kelvin 波モードと Poincaré 波モード ($n = 1 \sim 3$) の振幅 $\phi(Y)$ のグラフである. また, 位相速度 C と群速度 C_g は $b_0 = 0$ とすると, 次のように書ける.

$$C = \frac{\omega}{k} = -k^2 + \frac{b_n^2}{k^2}, \quad (5)$$

$$C_g = \frac{d\omega}{dk} = -3k^2 - \frac{b_n^2}{k^2}. \quad (6)$$

Poincaré 波は $b_n^2 > 0$ であり, $k \rightarrow 0$ の時 $C \rightarrow \infty$, $C_g \rightarrow -\infty$ となる. つまり, 長波の極限で Poincaré 波は非常に速く X 軸負の方向にエネルギーを運び去るので, $X \rightarrow \pm\infty$ で $A \rightarrow 0$ となるような X 方向に局在する解は存在し得ないと考えられる. この結果は, 先に述べた実験の観測とも一致する.

3 定常周期波列

この節では, RM K-P 方程式の周期定常波解を求める数値計算の方法について簡単に述べる. X -方向に一定の速さ U で伝播する定常進行波を考え, 新しい変数 $\xi = X - UT$ を導入する. 基礎方程式 (1) と境界条件 (2) は各々次のように書ける.

$$(-UA_\xi + AA_\xi + A_{\xi\xi\xi})_\xi + A_{YY} - F^2 A = 0, \quad (7)$$

$$A_Y + FA = 0 \quad \text{on } Y = 0, L. \quad (8)$$

また, ξ -方向には, 周期境界条件を課す. 方程式 (7)(8) は, 変換 $\xi \rightarrow -\xi$ で不変なので, 解は ξ -方向に対称なものと非対称なものに大別される.

さて次の事実に着目する. 先に述べた線形解である Kelvin-Poincaré 波モードの $\phi(Y)$ から, 完全正規直交関数系 $\{\hat{\phi}_0, \hat{\phi}_1, \dots, \hat{\phi}_n, \dots\}$ を構成することが出来る. ここに,

$$\hat{\phi}_0(Y) = \sqrt{\frac{2F}{1 - e^{-2FL}}} e^{-FY} \quad (9)$$

$$\hat{\phi}_n(Y) = \sqrt{\frac{2}{L\{1 + (FL/n\pi)^2\}}} \left(\cos\left(\frac{n\pi}{L}Y\right) - \frac{FL}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi}{L}Y\right) \right) \quad (10)$$

である。解 $A(\xi, Y)$ をこの関数系及びフーリエ展開で表現すると、方程式 (7)(8) を単に差分で置き換えたものに比べ、少ないモード数でより精度良く解が求められることが期待でき、しかも境界条件が既に考慮されているので、解くべき式が簡単になるという利点がある。

そこで、 A を次のように展開する：

$$A(\xi, Y) = \sum_{k,m} A_{k,m} e^{ik\xi} \hat{\phi}_m(Y). \quad (11)$$

展開 (11) を方程式 (7) に代入すると、次の非線形連立方程式を解けば良いことが分かる：

$$\frac{1}{2} A_{k',m'} A_{k-k',m''} \int_0^L \hat{\phi}_m \hat{\phi}_{m'} \hat{\phi}_{m''} dY + \left(U + k^2 + \frac{f_m^2 - F^2}{k^2} \right) A_{k,m} = 0. \quad (12)$$

ただし、 $f_0^2 = F^2$, $f_n^2 = -\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$ ($n \neq 0$) で、添字 k', m', m'' については和をとる。この式は、変換 $F \rightarrow -F$ と変換 $(k, U, F, L, A_{k,m}) \rightarrow (1, \frac{U}{k^2}, \frac{F}{k^2}, Lk^2, \frac{A_{k,m}}{k^2})$ とに対して不変なので、実質的な独立変数は伝播速度 U 、回転 $F (> 0)$ と水路の幅 $L (> 0)$ の3つである。

ξ, Y -方向の展開を適当なモード数で打ち切ることにより残った有限個の非線形の連立方程式を Brent 法により数値的に解く。Brent 法は一種の反復法（高次元の Newton 法）であり、初期値が必要である。初期値としては線形解や K-dV 方程式の定常解などが考えられ、各々次のような特徴がある。自明な解 ($A \equiv 0$) から線形波が分岐する速度は、

$$U_n(k; F, L) = -k^2 - \frac{f_n^2 - F^2}{k^2} \quad (13)$$

で与えられるので、この関係を満たす任意のパラメータの近傍で線形解からの接続を考えることが出来る。しかも、Kelvin-波 (Y -方向に単調減少) や Poincaré-波 (Y -方向に振動構造) からの接続が考えられる。特に、後者からの接続は今までに行なわれておらず、三次元構造を持つという点でも興味がある。他方、K-dV 方程式の解は、平面波で $F = 0$ という制限を受けるが、非線形の解であり $F \neq 0$ への接続が容易である。非線形の連立方程式

の解が一度求まると、後はその解を Brent 法の初期値としてパラメータを少しづつずらせて解を求めていけば良い。

4 計算結果とまとめ

RM K-P 方程式の周期定常波解を数値的に求めた。本数値計算で用いたモード数は、 ξ, Y -方向とも 12 モードないし 16 モードで、 $A_{0,m} \equiv 0$ とした。また、 ξ -方向に対称性を考慮したものとそうでないものとので行なったが、今のところは対称な解だけが得られている。

4.1 Kelvin-波から接続した場合

線形波の位相速度からの差 $U - U_n$ が大きくなるほど、波高も高くなる。 $F = 0$ の時は、K-dV 方程式のクノイダル解に相当する。

回転 (F) を大きくしていくと、Coriolis 力による側壁への捕捉がより顕著になり振動構造も現れる (図 4 参照)。つまり、 $\phi_0 = e^{-FY}$ の形から分かるように、側壁からの距離に対する波高の減衰率が大きくなり、Poincaré 波モードが励起される。

水路幅 (L) については、二種類 ($\frac{\pi}{3}$ と $\frac{\pi}{6}$) しか計算を行っていないが、後に述べる Poincaré-波から接続した場合に比べると、その依存性は大きいようである。しかも、 L を大きくすることと F を小さくすることは同じような効果を表す。これもまた、 ϕ_0 が支配的な現象であることと合致している。

4.2 Poincaré-波から接続した場合

線形波の位相速度からの差 $U - U_n$ が大きくなるほど、波高も高くなる。 $F = 0$ の時、K-P 方程式の genus-2 解に相当する (図 5 参照)。

回転 (F) を大きくしていくと、振幅が全体として小さくなる。これは、式 (13) から分かるように U_n ($n \neq 0$) が F と共に大きくなり、 $U - U_n$ が小さくなるためである。

水路幅 (L) については、先に述べた Kelvin-波から接続した場合に比べると、その依存性は小さいようである。

4.3 いくつかの特例と今後の課題

今回の報告ではまだ系統的な整理が出来ていないが、次のような面白い現象も見つかっているので簡単に紹介しておく。

(I) $L = 0.5$ のとき (図 6 参照), 回転 (F) を大きくしていくと, もともと ($F = 0$) のクノイダル波が 4.1 で述べたように側壁に捕捉されるようになり, やがて ξ, Y の双方向に振動構造が現れ Poincaré-波に似た構造となる. しかも, この時の ξ -方向の特徴的な周期は 1 から 3 へと変化している. 更に回転を大きくしていくと, 既に 4.2 で述べたように全体としてその振幅が小さくなりやがて零となる.

(II) $L = 2\pi$ と広くとったとき (図 7 参照), 回転を加えていくと側壁に捕捉されるようになる同時に Y -方向に振動構造を持つ三次元的な波となる. ただし, 捕捉的な状態は側壁近傍に限られ, 残りの大部分では二方向に振動構造を持つ比較的小さい振幅の波である. 特徴的な周期としては, ξ -方向に 1, Y -方向に 4 のようである. 更に回転を大きくするとどうなるかは非常に興味あることではあるが, 今回行なった計算のモード数ではその精度に問題が出てくる.

今後は, 特にこれらの現象を系統的に整理し, そのメカニズムを明らかにする必要がある. また, 非対称な定常波解が存在し得るのかも調べたい.

T.Maxworthy : J. Fluid Mech. **129** (1983) 365-383.

D.P.Renouard, G.Chabert d'Hieves and X.Zhang : J. Fluid Mech. **177** (1987) 381-394.

R.Grimshaw and W.K.Melville : Stud. Appl. Math. **80**, (1989) 183-202.

C.Katsis and T.R.Akylas : Phys. Fluids **30** (1987) 297-301.

G.G.Tomasson, W.K.Melville and D.P.Renouard : J. Fluid Mech. **206** (1989) 1-23.

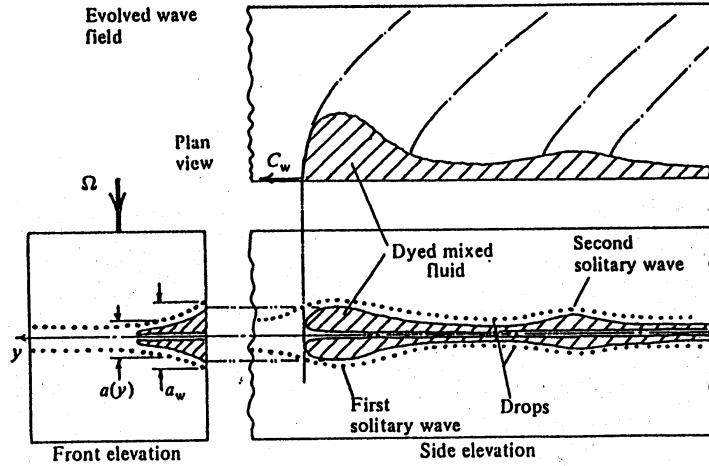


図1. 回転する水路を伝わる内部浅水波の実験の模式図
(Maxworthy, '83 の Fig.2 より)

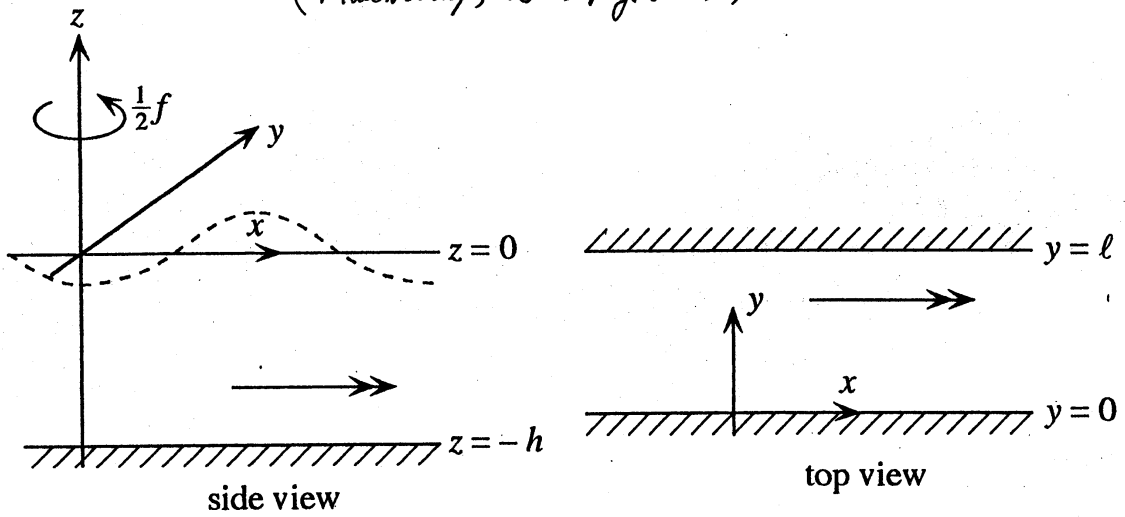


図2. x軸方向に無限に広がっている水路

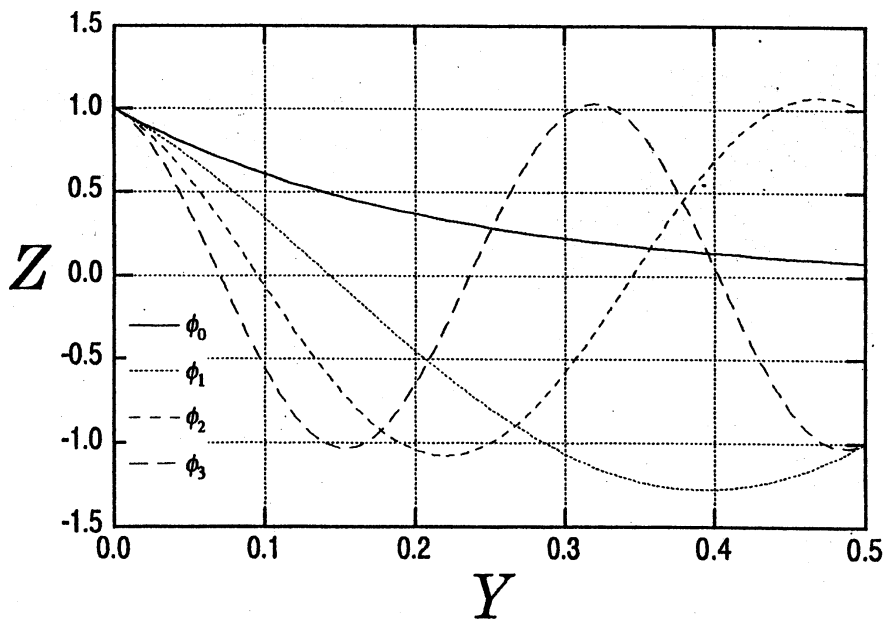


図3. \$\phi_0(y), \phi_1(y), \phi_2(y), \phi_3(y)\$ のグラフ

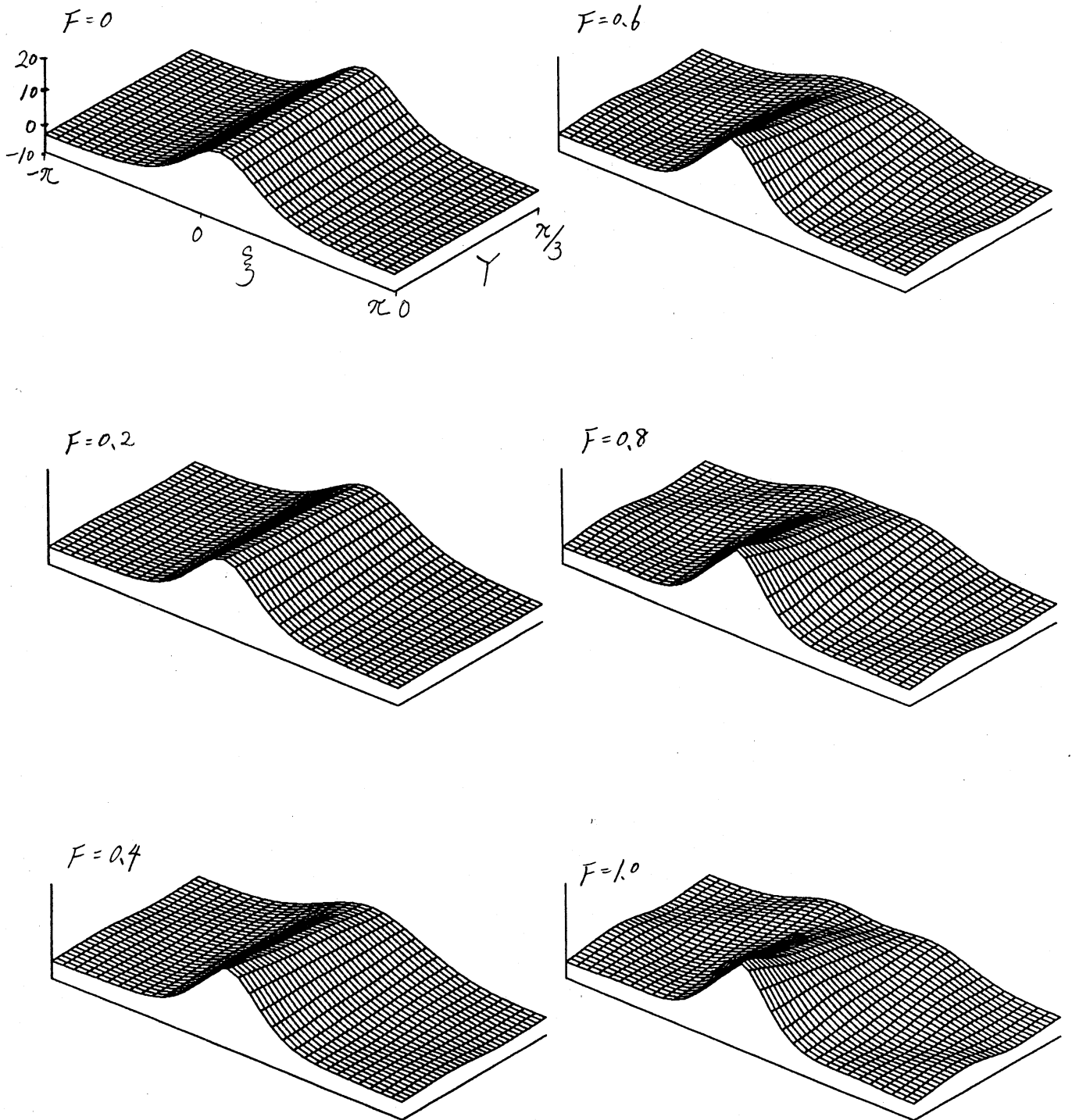


図4. Kelvin-波が接続した場合 ($L = \pi/3$, $U = 1$)
回転(F)を変えた時の定常周期波列

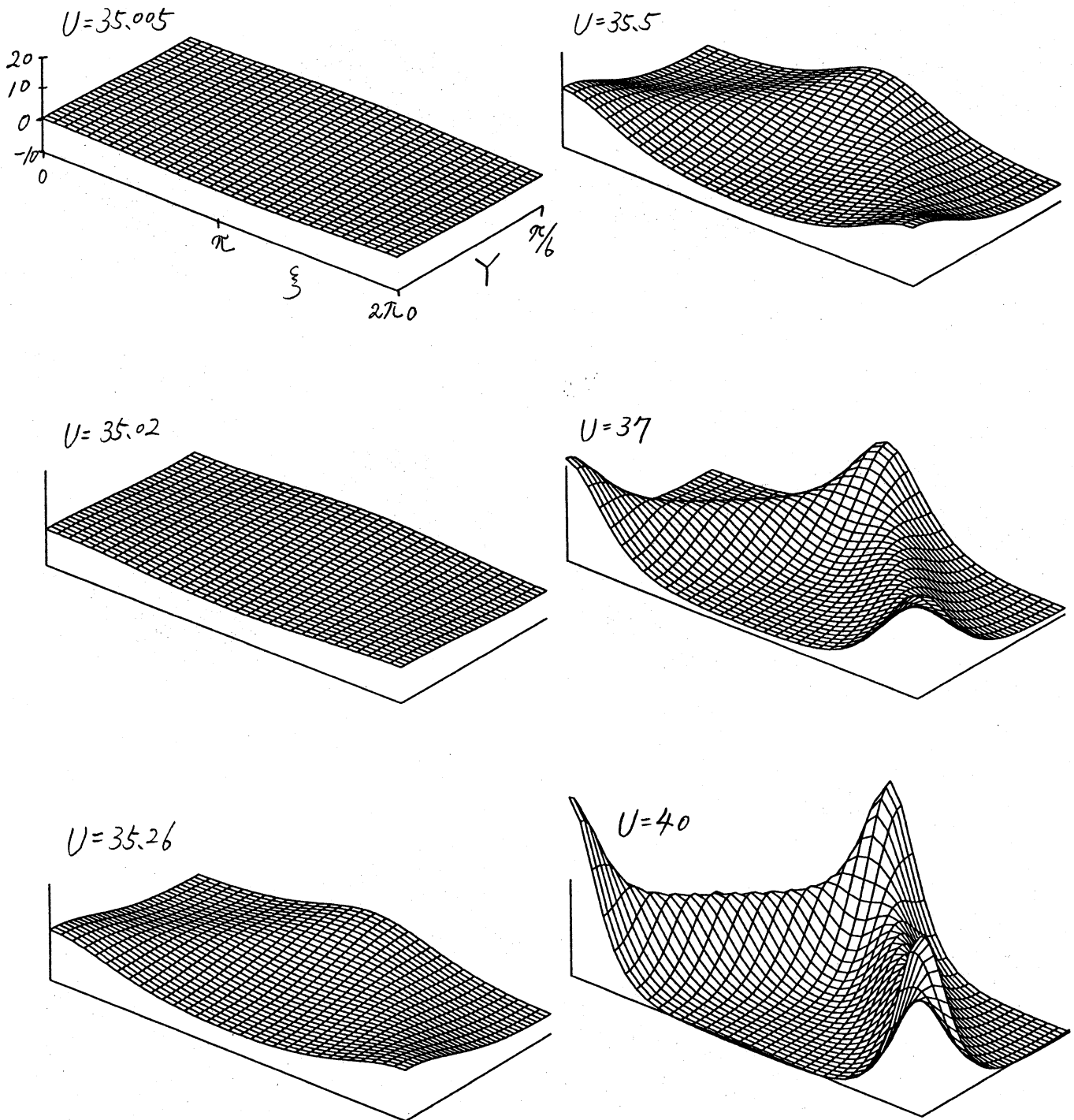


図5. Poincaré-波が接続した場合. ($L=\pi/6, F=0$)
 速度を $35 (=U_n)$ より大きくした時の定常周期波列.

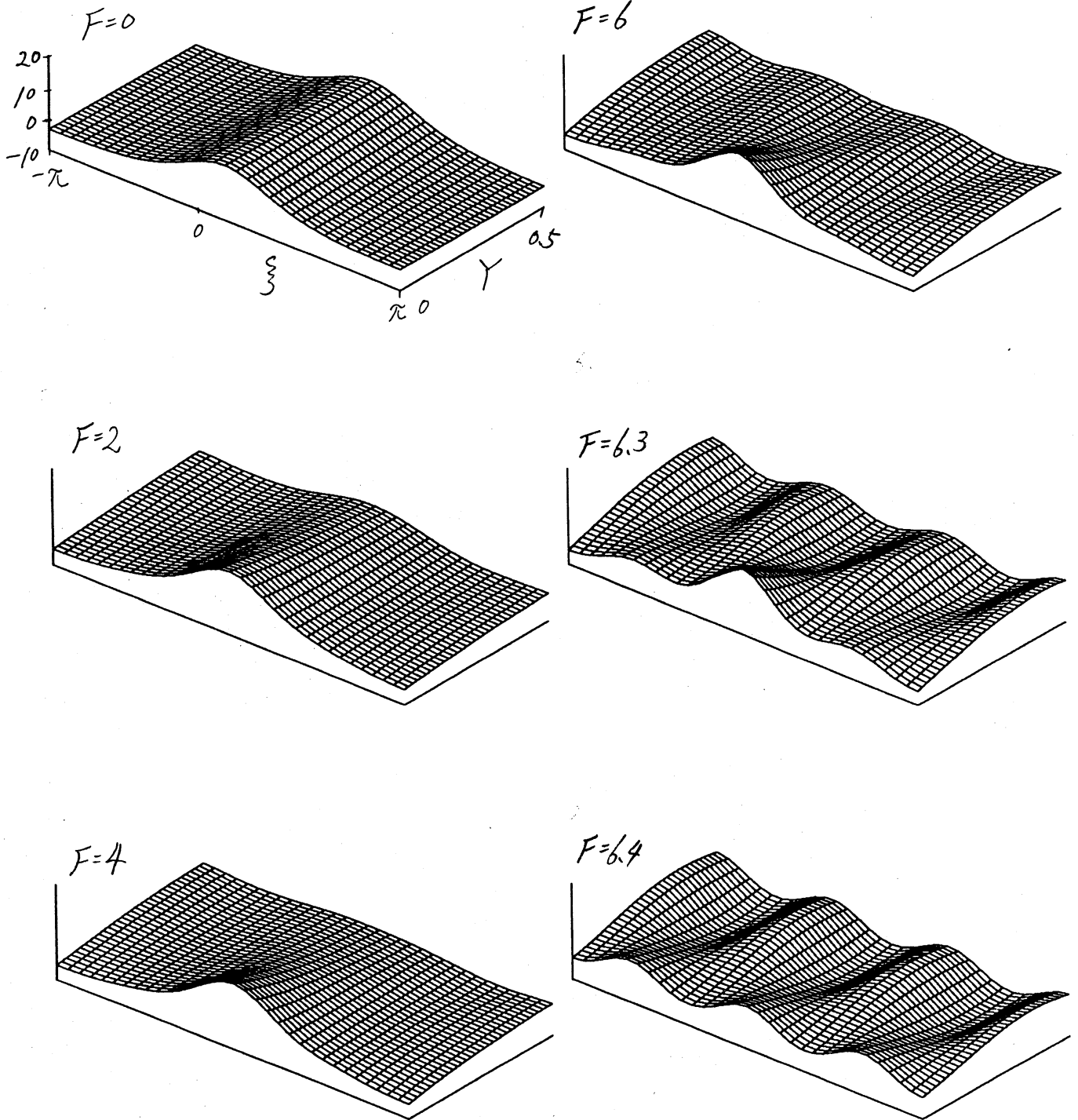


図6. Kelvin-波が接続した場合. ($L=0.5, U=0$)
 回転(F)を変えた時の定常周期波列

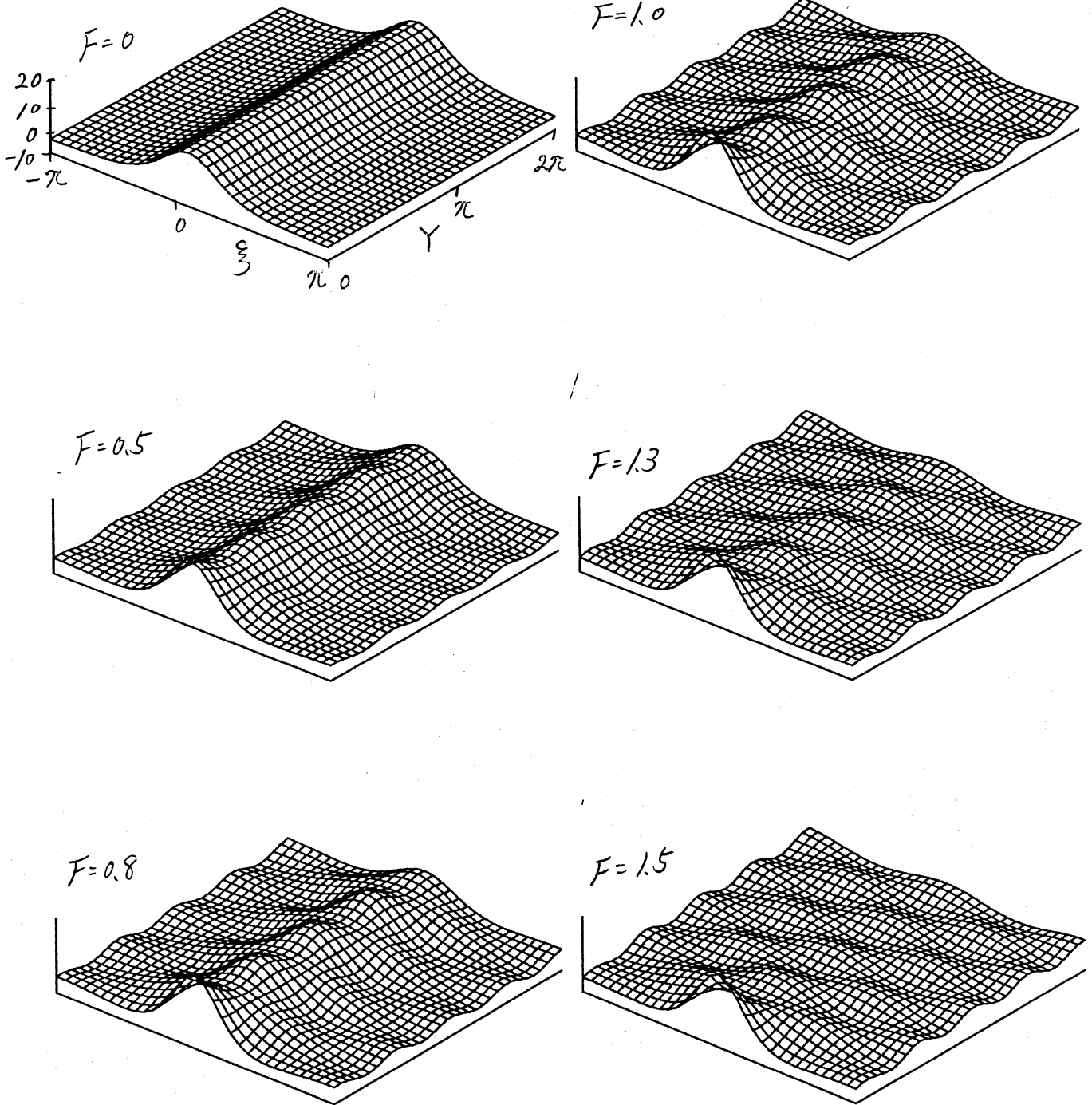


図7. Kelvin-波が接続した場合. ($L=2\pi$, $U=1$)
回転(F)を変えた時の定常周期波列.