数理解析研究所講究録
909 巻 1995 年 169-176



# ユニタリ群の保型L関数とテータ級数リフト

渡部 隆夫 (阪大 理) (Takao Watanabe)

このノートの主題は $U(n,n)\times \mathrm{R}_{E/F}GL(n)$ および $U(n,n+1)\times \mathrm{R}_{E/F}GL(n)$ の保型L-関数の積分表示と，テータ級数リフトによってこれらの積分表示がどのように関係付けられるかを説明することである．

## 1. 記号

最初に記号を幾つか定義する．$F$ を有限次代数体, $E/F$ を２次拡大として

$$G=G_n=\left\{g\in GL_{2n}(E):\ {}^tg\begin{pmatrix}0&1_n\\-1_n&0\end{pmatrix}\overline{g}=\begin{pmatrix}0&1_n\\-1_n&0\end{pmatrix}\right\},$$
$$G^*=G^*_n=\left\{g\in GL_{2n+1}(E):\ {}^tg\begin{pmatrix}0&&1_n\\&1&\\1_n&&0\end{pmatrix}\overline{g}=\begin{pmatrix}0&&1_n\\&1&\\1_n&&0\end{pmatrix}\right\}.$$

とする．$E^*$ の元 $i$ で $i+\overline{i}=0$ となるものを一つとり，これにより埋めこみ

$$\iota: G\hookrightarrow G^*:\ \begin{pmatrix}A&B\\C&D\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}A&0&iB\\0&1&0\\i^{-1}C&0&D\end{pmatrix}$$

を固定する．$P$ を $G$ の Siegel 型極大放物部分群とし $M\cong GL_n(E)$ をその Levi 部分群, $U_P$ をべき単根基とする．また $\Delta$ を $M$ の maximal unipotent subgroup とする．$\Delta$ は $GL_n(E)$ の対角成分が１の上半三角行列の成す群と同一視される．このとき $U=\Delta U_P$ は $G$ の maximal unipotent subgroup を与える．同様に $U^*$ を $G^*$ の maximal unipotent subgroup とし, $\Delta^*=\iota(\Delta)$ とおく．いま $\mu$: $F\backslash\mathbf{A}\to\mathbf{C}^1$ を自明ではない指標とし，これから $U(\mathbf{A})$ の指標 $\psi$ と $U^*(\mathbf{A})$ の指標 $\psi^*$ を

$$\psi(u)=\mu(\mathrm{tr}_{E/F}(u_{12}+u_{23}+\cdots+u_{n-1n})-u_{n2n}),\qquad u=(u_{ij})\in U(\mathbf{A})$$
$$\psi^*(u^*)=\mu(\mathrm{tr}_{E/F}(u^*_{12}+u^*_{23}+\cdots+u^*_{nn+1})),\qquad u^*=(u^*_{ij})\in U^*(\mathbf{A})$$

により定義する．

以下次のデータを固定する．指標 $\nu$: $E^\times\backslash\mathbf{A}_E^\times\to\mathbf{C}^1$ は，その $\mathbf{A}^\times$ への制限 $\nu|_{\mathbf{A}^\times}$ が拡大 $E/F$ に対応する quadratic character であるようなものとする．また $(\sigma,V_\sigma)$ は $G(\mathbf{A})$ の既約 generic cuspidal 表現, $(\sigma^*,V_{\sigma^*})$ は $G^*(\mathbf{A})$ の既約 generic cuspidal 表現とする．さらに $(\pi,V_\pi)$ は $M(\mathbf{A})\cong GL_n(\mathbf{A}_E)$ の既約 cuspidal 表現とする．

それぞれの cusp form $\varphi\in V_\sigma$, $\varphi^*\in V_{\sigma^*}$, $\Phi\in V_\pi$ に対し, Whittaker 関数を

$$W_\varphi(g)=\int_{U\backslash U(\mathbf{A})}\psi(u)^{-1}\varphi(ug)du,\quad W_{\varphi^*}(h)=\int_{U^*\backslash U^*(\mathbf{A})}\psi^*(u^*)^{-1}\varphi^*(u^*h)du^*$$
$$W_\Phi(m)=\int_{\Delta\backslash\Delta(\mathbf{A})}\psi(\delta)\Phi(\delta m)d\delta$$

で定義し，これから生成される Whittaker model をそれぞれ $W(\sigma,\psi)$, $W(\sigma^*,\psi^*)$, $W(\pi,\psi^{-1})$ とあらわす．

いま $V_F$ を $F$ の素点全体の集合とし，有限素点 $v\in V_F$ で局所表現 $\sigma_v$, $\pi_v$ がすべて spherical 表現でかつ $\mu_v$, $\nu_v$ が不分岐になるようなもの全体の集合を $V_F(\sigma,\pi,\mu,\nu)$ とおく．同様に $\sigma^*_v$, $\pi_v$ がともに spherical 表現でかつ $\mu_v$ が不分岐になるような有限素点全体の集合を $V_F(\sigma^*,\pi,\mu)$ とおく．$V_F$ におけるこれらの補集合を $S=V_F\backslash V_F(\sigma,\pi,\mu,\nu)$, $S^*=V_F\backslash V_F(\sigma^*,\pi,\mu)$ とする．

2. L-関数の定義

以下 $v \in V_F(\sigma,\pi,\mu,\nu)$ または $v \in V_F(\sigma^*,\pi,\mu)$ として, local factors $L_v(s,\sigma_v\times\pi_v)$, $L_v(s,\sigma_v^*\times\pi_v)$ を定義する. まず $G\times M$, $G^*\times M$ のL-群は

$$
\begin{aligned}
{}^L(G\times M) &= (GL_{2n}(\mathbf{C})\times GL_n(\mathbf{C})\times GL_n(\mathbf{C}))\times\Gamma_{E/F}\\
{}^L(G^*\times M) &= (GL_{2n+1}(\mathbf{C})\times GL_n(\mathbf{C})\times GL_n(\mathbf{C}))\times\Gamma_{E/F}
\end{aligned}
$$

である. ここで $\Gamma_{E/F}=\{id,\epsilon\}$ は $E/F$ の Galois 群とする. 一般に $GL_m(\mathbf{C})$ の standard 表現を $\rho_m$ と書くとき, $\rho_{2n}\otimes\rho_n\otimes 1$ は連結成分 ${}^L(G\times M)^o$ の表現で, この表現の ${}^L(G\times M)$ への誘導表現を $r$ と書く. 同様に ${}^L(G^*\times M)^o$ の表現 $\rho_{2n+1}\otimes\rho_n\otimes 1$ の ${}^L(G^*\times M)$ への誘導表現を $r^*$ と書く. さて, $v$ が $E$ で remain prime の場合, $\sigma_v$, $\sigma_v^*$, $\pi_v$ の Satake parameter を, それぞれ, $(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)\in(\mathbf{C}^*)^n$, $(\alpha_1^*,\cdots,\alpha_n^*)\in(\mathbf{C}^*)^n$, $(\beta_1,\cdots,\beta_n)\in(\mathbf{C}^*)^n$ とし, 対応するL-群の元を

$$
\gamma_v=\left(\begin{pmatrix}\alpha_1&&&&&\\&\ddots&&&&\\&&\alpha_n&&&\\&&&1&&\\&&&&\ddots&\\&&&&&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\beta_1&&\\&\ddots&\\&&\beta_n\end{pmatrix},1_n\right)\times\epsilon\in{}^L(G\times M)
$$

$$
\gamma_v^*=\left(\begin{pmatrix}\alpha_1^*&&&&&&\\&\ddots&&&&&\\&&\alpha_n^*&&&&\\&&&1&&&\\&&&&1&&\\&&&&&\ddots&\\&&&&&&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\beta_1&&\\&\ddots&\\&&\beta_n\end{pmatrix},1_n\right)\times\epsilon\in{}^L(G^*\times M)
$$

とする. このとき

$$
\begin{aligned}
L_v(s,\sigma_v\times\pi_v) &= \det(1_{4n^2}-r(\gamma_v)q_v^{-s})^{-1}\\
&= \frac{1}{\prod_{1\le i,j\le n}(1-\alpha_i\beta_j q_v^{-2s})(1-\alpha_i^{-1}\beta_j q_v^{-2s})}\\
L_v(s,\sigma_v^*\times\pi_v) &= \det(1_{2n(2n+1)}-r^*(\gamma_v^*)q_v^{-s})^{-1}\\
&= \frac{1}{\prod_{1\le i,j\le n}(1-\alpha_i^*\beta_j q_v^{-2s})(1-\alpha_i^{*-1}\beta_j q_v^{-2s})\prod_{1\le j\le n}(1-\beta_j q_v^{-s})}
\end{aligned}
$$

と定義する. 次に $v$ が $E$ で split するとき, $\sigma_v$, $\sigma_v^*$, $\pi_v$ の Satake parameter は, それぞれ, $(\alpha_1,\cdots,\alpha_{2n})\in(\mathbf{C}^*)^{2n}$, $(\alpha_1^*,\cdots,\alpha_{2n+1}^*)\in(\mathbf{C}^*)^{2n+1}$, $((\beta_1,\cdots,\beta_n),(\beta_1',\cdots,\beta_n'))\in(\mathbf{C}^*)^n\times(\mathbf{C}^*)^n$ の形になる. 対応するL-群の元は

$$
\gamma_v=\left(\begin{pmatrix}\alpha_1&&\\&\ddots&\\&&\alpha_{2n}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\beta_1&&\\&\ddots&\\&&\beta_n\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\beta_1'&&\\&\ddots&\\&&\beta_n'\end{pmatrix}\right)\times id\in{}^L(G\times M)^0
$$

$$
\gamma_v^*=\left(\begin{pmatrix}\alpha_1^*&&\\&\ddots&\\&&\alpha_{2n+1}^*\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\beta_1&&\\&\ddots&\\&&\beta_n\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\beta_1'&&\\&\ddots&\\&&\beta_n'\end{pmatrix}\right)\times id\in{}^L(G\times M)^0
$$

となる. このとき

$$L_v(s,\sigma_v\times\pi_v)=\det(1_{4n^2}-r(\gamma_v)q_v^{-s})^{-1}=\frac{1}{\prod_{\substack{1\le i\le 2n\\1\le j\le n}}(1-\alpha_i\beta_jq_v^{-s})(1-\alpha_i^{-1}\beta_j'q_v^{-s})}$$

$$L_v(s,\sigma_v^*\times\pi_v)=\det(1_{2n(2n+1)}-r^*(\gamma_v^*)q_v^{-s})^{-1}=\frac{1}{\prod_{\substack{1\le i\le 2n+1\\1\le j\le n}}(1-\alpha_i^*\beta_jq_v^{-s})(1-\alpha_i^{*-1}\beta_j'q_v^{-s})}$$

と定義する. これにより保型L-関数はEuler積で与えられる. すなわち

$$L_S(s,\sigma\times\pi)=\prod_{v\notin S}L_v(s,\sigma_v\times\pi_v),\qquad L_{S^*}(s,\sigma^*\times\pi)=\prod_{v\notin S^*}L_v(s,\sigma_v^*\times\pi_v)$$

これらのEuler積は $\Re(s)>>0$ で絶対収束する.

## 3. Eisenstein 級数とテータ級数

まず $G(\mathbf{A})$ 上の Eisenstein 級数を定義する. 以下 $K$ を $G(\mathbf{A})$ の極大コンパクト部分群とする. 指標 $\alpha\colon M(\mathbf{A})\to\mathbf{C}^\times$ を $\alpha(\begin{pmatrix}a&0\\0&{}^t\overline{a}^{-1}\end{pmatrix})=|\det a|_E$ により定義する. 各 $g\in G(\mathbf{A})$ に対し, その Iwasawa 分解 $g=umk$, $(u\in U_P(\mathbf{A}),\ m\in M(\mathbf{A}),k\in K)$ を用いることにより, $\alpha$ は $G(\mathbf{A})$ 上に $\alpha(g)=\alpha(m)$ により延長される. さて cuspidal 表現 $\pi\otimes\alpha^s$ からの誘導表現を

$$\begin{aligned}&\mathrm{Ind}_{P(\mathbf{A})}^{G(\mathbf{A})}\pi\otimes\alpha^s\\&=\{F_s\colon G(\mathbf{A})\to V_\pi:\ F_s(umg)=\alpha(m)^{s+n/2}\pi(m)(F_s(g)),\ u\in U_P(\mathbf{A}),\ m\in M(\mathbf{A}),\ g\in G(\mathbf{A})\}\end{aligned}$$

とする. いま $e^*$ を $V_\pi$ 上の単位元での evaluation functional, すなわち $e^*(\Phi)=\Phi(1_{2n})$, として, 各 $F_s\in\mathrm{Ind}_{P(\mathbf{A})}^{G(\mathbf{A})}\pi\otimes\alpha^s$ に対し, $G(\mathbf{A})$ 上の関数 $\widetilde{F}_s(g)=e^*(F_s(g))$ を対応させる. そして $\widetilde{F}_s$ の中で smooth かつ $K$-finite なものの成す集合を $I(\pi\otimes\alpha^{s+n/2})$ とおく. さらに, 各 $\widetilde{F}_s\in I(\pi\otimes\alpha^{s+n/2})$ に対して

$$W_{\widetilde{F}_s}(g)=\int_{\Delta\backslash\Delta(\mathbf{A})}\psi(\delta)\widetilde{F}_s(\delta g)d\delta$$

とおき, このような関数の成す空間を $W(I(\pi\otimes\alpha^{s+n/2}),\psi^{-1})$ とおく.

いま $\widetilde{F}\in I(\pi)$ に対し, Eisenstein 級数を

$$E(s,\widetilde{F},g)=\sum_{\gamma\in P\backslash G}\alpha(\gamma g)^{s+n/2}\widetilde{F}(\gamma g)$$

により与える. この級数は $\Re(s)>>0$ で絶対収束し, 全 $s$-平面上有理型関数に解析接続される. $E(s,\widetilde{F},g)$ の normalizing factor は次のように与えられる. $F$ の有限素点 $v$ で $\pi_v$ が spherical 表現かつ $\mu_v$ が不分岐である様なもの全体の集合を $V_F(\pi,\mu)$ として, $S_1=V_F\backslash V_F(\pi,\mu)$ とする. L-群 ${}^LM=(GL_n(\mathbf{C})\times GL_n(\mathbf{C}))\times\Gamma_{E/F}$ の表現 $r_1\colon{}^LM\to\mathrm{Aut}(M_n(\mathbf{C}))$ を

$$r_1((g_1,g_2)\times\epsilon)X=g_1{}^tX^tg_2,\qquad (X\in M_n(\mathbf{C}))$$

で定義する. 各 $v\in V_F(\pi,\mu)$ に対して, spherical 表現 $\pi_v$ に対応する ${}^LM$ の元を

$$\gamma_v'=\begin{cases}\left(\begin{pmatrix}\beta_1&&\\&\ddots&\\&&\beta_n\end{pmatrix},1_n\right)\times\epsilon & \text{if } v \text{ is non-split on } E\\[2ex]\left(\begin{pmatrix}\beta_1&&\\&\cdots&\\&&\beta_n\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\beta_1'&&\\&\cdots&\\&&\beta_n'\end{pmatrix}\right)\times id & \text{if } v \text{ is split on } E\end{cases}$$

として,

$$L_v(s,\pi_v,r_1)=\det(1_{n^2}-r_1(\gamma'_v)q_v^{-s})^{-1}$$
$$=\begin{cases}\prod_{1\le i<j\le n}(1-\beta_i\beta_j q_v^{-2s})^{-1}\prod_{1\le k\le n}(1-\beta_k q_v^{-s})^{-1} & \text{if } v \text{ is non-split on } E\\ \prod_{1\le i,j\le n}(1-\beta_i\beta'_j q_v^{-s})^{-1} & \text{if } v \text{ is split on } E\end{cases}$$

により local factor を定める. これから

$$L_{S_1}(s,\pi,r_1)=\prod_{v\notin S_1}L_v(s,\pi_v,r_1)$$

とする. $L_{S_1}(s,\pi,r_1)$ は Langlands - Shahidi の方法により解析接続される.

次に $G(\mathbf{A})$ 上のテータ級数を定義する. 指標 $\mu$ から定まるサイズ $4n$ の symplectic 群 $Sp_{4n}(\mathbf{A})$ 上の metaplectic 群 $Mp_{4n}(\mathbf{A})$ の Weil 表現を $\omega_\mu$ とする. 対 $(\mu,\nu)$ から $Sp_{4n}(\mathbf{A})$ に自然に埋めこまれる $G(\mathbf{A})$ 上において, 被覆 $Mp_{4n}(\mathbf{A})\to Sp_{4n}(\mathbf{A})$ の splitting $s_{\mu,\nu}: G(\mathbf{A})\to Mp_{4n}(\mathbf{A})$ が構成できる. 合成 $\omega^n=\omega_\mu\circ s_{\mu,\nu}$ は $G(\mathbf{A})$ の表現を与え, その表現空間は $\mathbf{A}_E^n$ 上の Schwartz-Bruhat 関数の空間 $\mathcal{S}(\mathbf{A}_E^n)$ になる. 各 $f\in\mathcal{S}(\mathbf{A}_E^n)$ に対し

$$\theta_f^n(g)=\sum_{x\in E^n}\omega^n(g)f(x)$$

によりテータ級数を定義する.

$$R_f(g)=\omega^n(g)f(\varepsilon_n),\quad \varepsilon_n=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$$

とおけば

$$\theta_f^n(g)=\omega^n(g)f(0)+\sum_{\gamma\in Q\backslash M}R_f(\gamma g)$$

と書ける. ここで

$$Q=\{m=\begin{pmatrix}a&0\\0&{}^t\overline{a}^{-1}\end{pmatrix}\mid {}^t\overline{a}\varepsilon_n=\varepsilon_n\}$$

とする.

## 4. Rankin - Selberg convolutions

まず $\varphi\in V_\sigma$, $\varphi^*\in V_{\sigma^*}$, $\widetilde{F}\in I(\pi)$, $f\in\mathcal{S}(\mathbf{A}_E^n)$ を decomposable なものとすれば

$$W_\varphi(g)=\prod_{v\in V_F}W_v(g_v),\quad W_{\varphi^*}(h)=\prod_{v\in V_F}W_v^*(h_v)$$
$$W_{\widetilde{F}}(g)=\prod_{v\in V_F}W'_v(g_v),\quad R_f(g)=\prod_{v\in V_F}R_{f_v}(g_v),\quad (R_{f_v}(g_v)=\omega_v^n(g_v)f_v(\varepsilon_n))$$

と書ける. いま global integral と local integral を次で定義する.

$$J(s,\varphi,\widetilde{F},f)=\int_{G\backslash G(\mathbf{A})}\varphi(g)E(s,\widetilde{F},g)\theta_f^n(g)dg$$
$$J^*(s,\varphi^*,\widetilde{F})=\int_{G\backslash G(\mathbf{A})}\varphi^*(\iota(g))E(s,\widetilde{F},g)dg$$
$$J_v(s,W_v,W'_v,R_{f_v})=\int_{U(F_v)\backslash G(F_v)}W_v(g)W'_v(g)R_{f_v}(g)\alpha(g)^{s+n/2}dg$$
$$J_v^*(s,W_v^*,W'_v)=\int_{U(F_v)\backslash G(F_v)}W_v^*(\iota(g))W'_v(g)\alpha(g)^{s+n/2}dg.$$

$J(s,\varphi,\widetilde{F},f)$ と $J^*(s,\varphi^*,\widetilde{F})$ は全 $s$-平面上の有理型関数である.

$\boxed{\text{Basic Identity}}$([1]) $\Re(s)>>0$ で

$$J(s,\varphi,\widetilde{F},f)=\int_{U(\mathbf{A})\backslash G(\mathbf{A})} W_\varphi(g)W_{\widetilde{F}}(g)R_f(g)\alpha(g)^{s+n/2}dg,$$
$$J^*(s,\varphi^*,\widetilde{F})=\int_{U(\mathbf{A})\backslash G(\mathbf{A})} W_{\varphi^*}(\iota(g))W_{\widetilde{F}}(g)\alpha(g)^{s+n/2}dg.$$

Local integral については standard な方法で次が証明できる.

$\boxed{\text{定理 1}}$ (1) $J_v(s,W_v,W_v',R_{f_v})$ と $J_v^*(s,W_v^*,W_v')$ はともに $\Re(s)>>0$ で絶対収束し, 全 $s$-平面上有理型関数に解析接続される.

(2) $v$ が有限素点のとき,

$$I(\sigma_v,\pi_v,\nu_v)=\mathrm{Span}\{J_v(s,W_v,W_v',R_{f_v})\mid W_v\in W(\sigma_v,\psi_v),\ \ W_v'\in W(I(\pi_v),\psi_v^{-1}),\ \ f_v\in\mathcal{S}((E\otimes F_v)^n)\}$$
$$I^*(\sigma_v^*,\pi_v)=\mathrm{Span}\{J_v^*(s,W_v^*,W_v')\mid W_v^*\in W(\sigma_v^*,\psi_v^*),\ \ W_v'\in W(I(\pi_v),\psi_v^{-1})\}$$

は $\mathbf{C}[q_v^{-s},q_v^s]$ の fractional ideal になり, 多項式 $A_{\sigma_v,\pi_v,\nu_v}(X)\in\mathbf{C}[X]$, $A^*_{\sigma_v^*,\pi_v}(X)\in\mathbf{C}[X]$ で

$$I(\sigma_v,\pi_v,\nu_v)=A_{\sigma_v,\pi_v,\nu_v}(q_v^{-s})^{-1}\mathbf{C}[q_v^{-s},q_v^s],\quad A_{\sigma_v,\pi_v,\nu_v}(0)=1$$
$$I^*(\sigma_v^*,\pi_v)=A^*_{\sigma_v^*,\pi_v}(q_v^{-s})^{-1}\mathbf{C}[q_v^{-s},q_v^s],\quad A^*_{\sigma_v^*,\pi_v}(0)=1$$

となるものがただ一つ存在する.

(3) $v\in V_F(\sigma,\pi,\mu,\nu)$ のとき, $W_v,W_v',R_{f_v}$ がすべて不分岐ならば

$$J_v(s,W_v,W_v',R_{f_v})=\frac{L_v(s+\frac{1}{2},\sigma_v\times(\pi_v\otimes\nu_{1v}))}{L_v(2s+1,\pi,r_1)}$$

ただし, $\nu_1=\nu\circ\det$ とする. 特に

$$A_{\sigma_v,\pi_v,\nu_v}(q_v^{-s})^{-1}=L_v(s+\frac{1}{2},\sigma_v\times(\pi_v\otimes\nu_{1v}))$$

(4) (B. Tamir による. [2]) $v\in V_F(\sigma^*,\pi)$ のとき, $W_v^*,W_v'$ がともに不分岐ならば

$$J_v^*(s,W_v^*,W_v')=\frac{L_v(s+\frac{1}{2},\sigma_v^*\times\pi_v)}{L_v(2s+1,\pi,r_1)}$$

特に

$$A^*_{\sigma_v^*,\pi_v}(q_v^{-s})^{-1}=L_v(s+\frac{1}{2},\sigma_v^*\times\pi_v)$$

Basic Identity と定理 1 から $L_S(s,\sigma\times(\pi\otimes\nu_1))$, $L_{S^*}(s,\sigma^*\times\pi)$ の解析接続が従う. すなわち

$\boxed{\text{系}}$ (1) $\varphi\in V_\sigma$, $\widetilde{F}\in I(\pi)$, $f\in\mathcal{S}(\mathbf{A}_E^n)$ を任意の $v\in V_F(\sigma,\pi,\mu,\nu)$ において, $W_v,W_v',R_{f_v}$ がすべて不分岐であるようにとれば

$$J(s,\varphi,\widetilde{F},f)=\left(\prod_{v\in S}J_v(s,W_v,W_v',R_{f_v})\right)\frac{L_S(s+\frac{1}{2},\sigma\times(\pi\otimes\nu_1))}{L_S(2s+1,\pi,r_1)}.$$

(2) $\varphi^* \in V_{\sigma^*}$, $\widetilde{F} \in I(\pi)$ を任意の $v \in V_F(\sigma^*, \pi, \mu)$ において, $W_v, W'_v$ がともに不分岐であるようにとれば

$$J^*(s, \varphi^*, \widetilde{F}) = \left( \prod_{v \in S^*} J^*_v(s, W^*_v, W'_v) \right) \frac{L_{S^*}(s+\frac{1}{2}, \sigma^* \times \pi)}{L_{S^*}(2s+1, \pi, r_1)}.$$

5. テータ級数リフトにおけるL関数の比較.

ユニタリ群 $G_{n(2n+1)}(\mathbf{A})$ についてSection 3 と同じ方法で Weil 表現 $(\omega = \omega_{\mu,\nu}, \mathcal{S}(M_{2n,n}(\mathbf{A}_E) \oplus M_{n,1}(\mathbf{A}_E)))$ が定義できる. $f \in \mathcal{S}(M_{2n,n}(\mathbf{A}_E) \oplus M_{n,1}(\mathbf{A}_E))$ に対し, テータ級数を

$$\theta_f^{n(2n+1)}(g) = \sum_{x \in M_{2n,n}(E), y \in M_{n,1}(E)} \omega(g) f(x, y), \qquad (g \in G_{n(2n+1)}(\mathbf{A}))$$

とおく. 群 $G(\mathbf{A}) \times G^*(\mathbf{A})$ は central torus $\{(t1_{2n}, \bar{t}1_{2n+1}) : t\bar{t} = 1\}$ を法として $G_{n(2n+1)}(\mathbf{A})$ に埋め込むことができるので, $\theta_f^{n(2n+1)}$ の $G(\mathbf{A}) \times G^*(\mathbf{A})$ への制限が考えられる. これを用いて $G(\mathbf{A})$ 上の cusp form $\varphi \in V_\sigma$ に対し, そのテータ級数リフトを

$$\varphi_f^*(h) = \int_{G \backslash G(\mathbf{A})} \varphi(g) \theta_f^{n(2n+1)}(gh) dh\,, \qquad (h \in G^*(\mathbf{A}))$$

により定義し, その集合を $\Theta_{\mu,\nu}(\sigma) = \{\varphi_f^* : \varphi \in V_\sigma, f \in \mathcal{S}(M_{2n,n}(\mathbf{A}_E) \oplus M_{n,1}(\mathbf{A}_E))\}$ とおく. これは $G^*(\mathbf{A})$ の保型表現で non-zero かつ generic である ([4]). また, これが cuspidal であれば既約になることも知られている. Whittaker 関数 $W_\varphi$ と $W^*_{\varphi_f^*}$ の関係は次のように書ける. まず

$$\Psi(f)(g) = \int_{\Delta^*(\mathbf{A})} \psi^*(\delta^*)^{-1} \omega(g, \delta^*) f(x_0, y_0) d\delta^*, \qquad x_0 = \begin{pmatrix} 1_n \\ 0_n \end{pmatrix} \in M_{2n,n}(E),\ y_0 = \varepsilon_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in M_{n,1}(E)$$

とおくとき

$$W_{\varphi_f^*}(h) = \int_{U(\mathbf{A}) \backslash G(\mathbf{A})} W_\varphi(g) \Psi(\omega(h) f)(g) dg \tag{5.1}$$

いま, $GL_n(\mathbf{A}_E)$ の既約 cuspidal 表現 $(\pi, V_\pi)$ を $\overline{\pi}(a) = \pi(\overline{a})$ で定義する. 同様に $\overline{\nu}_1(a) = \nu(\det \overline{a})$ とする. $\nu$ のとりかたにより $\overline{\nu}_1 = \nu_1^{-1}$ である. $\overline{\pi}$ の Whittaker model は

$$W(\overline{\pi}, \psi^{-1}) = \{\overline{W} \mid W \in W(\pi, \psi^{-1})\}, \qquad \overline{W}(a) = W(\overline{a})$$

で与えられる. 一般に $V_F(\Theta_{\mu,\nu}(\sigma), \pi, \mu) = V_F(\sigma, \pi, \mu, \nu)$ となることに注意すると, 次が成り立つ.

$\boxed{\text{定理 2}}$ $\sigma^* = \Theta_{\mu,\nu}(\sigma)$ が cuspidal であれば

$$L_S(s, \sigma^* \times \pi) = L_S(s, \pi_1) L_S(s, (\sigma \otimes \nu_1^n) \times (\pi_1 \otimes \nu_1))$$

となる. ここで $\pi_1 = \overline{\pi} \otimes \overline{\nu}_1^{2n}$ とする.

以下証明の概略を述べる. まず $\widetilde{F} \in I(\pi)$ を次のようにとる. Cusp form $\Phi \in V_\pi$ と $K$ の適当な有限次元既約表現 $\tau$ の elementary idempotent $\xi_\tau$ をとり, 関数 $F_\Phi : G(\mathbf{A}) \to \mathbf{C}$ を

$$F_\Phi(umk) = \int_{K \cap M(\mathbf{A})} \Phi(mk') \xi_\tau(k^{-1}k') dk'\,, \qquad (u \in U_P(\mathbf{A}),\ m \in M(\mathbf{A}),\ k \in K)$$

で定義する. 明らかに $\widetilde{F}=F_{\Phi}\in I(\pi)$ である. Basic Identity と (5.1) から $\Re(s)>>0$ のとき

$$J^{*}(s,\varphi_{f}^{*},F_{\Phi})=\int_{U(\mathbf{A})\backslash G(\mathbf{A})}W_{\varphi}(g)\int_{M(\mathbf{A})}\omega(g,\iota(m))f^{\tau}(x_{0},y_{0})W_{\Phi}(a_{m})|\det a_{m}|_{E}^{s-n/2}dmdg$$

が得られる. ただし

$$f^{\tau}(x_{0},y_{0})=\int_{K}\xi_{\tau}(k^{-1})\omega(1,\iota(k))f(x_{0},y_{0})dk,\qquad m=\begin{pmatrix}a_{m}&0\\0&{}^{t}\overline{a}_{m}^{-1}\end{pmatrix}\in M$$

とする. いま $f^{\tau}(x_{0},y_{0})=f_{1}(x_{0})f_{2}(y_{0})$ であるとすれば,

$$\omega(g,\iota(m))f_{1}(x_{0})f_{2}(y_{0})=\nu_{1}(a_{m})^{2n}\nu_{1}(g)^{n}|\det a_{m}|_{E}^{n}f_{1}(g^{-1}x_{0}\overline{a}_{m})\omega^{n}(g)f_{2}(y_{0})$$

となる. ここで $\omega^{n}$ は Section 3 で与えられた $G(\mathbf{A})$ の Weil 表現とする. 改めて $\Phi_{1}=\overline{\nu}_{1}^{2n}\otimes\overline{\Phi}\in\overline{\nu}_{1}^{2n}\otimes V_{\overline{\pi}}$ とおく. $G(\mathbf{A})$ 上の関数を

$$V_{(\Phi_{1},f_{1})}^{s}(g)=\alpha(g)^{-s-n/2}\int_{M(\mathbf{A})}W_{\Phi_{1}}(a_{m})|\det a_{m}|_{E}^{s+n/2}f_{1}(g^{-1}x_{0}a_{m})dm$$

により定義すれば,

$$J^{*}(s,\varphi_{f}^{*},F_{\Phi})=\int_{U(\mathbf{A})\backslash G(\mathbf{A})}\nu_{1}(g)^{n}W_{\varphi}(g)R_{f_{2}}(g)\alpha(g)^{s+n/2}V_{(\Phi_{1},f_{1})}^{s}(g)dg \tag{5.2}$$

を得る. [5] の結果より $V_{(\Phi_{1},f_{1})}^{s}(g)$ を定義する積分は $\Re(s)>>0$ で絶対収束し, 全 $s$-平面上正則に解析接続される. そして

$$V_{(\Phi_{1},f_{1})}^{s}(g)\in W(I(\pi_{1}),\psi^{-1})$$

である. ゆえに $s$ に正則に依存する $\widetilde{F}(s,\Phi_{1},f_{1})\in I(\pi_{1})$ が存在して

$$V_{(\Phi_{1},f_{1})}^{s}(g)=W_{\widetilde{F}(s,\Phi_{1},f_{1})}(g)$$

と書ける. よって

$$J^{*}(s,\varphi_{f}^{*},F_{\Phi})=J(s,\varphi,\widetilde{F}(s,\Phi_{1},f_{1}),f_{2})$$

を得る. さらに $\Phi_{1}$, $f_{1}$ がともに decomposable で

$$W_{\Phi_{1}}(a)=\prod_{v\in V_{F}}W_{1}(a_{v}),\quad f_{1}(x)=\prod_{v\in V_{F}}f_{1,v}(x_{v})$$

とする. 局所積分を

$$V_{(W_{1,v},f_{1,v})}^{s}(g)=\alpha(g)^{-s-n/2}\int_{M(F_{v})}W_{1,v}(a_{m})|\det a_{m}|_{E}^{s+n/2}f_{1,v}(g^{-1}x_{0}a_{m})dm$$

とすると

$$V_{(\Phi_{1},f_{1})}^{s}(g)=\prod_{v\in V_{F}}V_{(W_{1,v},f_{1,v})}^{s}(g_{v})$$

となる. 各 $v\in V_{F}(\sigma,\pi,\mu,\nu)$ において, $W_{1,v}$ が $K_{v}$-不変 Whittaker 関数, $f_{1,v}$ が standard lattice の特性関数ならば [5] の計算より

$$V_{(W_{1,v},f_{1,v})}^{s}=L_{v}(s+1/2,\pi_{1,v})W_{1,v}$$

となる. したがって, さらに各 $v \in V_F(\sigma,\pi,\mu,\nu)$ において $W_v$, $f_{2,v}$ が不分岐であるようにとれば, (5.2) の右辺は

$$\left(\prod_{v\in S} J_v(s, W_v, V^s_{(W_{1,v},f_{1,v})}, R_{f_{2,v}})\right) \frac{L_S(s+1/2,\pi_1)L_S(s+1/2,(\sigma\otimes\nu_1^n)\times(\pi_1\otimes\nu_1))}{L_S(2s+1,\pi_1,r_1)}$$

となる. $\nu$ のとりかたから $L_S(s,\pi_1,r_1) = L_S(s,\pi,r_1)$ となることに注意すれば定理を得る.

Remark. これは推測であるが, $B_n$-型 または $BC_n$-型ルート系の Rankin-Selberg convolution (cusp form と Eisenstein 級数の積の積分) と $C_n$-型ルート系の Shimura 型ゼータ積分 (cusp form と Eisenstein 級数 と テータ級数の積の積分) とのあいだにはある種の "duality" があるようにおもえる. 現象としては $B_n$-型ルート系の Rankin-Selberg convolution (このノートでは $J^*(s,\varphi^*,\widetilde{F})$ に相当するもの) があれば, それにテータ級数を含ませることにより $C_n$-型ルート系のゼータ積分 ($J(s,\varphi,\widetilde{F},f)$ に相当するもの) ができるというものである. この対応はかなり一般的な状況 (例えば 村瀬氏の構成法など) で成り立つようにおもえる. この "duality" の一つの解釈が [1, Section 6] にある.

## References


1. S. Gelbart and I. Piatetski-Shapiro, *L-functions for $G \times GL(n)$*, in "Explicit Constructions of Automorphic L-functions," Springer Lec. Notes in Math. 1254, 1987.
2. B. Tamir, *On L-functions and intertwining operators for unitary groups*, Israel J. of Math. **73** (1991), 161 - 188.
3. D. Soudry, *Rankin-Selberg convolutions for $SO_{2\ell+1} \times GL_n$: Local Theory*, Memoirs Amer. Math. Soc..
4. T. Watanabe, *Theta liftings for quasi-split unitary groups*, Manuscripta Math. **82** (1994), 241 - 260.
5. T. Watanabe, *The global theta correspondence of $(GL_n, GL_n)$*, preprint.
6. T. Watanabe, *in preparation.*