数理解析研究所講究録
909 巻 1995 年 124-135

$SU(2,2)$ の離散系列表現の MULTIPLICITY について。

平賀 郁 (Iku Hiraga)

京都大学

§0 Introduction

G を $SL_2(\mathbb{R})$ とし、Γ を $SL_2(\mathbb{R})$ の cocompact かつ torsion free な discrete subgroup とする。このとき、重さ k の保型形式 $S_k(\Gamma)$ の次元について、次のことが知られていた。

$$\dim S_k(\Gamma) = \begin{cases} \mathrm{Vol}(\Gamma\backslash G)\,\frac{k-1}{\sqrt{2}\,\pi}, & k \geqq 3 \\ \mathrm{Vol}(\Gamma\backslash G)\,\frac{1}{\sqrt{2}\,\pi} + 1, & k = 2 \end{cases} \tag{0.1}$$

重さが 2 のときには、重さ 3 以上のものと比べて次元が 1 増加している。よく知られているように $SL_2(\mathbb{R})$ は discrete series D_k^+, D_k^- $(k \geq 2)$ をもつ。また、G の既約表現 π に対し、m_π を G の $L^2(\Gamma\backslash G)$ への右正則表現における π の重複度とすると、$m_{D_k^-} < +\infty$ であり、しかも $\dim S_k(\Gamma) = m_{D_k^-}$ が成り立っている。G 上の適当な関数に跡公式を適用すると、

$$\begin{cases} m_{D_k^-} = \mathrm{Vol}(\Gamma\backslash G)\,\frac{k-1}{\sqrt{2}\,\pi}, & k \geqq 3 \\ m_{D_2^-} - m_{\mathrm{Trivial}} = \mathrm{Vol}(\Gamma\backslash G)\,\frac{1}{\sqrt{2}\,\pi}, & k = 2 \end{cases} \tag{0.2}$$

が成立することがわかる。m_{Trivial} は明らかに 1 なので、(0.1) の式における重さ 2 の場合の $+1$ の変化は、m_{Trivial} によることがわかる。ここで、D_2^- は Harish-Chandra parameter が最も wall に近い discrete series representaion である。(D_2^+ も同様であり、D_2^+ に対しても、(0.2) と同様の式が成立する。) また、trivial representaion は D_2^- と同じ infinitesimal character をもつ non-tempered な unitary representaion であった。つまり、discrete series の Harish-Chandra parameter が wall に近いときに、non-tempered な representaion の寄与があるのである。

$G = SU(2,2)$ の場合に、以上と同様の現象を調べることが、我々の目標である。

平賀 郁

§1. Admissible Representations of $SU(2,2)$

1.1 Discrete Series Representations of $SU(2,2)$.

G が discrete series もつための条件は次の定理により与えられる。

Theorem 1.1. *(Harish-Chandra)*

G を connected semi-simple Lie group とする。このとき、G が discrete series をもつことと、G に compact Cartan subgroup T が存在することとは同値である。

いま、G が discrete series をもつとする。このとき、K を G の maximal compact subgroup とすると、G の compact Cartan subgroup T を K の subgroup からとることができる。$\mathfrak{g}$, $\mathfrak{t}$, $\mathfrak{k}$ をそれぞれ G, T, K の Lie algebra とする。$\lambda \in (\mathfrak{t}^{\mathbf{C}})^*$ が、ある T の character Λ の微分に等しいとき、λ は analytically integral であるという。また、λ が regular のとき、

$$\Delta^+_\lambda(\mathfrak{g},\mathfrak{t}) = \{\alpha \in \Delta(\mathfrak{g},\mathfrak{t}) \mid \mathrm{Re}\langle \lambda, \check{\alpha}\rangle > 0\}$$

$$\rho_\lambda = \frac{1}{2}\sum_{\alpha\in\Delta^+_\lambda(\mathfrak{g},\mathfrak{t})} \alpha$$

$$\rho_{\lambda,c} = \frac{1}{2}\sum_{\alpha\in\Delta^+_\lambda(\mathfrak{g},\mathfrak{t})\cap\Delta(\mathfrak{k},\mathfrak{t})} \alpha$$

とおく。

Theorem 1.2. *(Harish-Chandra)*

G が discrete series をもつとする。$\lambda \in (\mathfrak{t}^{\mathbf{C}})^*$ が regular でかつ $\lambda + \rho_\lambda - 2\rho_{\lambda,c}$ が analytically integral ならば discrete series representaion D_λ が存在する。逆に、G の discrete series は、このようなもので尽くされる。また、

$$D_\lambda \cong D_{\lambda'} \iff \exists w \in W(K,T) \text{ s.t. } \lambda' = w\lambda$$

が成り立つ。

Remark.

(1) λ は Harish-Chandra parameter と呼ばれる。
(2) D_λ の infinitesimal character は χ_λ である。
(3) D_λ は highest weight $\lambda + \rho_\lambda - 2\rho_{\lambda,c}$ の minimal K-type を multiplicity 1 でもつ。
(4) $\lambda + \rho_\lambda - 2\rho_{\lambda,c}$ は Blattner parameter と呼ばれる。

<u>$SU(2,2)$ の場合</u>.

$$G = \{g \in SL_4(\mathbb{C}) \mid {}^t\overline{g}Jg = J\}$$

$$J = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$$

$$K = \left\{ \begin{pmatrix} u_1 & \\ & u_2 \end{pmatrix} \middle| \, u_i \in U(2), \det u_1 \cdot \det u_2 = 1 \right\}$$

$$T = \left\{ \begin{pmatrix} e^{i\theta_1} & & & \\ & e^{i\theta_2} & & \\ & & e^{i\theta_3} & \\ & & & e^{i\theta_4} \end{pmatrix} \middle| \, \prod_{k=1}^{4} e^{i\theta_k} = 1 \right\}$$

T は明らかに、G の compact Cartan subgroup なので、theorem 1.1 により、$SU(2,2)$ は discrete series をもつことがわかる。ここで、

$$\mathfrak{t} = \left\{ \begin{pmatrix} i\theta_1 & & & \\ & i\theta_2 & & \\ & & i\theta_3 & \\ & & & i\theta_4 \end{pmatrix} \middle| \, \sum_{k=1}^{4} \theta_k = 0 \right\}$$

とし、$\lambda = (n_1, n_2, n_3, n_4) \in (\mathfrak{t}^{\mathbb{C}})^* \; (n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = 0)$ を

$$\lambda \left[\begin{pmatrix} i\theta_1 & & & \\ & i\theta_2 & & \\ & & i\theta_3 & \\ & & & i\theta_4 \end{pmatrix} \right] = i \sum_{k=1}^{4} n_k \theta_k$$

により定義する。このとき、容易に

$$\lambda \text{ が analytically integral} \iff \forall i, j \quad n_i - n_j \in \mathbb{Z}$$

であることがわかる。

また、$W(K,T)$ は

$$w_1(n_1, n_2, n_3, n_4) = (n_2, n_1, n_3, n_4)$$
$$w_2(n_1, n_2, n_3, n_4) = (n_1, n_2, n_4, n_3)$$

により生成されることもわかる。

Thorem 1.2 により、$SU(2,2)$ の discrete series は次のようになる。

$$\begin{aligned}
D_{\mathrm{I}} &: \{D_\lambda | n_i - n_j \in \mathbb{Z}, n_1 > n_2 > n_3 > n_4\} \\
D_{\mathrm{II}} &: \{D_\lambda | n_i - n_j \in \mathbb{Z}, n_1 > n_3 > n_2 > n_4\} \\
D_{\mathrm{III}} &: \{D_\lambda | n_i - n_j \in \mathbb{Z}, n_1 > n_3 > n_4 > n_2\} \\
D_{\mathrm{IV}} &: \{D_\lambda | n_i - n_j \in \mathbb{Z}, n_3 > n_1 > n_2 > n_4\} \\
D_{\mathrm{V}} &: \{D_\lambda | n_i - n_j \in \mathbb{Z}, n_3 > n_1 > n_4 > n_2\} \\
D_{\mathrm{VI}} &: \{D_\lambda | n_i - n_j \in \mathbb{Z}, n_3 > n_4 > n_1 > n_2\}
\end{aligned}$$

1.2 Standard Representations of $SU(2,2)$.

$SU(2,2)$ の Borel subgroup P_0 をその Lie algebra が

$$\mathfrak{p}_0 = \mathrm{Ad}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} I_2 & I_2 \\ I_2 & -I_2 \end{pmatrix}\right]\left\{\begin{pmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & * & * \end{pmatrix}\right\}$$

となるものすると、P_0 を含む G の cuspidal parabolic subgroup は P_0 と、long root に対応する parabolic subgroup P_1 と G 自身である。またそれぞれの Langlands 分解は、次のようになる。

$$M_0 = \left\{\begin{pmatrix} e^{i\theta} & & & \\ & e^{-i\theta} & & \\ & & e^{i\theta} & \\ & & & e^{-i\theta} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \pm 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & \pm 1 \end{pmatrix}\right\}$$

$$A_0 = \mathrm{Ad}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} I_2 & I_2 \\ I_2 & -I_2 \end{pmatrix}\right]\left\{\begin{pmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & a_1^{-1} & \\ & & & a_2^{-1} \end{pmatrix}\middle| a_i \in \mathbb{R}\right\}$$

$$M_1 = \left\{\begin{pmatrix} e^{i\theta} & & & \\ & e^{-i\theta} & & \\ & & e^{i\theta} & \\ & & & e^{-i\theta} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & x_{11} & & x_{12} \\ & & 1 & \\ & x_{21} & & x_{22} \end{pmatrix}\middle| \{x_{ij}\} \in SU(1,1)\right\}$$

$$A_1 = \mathrm{Ad}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} I_2 & I_2 \\ I_2 & -I_2 \end{pmatrix}\right]\left\{\begin{pmatrix} a & & & \\ & 1 & & \\ & & a^{-1} & \\ & & & 1 \end{pmatrix}\middle| a \in \mathbb{R}\right\}$$

ここで、$[\pm]\left[\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & 1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}\right] = \pm 1$, $\chi_n\left[\begin{pmatrix} e^{i\theta} & & & \\ & e^{-i\theta} & & \\ & & e^{i\theta} & \\ & & & e^{-i\theta} \end{pmatrix}\right] = e^{ni\theta}$ とすれば、M_0 の character は $[\pm] \otimes \chi_n$ と書け、A_0 の quasi-character は、$\nu = (\nu_1, \nu_2)$ として、

$e^\nu(A) = a_1^{\nu_1} a_2^{\nu_2}$ と書ける。また、M_1 の (Limit of) discrete series representaion は $\chi_n \otimes D_k^\pm$, A_1 の quasi-character は $e^\nu(A) = a^\nu$ と書ける。このとき、誘導表現 $\mathrm{Ind}_{P_0}^G(([\pm] \otimes \chi_n) \otimes e^\nu \otimes 1)$, $\mathrm{Ind}_{P_1}^G((\chi_n \otimes D_k^\pm) \otimes e^\nu \otimes 1)$ の Langlands quotient が存在すれば、それを、それぞれ $J(P_0;\, \pm, n;\, \nu_1, \nu_2)$, $J(P_1;\, n, D_k^\pm;\, \nu)$ と書くことにする。

表現 $\mathrm{Ind}_{P_0}^G(([\pm] \otimes \chi_n) \otimes e^\nu \otimes 1)$, $\mathrm{Ind}_{P_1}^G((\chi_n \otimes D_k^\pm) \otimes e^\nu \otimes 1)$, discrete series representaion D_λ 及び、Limit of discrete series (λ が singular の場合に相当する tempered representaion) が $SU(2,2)$ の standard representaion である。

§3. Multiplicity of Discrete Series Representation

$C_c^\infty(G,K)$ を両側 K-finite な G 上 smooth で compact support な関数の集合とする。$\Gamma \subset G$ を cocompact な discrete subgroup とする。このとき、$\varphi \in C_c^\infty(G,K)$ の $L^2(\Gamma \backslash G)$ への作用は、 trace をもち、次の式が成り立つ。

$$(3.1) \qquad \sum_{\pi\text{: irreducible unitary}} m_\pi \operatorname{tr} \pi(\varphi) = \sum_{\{\gamma\}_\Gamma} \mathrm{Vol}(\Gamma_\gamma \backslash G_\gamma) \int_{G_\gamma \backslash G} \varphi(g^{-1}\gamma g)\, dg$$

ただし、右辺は、Γ の conjugacy class について和をとっている。Discrete series representaion D_λ に対し、左辺を m_{D_λ} としたければ、次のような関数があれば良い。

Problem 3.1.
関数 $\varphi \in C_c^\infty(G,K)$ で次の条件を満たすものは存在するか？

$$\begin{cases} \operatorname{tr} D_\lambda(\varphi) = 1 \\ \operatorname{tr} \pi(\varphi) = 0, \quad \pi \not\cong D_\lambda,\ \pi\text{: } \textit{irreducible unitary} \end{cases}$$

残念ながら、一般的には、このような関数は存在しない。代りに、次のような関数を考える。

Definition 3.2.
関数 $\varphi \in C_c^\infty(G,K)$ が次の条件を満たすとき、D_λ の pseudo-coefficient であるという。

$$\begin{cases} \operatorname{tr} D_\lambda(\varphi) = 1 \\ \operatorname{tr} \pi(\varphi) = 0, \quad \pi \not\cong D_\lambda \text{ : standard representaion} \end{cases}$$

Pseudo-coefficient については、次の結果が基本的である。

Theorem 3.3. *(Clozel-Delorme [C-D2])*
$\mathbb{G}$ を $\mathbb{R}$ 上定義された *connected reductive algebraic group* とし、$G = \mathbb{G}(\mathbb{R})$ が *discrete series* をもつとする。このとき、G の任意の *discrete series representaion* D_λ にたいし、*pseudo-coefficient* φ_λ が存在する。

Pseudo-coefficient φ_λ は D_λ 以外の standard representaion に対しては、$\operatorname{tr} \pi(\varphi) = 0$ だが、我々は、既約表現 π に対する $\operatorname{tr} \pi(\varphi_\lambda)$ の値を知りたい。それには、standard representaion の composition factor がわかれば良い。

Theorem 3.4. *(Vogan [V1])*
G が *infinitesimal character* χ_μ の有限次元表現を持つならば、*infinitesimal character* χ_μ の場合の *Kazhdan-Lusztig conjecture* は正しい。

この theorem により、standard representaion の composition factor を計算することができる。また、$SU(2,2)$ の unitary representaion が、Knapp-Speh ([K-S]) により、決定されている。以上により、跡公式の spectral side が計算できる。跡公式の geometric side については、Harish-Chandra による結果 ([H-C1]) を使って計算することができる。まず、$\mu=(\frac{3}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-\frac{3}{2})$ とし、infinitesimal character χ_μ の場合の結果を述べる。Infinitesimal character χ_μ の discrete series representaion はそれぞれの系列にひとつずつで、それを、D_{I}, $\cdots$,D_{VI} とする。また、それ以外の infinitesimal character χ_μ の irreducible representaion は、

$$\begin{aligned}
F_1^\pm &= J(P_1;\,4,\,D_2^\pm;\,1)\\
F_2^\pm &= J(P_1;\,2,\,D_3^\pm;\,2)\\
F_3^\pm &= J(P_1;\,0,\,D_2^\pm;\,3)\\
F_4^\pm &= J(P_1;\,-4,\,D_2^\pm;\,1)\\
F_5^\pm &= J(P_1;\,-2,\,D_3^\pm;\,2)\\
F_6^\pm &= J(P_1;\,0,\,D_4^\pm;\,1)\\
P_1^\pm &= J(P_0;\,\pm,0;\,3,\,1)\\
P_2^\pm &= J(P_0;\,\pm,-4;\,1,\,1)\\
P_3^\pm &= J(P_0;\,\pm,-2;\,2,\,2)
\end{aligned}$$

であり、 infinitesimal character χ_μ の irreducible representaion は 24 存在する。($J(\cdots)$ とかくと、長くなるので、以下 F_1^+ などの記号を使う。) この内、unitarizable でないものは、$F_3^\pm$, P_1^-, P_2^-, $P_3^\pm$ である。また、trivial representaion は P_1^+ である。

Δ^+ を simple root が $\{(1,-1,0,0),\,(0,1,-1,0),\,(0,0,1,-1)\}$ である positive root system とし、これに対応する Weyl denominator を $D(t)=\xi_\rho(t)\prod_{\alpha\in\Delta^+}(1-\xi_\alpha(t)^{-1})$ とする。また、$\mathfrak{g}$ 上の real symmetric bilinear form B を $B(X,Y)=\mathrm{Re}[\mathrm{tr}\,XY]$ とし、[H-C1] pp.114-115 に従い、G の measure を決める。

Theorem 3.5.

$$\sum m_\pi\,\mathrm{tr}\,\pi(\varphi_\lambda)=\begin{cases}
m_{D_{\mathrm{I}}}-m_{F_6^-}+m_{F_2^-}+m_{F_5^-}+m_{P_1^+}\\
m_{D_{\mathrm{II}}}-m_{F_1^-}-m_{F_4^-}-m_{F_6^-}+m_{F_2^-}+m_{F_5^-}+m_{P_2^+}+m_{P_1^+}\\
m_{D_{\mathrm{III}}}-m_{F_1^+}-m_{F_4^-}+m_{F_2^+}+m_{F_5^-}+m_{P_2^+}+m_{P_1^+}\\
m_{D_{\mathrm{IV}}}-m_{F_1^-}-m_{F_4^+}+m_{F_2^-}+m_{F_5^+}+m_{P_2^+}+m_{P_1^+}\\
m_{D_{\mathrm{V}}}-m_{F_1^+}-m_{F_4^+}-m_{F_6^+}+m_{F_2^+}+m_{F_5^+}+m_{P_2^+}+m_{P_1^+}\\
m_{D_{\mathrm{VI}}}-m_{F_6^+}+m_{F_2^+}+m_{F_5^+}+m_{P_1^+}
\end{cases}$$

また、$\lambda = (n_1, n_2, n_3, n_4)$ とし、

$$\begin{aligned} \lambda^1 &= w_1\lambda &&= (n_2, n_1, n_3, n_4) \\ \lambda^2 &= w_2\lambda &&= (n_1, n_2, n_4, n_3) \\ \lambda^{12} &= w_1 w_2 \lambda &&= (n_2, n_1, n_4, n_3) \end{aligned}$$

とおく。

$$\epsilon = \begin{cases} 1 & \text{if } D_{\mathrm{I}},\ D_{\mathrm{III}},\ D_{\mathrm{IV}},\ D_{\mathrm{VI}} \\ -1 & \text{if } D_{\mathrm{II}},\ D_{\mathrm{V}} \end{cases}$$

$$\tau[\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4] = \begin{pmatrix} e^{i\theta_1} & & & \\ & e^{i\theta_2} & & \\ & & e^{i\theta_3} & \\ & & & e^{i\theta_4} \end{pmatrix}$$

Semisimple で elliptic な G の conjugacy class の代表元は

$$\begin{aligned} &\tau[\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4] \\ &\tau[\theta, \theta, \theta_3, \theta_4] \\ &\tau[\theta_1, \theta, \theta, \theta_4] \\ &\tau[\theta_1, \theta_2, \theta, \theta] \\ &\tau[\theta, \theta, \theta, -3\theta] \quad e^{i\theta} \neq 1, i, -1, -i \\ &\tau[-3\theta, \theta, \theta, \theta] \quad e^{i\theta} \neq 1, i, -1, -i \\ &\tau[\theta, \theta, -\theta, -\theta] \quad e^{i\theta} \neq 1, -1 \\ &\tau[\theta, \theta, -\theta + \pi, -\theta + \pi] \quad e^{i\theta} \neq i, -i \\ &\tau[\theta, -\theta, -\theta, \theta] \quad e^{i\theta} \neq 1, -1 \\ &\tau[\theta, -\theta + \pi, -\theta + \pi, \theta] \quad e^{i\theta} \neq i, -i \\ &I_4,\ iI_4,\ -I_4,\ -iI_4 \end{aligned}$$

となる。ただし、$e^{i\theta} \neq e^{i\theta_k}$, $e^{i\theta_j} \neq e^{i\theta_k}$ $(j \neq k)$ である。
また、それぞれの τ にたいし、

$$\begin{aligned} \tilde{D}_\tau &= \frac{D}{\prod_{\alpha\in\Delta^+,\,\alpha(\tau)=1}(1-\xi_\alpha^{-1})} \\ &= \xi_\rho \prod_{\alpha\in\Delta^+,\alpha(\tau)\neq 1} (1-\xi_\alpha^{-1}) \end{aligned}$$

と定義する。

Theorem 3.6.

$$\sum_{\{\gamma\}_\Gamma} \mathrm{Vol}(\Gamma_\gamma\backslash G_\gamma)\int_{G_\gamma\backslash G}\varphi_\lambda(g^{-1}\gamma g)\,dg$$

$$= \sum_{\{\gamma\}_\Gamma\sim\tau[\theta_1,\theta_2,\theta_3,\theta_4]} \mathrm{Vol}(\Gamma_\gamma\backslash G_\gamma)\frac{\epsilon}{\tilde{D}_\tau(\tau)}[\xi_{-\lambda}(\tau)-\xi_{-\lambda^1}(\tau)-\xi_{-\lambda^2}(\tau)+\xi_{-\lambda^{12}}(\tau)]$$

$$+ \sum_{\{\gamma\}_\Gamma\sim\tau[\theta,\theta,\theta_3,\theta_4]} \mathrm{Vol}(\Gamma_\gamma\backslash G_\gamma)\frac{-1}{2}\frac{\epsilon}{\tilde{D}_\tau(\tau)}(n_1-n_2)[\xi_{-\lambda}(\tau)+\xi_{-\lambda^1}(\tau)-\xi_{-\lambda^2}(\tau)-\xi_{-\lambda^{12}}(\tau)]$$

$$+ \sum_{\{\gamma\}_\Gamma\sim\tau[\theta_1,\theta,\theta,\theta_4]} \mathrm{Vol}(\Gamma_\gamma\backslash G_\gamma)\frac{-1}{2\sqrt{2}}\frac{\epsilon}{\tilde{D}_\tau(\tau)}$$
$$\times[(n_3-n_2)\xi_{-\lambda}(\tau)+(n_1-n_3)\xi_{-\lambda^1}(\tau)+(n_2-n_4)\xi_{-\lambda^2}(\tau)+(n_4-n_1)\xi_{-\lambda^{12}}(\tau)]$$

$$+ \sum_{\{\gamma\}_\Gamma\sim\tau[\theta_1,\theta_2,\theta,\theta]} \mathrm{Vol}(\Gamma_\gamma\backslash G_\gamma)\frac{-1}{2}\frac{\epsilon}{\tilde{D}_\tau(\tau)}(n_3-n_4)[\xi_{-\lambda}(\tau)-\xi_{-\lambda^1}(\tau)+\xi_{-\lambda^2}(\tau)-\xi_{-\lambda^{12}}(\tau)]$$

$$+ \sum_{\{\gamma\}_\Gamma\sim\tau[\theta,\theta,\theta,-3\theta]} \mathrm{Vol}(\Gamma_\gamma\backslash G_\gamma)\frac{1}{16\sqrt{2}\pi^2}\frac{\epsilon}{\tilde{D}_\tau(\tau)}$$
$$\times[-2(n_1-n_2)(n_2-n_3)(n_1-n_3)\xi_{-\lambda}(\tau)+2(n_1-n_2)(n_1-n_4)(n_2-n_4)\xi_{-\lambda^2}(\tau)]$$

$$+ \sum_{\{\gamma\}_\Gamma\sim\tau[-3\theta,\theta,\theta,\theta]} \mathrm{Vol}(\Gamma_\gamma\backslash G_\gamma)\frac{1}{16\sqrt{2}\pi^2}\frac{\epsilon}{\tilde{D}_\tau(\tau)}$$
$$\times[-2(n_2-n_3)(n_3-n_4)(n_2-n_4)\xi_{-\lambda}(\tau)+2(n_1-n_3)(n_3-n_4)(n_1-n_4)\xi_{-\lambda^2}(\tau)]$$

$$+ \sum_{\{\gamma\}_\Gamma\sim\tau[\theta,\theta,-\theta,-\theta]} \mathrm{Vol}(\Gamma_\gamma\backslash G_\gamma)\frac{1}{4}\frac{\epsilon}{\tilde{D}_\tau(\tau)}[4(n_1-n_2)(n_3-n_4)\xi_{-\lambda}(\tau)]$$

$$+ \sum_{\{\gamma\}_\Gamma\sim\tau[\theta,\theta,-\theta+\pi,-\theta+\pi]} \mathrm{Vol}(\Gamma_\gamma\backslash G_\gamma)\frac{1}{4}\frac{\epsilon}{\tilde{D}_\tau(\tau)}[4(n_1-n_2)(n_3-n_4)\xi_{-\lambda}(\tau)]$$

$$+ \sum_{\{\gamma\}_\Gamma\sim\tau[\theta,-\theta,-\theta,\theta]} \mathrm{Vol}(\Gamma_\gamma\backslash G_\gamma)\frac{1}{8\pi^2}\frac{\epsilon}{\tilde{D}_\tau(\tau)}$$
$$\times[(n_1-n_4)(n_2-n_3)(\xi_{-\lambda}(\tau)+\xi_{-\lambda^{12}}(\tau))-(n_1-n_3)(n_2-n_4)(\xi_{-\lambda^1}(\tau)+\xi_{-\lambda^2}(\tau))]$$

$$+ \sum_{\{\gamma\}_\Gamma\sim\tau[\theta,-\theta+\pi,-\theta+\pi,\theta]} \mathrm{Vol}(\Gamma_\gamma\backslash G_\gamma)\frac{1}{8\pi^2}\frac{\epsilon}{\tilde{D}_\tau(\tau)}$$
$$\times[(n_1-n_4)(n_2-n_3)(\xi_{-\lambda}(\tau)+\xi_{-\lambda^{12}}(\tau))-(n_1-n_3)(n_2-n_4)(\xi_{-\lambda^1}(\tau)+\xi_{-\lambda^2}(\tau))]$$

$$+ \sum_{\gamma=\pm I_4,\pm iI_4} \mathrm{Vol}(\Gamma\backslash G)\frac{1}{128\pi^4}\epsilon$$
$$\times[(n_1-n_2)(n_1-n_3)(n_1-n_4)(n_2-n_3)(n_2-n_4)(n_3-n_4)\xi_{-\lambda}(\gamma)]$$

一般の infinitesimal character χ_μ, $\mu=(\mu_1,\mu_2,\mu_3,\mu_4)$ ($\sum\mu_k=0$, $\mu_j-\mu_k\in\mathbb{Z}$, $\mu_1>\mu_2>\mu_3>\mu_4$) については theorem 3.5 の式の中で、次の項があらわれる。

$$\begin{cases} F_1^{\pm} & \text{if } \mu_1-\mu_2=1 \\ F_6^{\pm} & \text{if } \mu_2-\mu_3=1 \\ F_4^{\pm} & \text{if } \mu_3-\mu_4=1 \\ F_2^{\pm};\ F_1^{\pm},\ F_6^{\pm} & \text{if } \mu_1-\mu_2=\mu_2-\mu_3=1 \\ F_5^{\pm};\ F_4^{\pm},\ F_6^{\pm} & \text{if } \mu_2-\mu_3=\mu_3-\mu_4=1 \\ P_2^{+};\ F_1^{\pm},\ F_4^{\pm} & \text{if } \mu_1-\mu_2=\mu_3-\mu_4=1 \\ \text{all} & \text{if } \mu=(\frac{3}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-\frac{3}{2}) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} F_1^{\pm} &=J(P_1;\ 2\mu_1+2\mu_2,\ D^{\pm}_{\mu_3-\mu_4+1};\ 1) \\ F_6^{\pm} &=J(P_1;\ 2\mu_2+2\mu_3,\ D^{\pm}_{\mu_1-\mu_4+1};\ 1) \\ F_4^{\pm} &=J(P_1;\ 2\mu_3+2\mu_4,\ D^{\pm}_{\mu_1-\mu_2+1};\ 1) \\ F_2^{\pm} &=J(P_1;\ 2\mu_1+2\mu_3,\ D^{\pm}_{\mu_2-\mu_4+1};\ 2) \\ F_5^{\pm} &=J(P_1;\ 2\mu_2+2\mu_4,\ D^{\pm}_{\mu_1-\mu_3+1};\ 2) \\ P_2^{+} &=J(P_0;\ (-1)^{2\mu_3+2\mu_4},\ 2\mu_3+2\mu_4;\ 1,\ 1) \end{aligned}$$

いま、$\mu=\rho+\delta$ とする。また、D_λ を infinitesimal character χ_μ の discrete series representaion とし、Δ^+ の positive compact root が $\Delta^+_\lambda=\{\alpha\in\Delta|\ \mathrm{Re}\langle\lambda,\check{\alpha}\rangle>0\}$ に含まれるように、λ をとる。D_λ に近い wall を次のように定義する。

$$\mathrm{Wall}(D_\lambda)=\left\{\alpha\in\Delta^+_\lambda\ \middle|\ \begin{array}{l}\text{i.) } \alpha\text{: non-compact} \\ \text{ii.) } \mathrm{Re}\langle\ \lambda-\rho_\lambda,\check{\alpha}\rangle\le 0\end{array}\right\}$$

また、D_λ の minimal K-type を Λ_λ とし、

$$T_\lambda=\left\{\Lambda=\Lambda_\lambda-\sum_{\alpha\in\mathrm{Wall}(D_\lambda)}\epsilon_\alpha\alpha\ \middle|\ \begin{array}{l}\text{i.) } \epsilon_\alpha=0,1 \\ \text{ii.) } \Lambda:\ \text{dominant for positive compact roots.}\end{array}\right\}$$

と定義する。

いま、π を infinitesimal character χ_μ の irreducible unitary representaion とし、F_δ を highest weight δ の 有限次元表現とすると、

$$H^{p,q}(\mathfrak{g},K;\ \pi\otimes\check{F}_\delta)\cong\mathrm{Hom}_K(\wedge^{p,q}\mathfrak{p}\otimes F_\delta,\ \pi)$$

である。

Theorem 3.7. *([V-Z])*
τ を $\wedge^{p,q}\mathfrak{p}\otimes F_\delta$ の *K-type* とする。このとき、*infinitesimal character* χ_μ の *irreducible unitary representaion* π_τ で、次の条件をみたすものは、存在しても、同値を除いて 1 つである。

(1) $H^{p,q}(\mathfrak{g},K;\pi\otimes\check{F}_\delta)\neq 0$
(2) τ は $\wedge^{p,q}\mathfrak{p}\otimes F_\delta$ と π の共通の *K-type.*

T_λ を K-type の集合とみて、

$$T_\lambda^{coh} = \{\tau \in T_\lambda | \text{ theorem 3.7 の条件を満たす } \pi_\tau \text{ が存在する。}\}$$

とし、$\tau \in T_\lambda^{coh}$ について、$d_\tau = \prod_{\alpha \in \mathrm{Wall}(D_\lambda)} (-1)^{\epsilon_\alpha}$ とおく。
最終的に次の定理が得られる。

Theorem 3.8.

$$\sum_{\tau \in T_\lambda^{coh}} d_\tau m_{\pi_\tau} = \textit{orbital integral of theorem 3.6}$$

この定理は一般の discrete series representaion をもつ semisimple algebraic group についても成立すると予想される。

List of irreducible unitary representations with infinitesimal character χ_ρ.

π	$H^{p,q}(\mathfrak{g}, K; \pi) \neq 0$	K-type	Length
D_{I}	$H^{4,0}$	$(2,2,-2,-2)$	0
D_{II}	$H^{3,1}$	$(2,0,0,-2)$	0
D_{III}	$H^{2,2}$	$(2,-2,0,0)$	0
D_{IV}	$H^{2,2}$	$(0,0,2,-2)$	0
D_{V}	$H^{1,3}$	$(0,-2,2,0)$	0
D_{VI}	$H^{0,4}$	$(-2,-2,2,2)$	0
F_1^+	$H^{1,2}, H^{2,3}$	$(1,-2,1,0)$	1
F_1^-	$H^{2,1}, H^{3,2}$	$(1,0,1,-2)$	1
F_4^+	$H^{1,2}, H^{2,3}$	$(0,-1,2,-1)$	1
F_4^-	$H^{2,1}, H^{3,2}$	$(2,-1,0,-1)$	1
F_6^+	$H^{0,3}, H^{1,4}$	$(-1,-2,2,1)$	1
F_6^-	$H^{3,0}, H^{4,1}$	$(2,1,-1,-2)$	1
F_2^+	$H^{0,2}, H^{1,3}, H^{2,4}$	$(0,-2,1,1)$	2
F_2^-	$H^{2,0}, H^{3,1}, H^{4,2}$	$(1,1,0,-2)$	2
F_5^+	$H^{0,2}, H^{1,3}, H^{2,4}$	$(-1,-1,2,0)$	2
F_5^-	$H^{2,0}, H^{3,1}, H^{4,2}$	$(2,0,-1,-1)$	2
P_2^+	$H^{1,1}, H^{2,2}(\dim H^{2,2} = 2), H^{3,3}$	$(1,-1,1,-1)$	2
P_1^+	$H^{0,0}, H^{1,1}, H^{2,2}(\dim H^{2,2} = 2), H^{3,3}, H^{4,4}$	$(0,0,0,0)$	4

The Kazhdan-Lusztig polynomials (infinitesimal character χ_ρ).

$$
\begin{aligned}
C_{F_1^+} &= F_1^+ + D_{\mathrm{III}} + D_{\mathrm{V}} \\
C_{F_1^-} &= F_1^- + D_{\mathrm{II}} + D_{\mathrm{IV}} \\
C_{F_4^+} &= F_4^+ + D_{\mathrm{IV}} + D_{\mathrm{V}} \\
C_{F_4^-} &= F_4^- + D_{\mathrm{II}} + D_{\mathrm{III}} \\
C_{F_6^+} &= F_6^+ + D_{\mathrm{V}} + D_{\mathrm{VI}} \\
C_{F_6^-} &= F_6^- + D_{\mathrm{I}} + D_{\mathrm{II}} \\
C_{F_2^+} &= F_2^+ + F_1^+ + F_6^+ + D_{\mathrm{III}} + D_{\mathrm{V}} + D_{\mathrm{VI}} \\
C_{F_2^-} &= F_2^- + F_1^- + F_6^- + D_{\mathrm{I}} + D_{\mathrm{II}} + D_{\mathrm{IV}} \\
C_{F_5^+} &= F_5^+ + F_4^+ + F_6^+ + D_{\mathrm{IV}} + D_{\mathrm{V}} + D_{\mathrm{VI}} \\
C_{F_5^-} &= F_5^- + F_4^- + F_6^- + D_{\mathrm{I}} + D_{\mathrm{II}} + D_{\mathrm{III}} \\
C_{P_2^+} &= P_2^+ + F_1^+ + F_1^- + F_4^+ + F_4^- + D_{\mathrm{II}} + D_{\mathrm{III}} + D_{\mathrm{IV}} + D_{\mathrm{V}} \\
C_{F_3^+} &= F_3^+ + P_2^+ + F_5^+ + F_2^+ + F_1^+ + F_1^- + F_4^+ + F_4^- + F_6^+ \\
&\quad + D_{\mathrm{II}} + D_{\mathrm{III}} + D_{\mathrm{IV}} + D_{\mathrm{V}} + (q+1)D_{\mathrm{VI}} \\
C_{F_3^-} &= F_3^- + P_2^+ + F_5^- + F_2^- + F_1^+ + F_1^- + F_4^+ + F_4^- + F_6^- \\
&\quad + (q+1)D_{\mathrm{I}} + D_{\mathrm{II}} + D_{\mathrm{III}} + D_{\mathrm{IV}} + D_{\mathrm{V}} \\
C_{P_3^-} &= P_3^- + F_2^+ + F_2^- + F_5^+ + F_5^- + P_2^+ + F_1^+ + F_1^- + F_4^+ + F_4^- + F_6^+ + F_6^- \\
&\quad + D_{\mathrm{I}} + D_{\mathrm{II}} + (q+1)D_{\mathrm{III}} + (q+1)D_{\mathrm{IV}} + D_{\mathrm{V}} + D_{\mathrm{VI}} \\
C_{P_1^+} &= P_1^+ + P_3^- + F_3^+ + F_3^- + P_2^+ + F_2^+ + F_2^- + F_5^+ + F_5^- \\
&\quad + F_1^+ + F_1^- + F_4^+ + F_4^- + F_6^+ + F_6^- + D_{\mathrm{I}} + D_{\mathrm{II}} + D_{\mathrm{III}} + D_{\mathrm{IV}} + D_{\mathrm{V}} + D_{\mathrm{VI}} \\
C_{P_2^-} &= P_2^- \\
C_{P_3^+} &= P_3^+ + P_2^- \\
C_{P_1^-} &= P_1^- + P_3^+
\end{aligned}
$$

平賀 郁

REFERENCES

[A] J. Arthur, *A Trace Formula for Reductive Groups I*, Duke Math. J. **45** (1978), 911–952.

[B-W] A. Borel and N. Wallach, *Continuous Cohomology, Discrete Subgroups, and Representations of Reductive Groups.*, Princeton University Press, 1980.

[C-D1] L. Clozel and P. Delorme, *Le Théorème de Paley–Wiener invariant pour les groupes de Lie réductifs*, Invent. math. **77** (1984), 427–453.

[C-D2] L. Clozel and P. Delorme, *Le Théorème de Paley–Wiener invariant pour les groupes de Lie réductifs II*, Ann. scient. Éc. Norm. Sup., 4[e] série, t.23 (1990), 193–228.

[D-L] M. Duflo et J.-P. Labesse, *Sur la formule des traces de Selberg*, Ann. scient. Éc. Norm. Sup., 4[e] série, t.4 (1971), 193–284.

[G-G-P] I. M. Gel'fand, M. I. Graev and I. I. Pyatetskii-Shapiro, *Representation theory and Automorphic Functions*, ACADEMIC PRESS, 1968.

[H-C1] Harish-Chandra, *Harmonic Analysis on Real Reductive Groups I*, Jour. of Functional Analysis **19** (1975), 104–204.

[H-C2] Harish-Chandra, *Discrete series for semisimple Lie groups II*, Acta Math. **116** (1966), 1–111.

[K] A. W. Knapp, *Representation Theory of Semisimple Groups*, Princeton University Press, 1986.

[K-S] A. W. Knapp and B. Speh, *Irreducible Unitary Representations of* $SU(2,2)$, Journal of Functional Analysis **45** (1982), 41–73.

[L] R. P. Langlands, *Dimension of spaces of automorphic forms*, Proc. Sym. in Pure Math. **9** (1966), 253–257.

[V1] D. A. Vogan, Jr., *Irreducible Characters of Semisimple Lie Groups III*, Invent. math. **71** (1983), 381–417.

[V2] D. A. Vogan, Jr., *The Kazhdan-Lusztig conjecture for real reductive groups*, Representation Theory of Reductive Groups, vol. 40, Birkhäuser, 1983.

[V-Z] D. A. Vogan Jr. and G. J. Zuckerman, *Unitary Representations with non-zero cohomology*, Comp. Math. **53** (1984), 51–90.