数理解析研究所講究録
909巻 1995年 147-153

保型L関数とWhittaker関数
（$Sp(4)$の場合）

三重大教育　古関春隆（H. Koseki）

M. E. Novodvorsky による $GSp(4)$ 上の zeta integral に関する結果の概略を述べます。もとの論文は

Novodvorsky, Automorphic L-functions for the symplectic group GSp_4, in AMS Proc. Symp. Pure Math. 33, 1979

ですが，これは関数体上の $GSp(4)$ を扱っています。しかし D. Bump の survey

Bump, The Rankin-Selberg method : a survey, in "Number Theory, Trace Formulas and …", 1989

では代数体上の場合の Novodvorsky integral についての同様の結果を述べているので，ここでも代数体上の場合を考える事にして，以下

F : 代数体，$\mathcal{O}$: Fの整数環，$\mathbb{A}$: Fの adele 環

とします。

1. Langlands L関数

GをF上のGSp_4とする：

$$G(F) = \{ g \in GL_4(F) \,;\, {}^t g J g = s(g) J,\ s(g) \in F^\times \},$$

$$J = \begin{pmatrix} & & & 1 \\ & & 1 & \\ & -1 & & \\ -1 & & & \end{pmatrix}。$$

$G(\mathbb{A})$のstandardなmaximal compact subgroupをKとする：

$$K = \prod_v K_v \,;$$

v : finite $\Rightarrow K_v = G(\mathcal{O}_v)$,

v : real $\Rightarrow K_v = U(2)$,

v : complex $\Rightarrow K_v$は$Sp_4(\mathbb{C})$のcompact real form。

このKに関してclass 1であるような$G(\mathbb{A})$のcuspidalな保型表現$\pi = \bigotimes_v \pi_v$を任意に固定し，以下，そのL関数を問題にする。（後で，πがgenericという仮定を加える。）

Gの連結L群${}^LG^\circ$は$GSp_4(\mathbb{C})$になる。そのmaximal torus ${}^LT^\circ$を

$${}^LT^\circ = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_1 & & & \\ & \alpha_2 & & \\ & & \alpha_3 & \\ & & & \alpha_4 \end{pmatrix} ;\ \alpha_k \in \mathbb{C}^\times,\ \alpha_1\alpha_4 = \alpha_2\alpha_3 \right\}$$

と定め，${}^LG^\circ$の${}^LT^\circ$に関するWeyl群をWとおく。vがFの有限素点のとき，Hecke環$\mathcal{H}(G(F_v), K_v)$の佐武同型を通じて次の1:1対応が得られる：

$$\{ G(F_p) \text{の class 1 表現} \} \longleftrightarrow {}^L T^\circ \bmod W 。$$

この対応によって $\pi = \bigotimes_v \pi_v$ の成分 π_v が $\mathrm{diag}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ に対応しているとする。${}^L G^\circ$ の有限次元表現 r に対し

$$L_v(s, \pi_v, r) = \det(1 - r(\mathrm{diag}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)) q^{-s})^{-1}$$

(q は F_v の剰余体の元の個数)とおいて有限素点 v に於る Euler 因子を定義する。${}^L G^\circ$ は 4 次の Spin 表現 spin をもつが，これに対しては

$$L_v(s, \pi_v, \mathrm{spin}) = \prod_{k=1}^{4} (1 - \alpha_k q^{-s})^{-1}$$

である。

v が無限素点のときも $L_v(s, \pi_v, r)$ をしかるべく定義して，Langlands L 関数 $L(s, \pi, r)$ を次のように定める：

$$L(s, \pi, r) = \prod_v L_v(s, \pi_v, r) 。$$

2. Whittaker 関数

G の minimal parabolic subgroup の unipotent radical

$$N = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x_2 & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & -x_2 \\ & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & x_3 & x_4 \\ & 1 & x_1 & x_3 \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

をとって N に関する Whittaker model を考える。$\mathbb{A}/F$ の指標 $e = \prod_v e_v$ を，すべての有限素点で不分岐かつ non-trivial で，無限素点でもしかるべき指標になるようにとる。

素点 v における Whittaker 関数の空間 $\mathcal{W}_v$ を

$$\mathcal{W}_v = \{ f : G(F_v) \to \mathbb{C} \text{ smooth} ;$$
$$f(ng) = e_v(x_1 + x_2) f(g) \text{ for}$$
$$n = \begin{pmatrix} 1 & x_2 & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & -x_2 \\ & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & x_3 & x_4 \\ & 1 & x_1 & x_3 \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \in N(F_v),\ g \in G(F_v) \}$$

と定める。(v が無限素点ならば増大度条件を加える必要がある。)このとき Shalika et al の重複度 1 定理より

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Hom}(\pi_v, \mathcal{W}_v) \leq 1 .$$

以下すべての v で上の次元 $= 1$ であると仮定し，$W_v \in \mathcal{W}_v$ を ・π_v を生成し，・class 1 で，・$W_v(1) = 1$ となるようにとっておく。

π を生成する $G(\mathbb{A})$ 上の保型形式で K-fixed なもの ϕ をとり，付随する Whittaker 関数 $W : G(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$ を

$$W(g) = \int_{(\mathbb{A}/F)^4} \phi\left(\begin{pmatrix} 1 & x_2 & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & -x_2 \\ & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & x_3 & x_4 \\ & 1 & x_1 & x_3 \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \right)$$
$$\times\, e(-x_1 - x_2)\, dx_1\, dx_2\, dx_3\, dx_4$$

と定める。ただしこれが消えないことも仮定する。すると重複度 1 定理より

$$W(\prod_v g_v) = c \times \prod_v W_v(g_v), \quad c \neq 0 .$$

3. $G \times GL(1)$ 上の convolution

上の ϕ だけでなく Hecke 指標 $\psi = \prod_v \psi_v : \mathbb{A}^\times/F^\times \to \mathbb{C}^\times$ も取って，global zeta integral $Z(s;\phi,\psi)$ をつくる：

$$Z(s;\phi,\psi) = \int_{\mathbb{A}^\times/F^\times}\int_{(\mathbb{A}/F)^3} \phi\left(\begin{pmatrix} 1 & x_2 & & x_4 \\ & 1 & & \\ & z & 1 & -x_2 \\ & & & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y & & & \\ & y & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}\right)$$

$$\times\, e(-x_2)\,\psi(y)\,\|y\|^{s-\frac{1}{2}}\, dz\, dx_2\, dx_4\, d^\times y。$$

この $Z(s;\phi,\psi)$ は s の entire function になり，関数等式

$$Z(s;\phi,\psi) = Z(1-s;\hat{\phi},\hat{\psi})$$

をみたす。ただし $\hat{\phi}$ は π の反傾表現の "ϕ" で，$\hat{\psi}(y) = \psi(y^{-1})$。

さらに次が成立する：

<u>Basic Identity</u>：$\mathrm{Re}(s) \gg 0$ のとき，0 でない定数倍を除いて

$$Z(s;\phi,\psi) = \prod_v \int_{F_v^\times}\int_{F_v} W_v\left(\begin{pmatrix} y & & & \\ & y & & \\ & x & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}\right)\psi_v(y)$$

$$\times\, \|y\|^{s-\frac{3}{2}}\, dx\, d^\times y。 \quad //$$

これは $\mathbb{A}/F$ 上の Fourier 展開を用いて "初等的に" 証明できる。

そこで各素点 v において local zeta integral

$$\int_{F_v^\times}\int_{F_v} W_v\left(\begin{pmatrix} y & & & \\ & y & & \\ & x & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}\right)\psi_v(y)\,\|y\|^{s-\frac{3}{2}}\, dx\, d^\times y$$

を計算することが問題になる。v が有限素点のときは加藤-Casselman-Shalika による Whittaker 関数の explicit formula を用いて計算できて，local zeta integral は

$$L_v(s, \phi\times\psi, \mathrm{spin}\times 1) = \prod_{k=1}^{4}(1-\alpha_k\psi(p)q^{-s})^{-1}$$

に一致することが示される。

以上より

<u>定理1.</u> $L(s, \phi\times\psi, \mathrm{spin}\times 1) = \prod_v L_v(s, \phi\times\psi, \mathrm{spin}\times 1)$ は全s平面上entireな関数に解析接続され，$s\mapsto 1-s$ に関し関数等式をみたす。 //

ここで関数等式の具体形は，無限素点vにおける因子が計算できれば，決定できる。

4. $G\times GL(2)$ 上の convolution

F上の代数群

$$H=\{(h_1,h_2)\in GL(2)\times GL(2);\ \det h_1=\det h_2\}$$

のGへの埋め込みJを次のように取る：

$$J\left(\begin{pmatrix}a_1 & b_1\\ c_1 & d_1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}a_2 & b_2\\ c_2 & d_2\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}a_2 & & & b_2\\ & a_1 & b_1 & \\ & c_1 & d_1 & \\ c_2 & & & d_2\end{pmatrix}.$$

$G(\mathbb{A})$上のϕとともに$GL(2,\mathbb{A})$上の保型形式ψでK'-fixed vectorであるようなものをとる。ここでK'は$GL(2,\mathbb{A})$のstandard maximal compact subgroupとする。$B\subset GL(2)$を上三角群として，$GL(2,\mathbb{A})$上のEisenstein級数を次のように定義する：

$$E(g,s) = \xi_F(2s) \sum_{\gamma \in B(F)\backslash GL(2,F)} I_s(\gamma g),$$

$\xi_F(s)$ は F の Dedekind zeta に Γ因子を補ったもの，

$$I_s\left(\begin{pmatrix} y_1 & x \\ & y_2 \end{pmatrix} k\right) = \left\|\frac{y_1}{y_2}\right\|^s \quad (k \in K')。$$

これらを用いて global zeta integral を

$$Z(s;\phi,\psi) = \int_{Z(\mathbb{A})H(F)\backslash H(\mathbb{A})} \phi(J(h_1,h_2))E(h_2,s)\psi(h_1) \times d(h_1 \times h_2)$$

と定義すると，これについて解析接続と関数等式が示される。さらに

<u>Basic Identity</u>：$\mathrm{Re}(s) \gg 0$ のとき

$$Z(s;\phi,\psi) = \xi_F(2s) \prod_v \int_{F_v^\times}\int_{F_v^\times} W_v\left(\begin{pmatrix} y_1y_2 & & & \\ & y_1 & & \\ & & 1 & \\ & & & y_2^{-1} \end{pmatrix}\right) \times W'_v\left(\begin{pmatrix} y_1 & \\ & 1 \end{pmatrix}\right) \|y_1y_2^2\|^s \|y_1y_2\|^{-2} d^\times y_1\, d^\times y_2. //$$

ここで W_v は ϕ の，W'_v は ψ の Whittaker 関数である。

この local zeta integral を計算して，結局次を得る：

<u>定理 2.</u> $L(s, \phi\times\psi, \text{spin}\times\text{standard})$ は全 s 平面に解析接続されて関数等式をみたす。 //