数理解析研究所講究録
909巻 1995年 177-189

Standard L-functions for $U_{n,n}$

東北大学理学研究科修士2年 高野啓児 (Keiji Takano)

0 Introduction.

E/F を数体の2次拡大、$G = U_{n,n}(E/F)$ をこれに対応して定義されるユニタリ群とする：

$$G(F) := \{\, g \in GL_{2n}(E) \mid gJ_n{}^t\bar{g} = J_n \,\}\ ,\ J_n := \begin{pmatrix} 0 & 1_n \\ -1_n & 0 \end{pmatrix}$$

$G(\mathbb{A})$ の尖点保型表現に対するスタンダード L-関数の解析接続を、[10] の方法を用いて調べることができる。その具体的な計算等について以下で紹介する。ちなみに、[10] では、$G = Sp_n, O_{n,n}$ の場合が調べられているが、分岐素点での理論については言及されていないので、ここではそれについても述べるつもりである。

1 Notation.Definitions.

G の部分群について.

S : maximal F-split torus. $S(F) = \{diag(s_1, \ldots, s_n, s_1^{-1}, \ldots, s_n^{-1}) \mid s_i \in F\}$

T : maximal torus. $T(F) = \{diag(t_1, \ldots, t_n, \bar{t_1}^{-1}, \ldots, \bar{t_n}^{-1}) \mid t_i \in E\,\}$

$B = T \ltimes N$: Borel subgp.where,

$$N(F) = \left\{ \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & {}^t\bar{u}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1_n & b \\ 0 & 1_n \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{array}{l} u \in GL_n(E), upper\ triangular \\ and\ b \in Mat_n(E)\ s.t.\ b = {}^t\bar{b} \end{array} \right\}$$

$P^{(r)} = M^{(r)} \ltimes U^{(r)}$ $(1 \le r \le n)$:standard maximal parabolic subgp.where,

$$M^{(r)}(F) = \left\{ \begin{pmatrix} g & & & \underline{0} \\ & 1_{n-r} & & \\ & & {}^t\bar{g}^{-1} & \\ \underline{0} & & & 1_{n-r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1_r & & & \\ & A & & B \\ & & 1_r & \\ & C & & D \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{array}{l} g \in GL_r(E) \\ \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in U_{n-r,n-r}(E/F) \end{array} \right\}$$

$$U^{(r)}(F)=\left\{\begin{pmatrix}1_r & * & * & * \\ & 1_{n-r} & * & 0 \\ & & 1_r & 0 \\ \underset{\sim}{0} & & * & 1_{n-r}\end{pmatrix}\in N(F)\right\}$$

特に、$P^{(n)}$ をたんに P で表わす。

F の素点 vでの完備化を F_v と書き、その valuation ring を $\mathcal{O}_v$ 、residue order を q_v で表わす。また、$E_v := E\otimes_F F_v$ とする。ここで、

(A) v **split.** : $E_v\simeq F_v\oplus F_v$ as F_v-algebra.

(B) v **non-split.** : E_v/F_v が体の 2 次拡大.

の二通りが考えられ、それぞれで $G(F_v)=: G_v$ は、

(A) $G_v\ \simeq GL_{2n}(F_v)$

(B) $G_v\ =U_{n,n}(E_v/F_v)$

となっている。

$H:=U_{2n,2n}(E/F)$ とし、埋め込み $i:G\times G\hookrightarrow H$ を次のように定義する。まず $G(F)$ が skew-hermitian space (V,ϕ_V) の isometry group として実現されているとみて、$W:=V\oplus V$ とし、W上の sesquilinear form ϕ_W を

$$\phi_W\Big((v_1,v_2),(v_1',v_2')\Big)=\phi_V(v_1,v_1')-\phi_V(v_2,v_2')$$

で与えると、(W,ϕ_W) もまた skew-hermitian space になる。これを $H(F)$ と同一視し、$i(g_1,g_2)\in H(F)$ を W への作用が

$$(v_1,v_2)\cdot i(g_1,g_2)=(v_1\cdot g_1,v_2\cdot g_2)$$

となるものとして $G\times G\hookrightarrow H$ がきまる。

G に対して定義したのと同様の Hの部分群を S_H,T_H,B_H,P_H etc. と書くことにする。

各素点 vで、G_v, および H_v の good maximal compact subgroup K_v および $(K_H)_v$をそれぞれ取っておき、$K:=\prod_v K_v, K_H:=\prod_v (K_H)_v$ とする。

G の L-group は $^LG=GL_{2n}(\mathbb{C})\rtimes Gal(E/F)$ である。但しここで、$Gal(E/F)$ の non-trivial element の $GL_{2n}(\mathbb{C})$ への作用は、

$$g\mapsto J_n{}^tg^{-1}J_n^{-1}$$

で与えられる。^LG の standard 表現とは、ここでは

$$r_{st}=Ind_{GL_{2n}(\mathbb{C})}^{^LG}(\rho_{2n})$$

で定まる 4n-次元表現のことを意味する。ここでρ_{2n}は $GL_{2n}(\mathbb{C})$ の自然な 2n-次元表現を表わしている。

$\pi=\otimes_v\pi_v$ を $G(\mathbb{A})=\prod_v G_v$ の尖点保型表現とする。素点 vが不分岐であるとは、

- π_v が不分岐球表現で、
- v が non-split のときは E_v/F_v が不分岐拡大.

のときにいう。不分岐素点での局所スタンダード L-因子 $L(s,\pi_v,r_{st}) = L(s,\pi_v)$ は具体的に以下のように与えられる；

(A) v **split** 2n 個の F_vの quasi-characters $\mu_1^{(v)},\ldots,\mu_{2n}^{(v)}$ を取って、

$$\pi_v \hookrightarrow Ind_{B_v}^{G_v}(\mu_1^{(v)},\ldots,\mu_{2n}^{(v)})$$

となっているとき、

$$L(s,\pi_v) = \prod_{i=1}^{2n} L(s,\mu_i^{(v)})L(s,\mu_i^{(v)-1})$$

(B) v **non-split** n 個の E_vの quasi-characters $\mu_1^{(v)},\ldots,\mu_n^{(v)}$ を取って、

$$\pi_v \hookrightarrow Ind_{B_v}^{G_v}(\mu_1^{(v)},\ldots,\mu_n^{(v)})$$

となっているとき、

$$L(s,\pi_v) = \prod_{i=1}^{n} L(s,\mu_i^{(v)})L(s,\mu_i^{(v)-1})$$

ここで $L(s,\mu)$ は局所体の quasi-character に対する Tate の L-因子である。素点 vの split/non-split によらず $L(s,\pi_v)$ の q_v^{-s} についての degree は 4n になっていることに注意する。

S を尖点保型表現 $\pi = \otimes_v \pi_v$ の分岐素点の集合とする。このとき、これに対する standard L-関数 $L_S(s,\pi,r_{st}) = L(s,\pi)$ を、

$$L(s,\pi) = \prod_{v\notin S} L(s,\pi_v)$$

で定義する。右辺の無限積が $Re(s) >> 0$ で絶対収束することは知られている。([1] など。)

2 Basic Identity.

$P_H(\mathbb{A})$ 上の complex character $\delta_s : P_H(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}^\times$ を $\delta_s := (\delta_{P_H(\mathbb{A})})^{s/2n}$ で定義する。但しここで、$\delta_{P_H(\mathbb{A})}$ は $P_H(\mathbb{A})$ の topological module を表わす。$\delta_s = \prod_v \delta_s^{(v)}$ ($\delta_s^{(v)}$ は $P_H(F_v)$ 上の complex character) のように書かれ、具体的に各 $\delta_s^{(v)}$ は、

(A)v **split;** $\delta_s^{(v)}(\begin{pmatrix} g_1 & * \\ 0 & g_2 \end{pmatrix}) = |det(g_1)|_v^s |det(g_2)|_v^{-s}$ for $g_1, g_2 \in GL_{2n}(F_v)$

(B)v **non-split;** $\delta_s^{(v)}(\begin{pmatrix} g & * \\ 0 & {}^t\bar{g}^{-1} \end{pmatrix}) = |det(g)|_{E_v}^s$ $(= |det(g)\overline{det(g)}|_v^s$) for $g \in GL_{2n}(E_v)$

と与えられる。$f_s \in ind_{P_H(\mathbb{A})}^{H(\mathbb{A})}(\delta_s)$ に対し、$H(\mathbb{A})$ 上の Eisenstein 級数を、

$$E(h;f_s) := \sum_{\gamma \in P_H(F)\backslash H(F)} f_s(\gamma h)$$

で定義する。この右辺は $Re(s) \gg 0$ で広義一様に絶対収束し、s について meromorphic に全平面に解析接続される。

$\pi = \otimes_v \pi_v$ を $G(\mathbb{A})$ の尖点保型表現とし、$\tilde{\pi} = \otimes_v \tilde{\pi_v}$ をその反傾表現とする。$\varphi = \otimes_v \varphi_v \in \pi, \tilde{\varphi} = \otimes_v \tilde{\varphi_v} \in \tilde{\pi}, f_s = \otimes_v f_s^{(v)} \in ind_{P_H(\mathbb{A})}^{H(\mathbb{A})}(\delta_s)$ のとき、

Theorem 1 (Piatetskii-Shapiro,Rallis)

$$\begin{aligned}
&\int_{G(F)\backslash G(\mathbf{A})} \int_{G(F)\backslash G(\mathbf{A})} E\Big(i(g_1,g_2);f_s\Big)\varphi(g_1)\tilde{\varphi}(g_2)dg_1dg_2 \\
&= \prod_v \int_{G(F_v)} f_s^{(v)}(i(g_v,1)) < \pi_v(g_v)\varphi_v, \tilde{\varphi_v} > dg_v
\end{aligned}$$

左辺の二重積分を $\mathcal{Z}(f_s;\varphi,\tilde{\varphi})$, 右辺の各局所積分を $\mathcal{Z}_v(f_s^{(v)};\varphi_v,\tilde{\varphi_v})$ と書くことにする。この段階では、$\mathcal{Z}_v(f_s^{(v)};\varphi_v,\tilde{\varphi_v})$ の収束や、右辺の無限積の収束などはもちろん分かっていない。$Re(s) \gg 0$ で $E(h;f_s)$ を級数の形に書いて、$\mathcal{Z}(f_s;\varphi,\tilde{\varphi})$ を形式的に変形して右辺が得られるだけである。(詳しくは [10] を参照。)

以下で [5] の " L-function machine " の各 step を辿る。(関数等式と関連したところについては触れない。)

3 Eisenstein 級数の解析的性質.

$\phi_s = \otimes_v \phi_s^{(v)} \in ind_{P_H(\mathbf{A})}^{H(\mathbf{A})}(\delta_s)$ は $\phi_s \equiv 1$ on K_H となる 唯一つの元とし、ϕ_s が生成する $ind_{P_H(\mathbf{A})}^{H(\mathbf{A})}(\delta_s)$ の部分許容 $H(\mathbb{A})$-加群を $\mathcal{I}(s) = \otimes_v \mathcal{I}_v(s)$ で表わす 。$f_s \in \mathcal{I}(s)$ のときは、[10] に倣って $E(h;f_s)$ の解析的性質を詳しく調べることができる。

$$\chi_s = (\delta_{s|_{T_H(\mathbf{A})}}) \times (\delta_{B_H(\mathbf{A})})^{-1/2}$$

として、$f_s \in Ind_{B_H(\mathbf{A})}^{H(\mathbf{A})}(\chi_s)$ と考えることができ、[10] と全く同様にして、

$$\text{const. term of } E(h;f_s) = \sum_{w \in \Omega_H} I_w(f_s)$$

但し、Ω_H は、その元がつぎの $(*)$ によって特徴づけられるような、H の (relative) Weyl 群 W_H の部分集合である：

$(*)\ldots$ $\{1,\ldots,2n\}$ の置換 i で, ある番号 k で

$$i_1 < \ldots < i_k, i_{k+1} > \ldots > i_{2n}$$

を満たすものを取って、$w^{-1} \in W_H$ の $X^*(S_H)$ の作用が

$$w^{-1} \cdot \chi_l = \begin{cases} \chi_{i_l} & (\text{if } l \leq k) \\ -\chi_{i_l} & (\text{if } l \geq k+1) \end{cases}$$

で与えられる。

また、$I_w(f_s)$ は $w \in W_H$ の定める intertwining operator で、各 $w \in W_H$ に対して $(N_H)_w^- = \prod_{\alpha>0, w\cdot\alpha<0} (N_H)_\alpha$ とするときに、

$$I_w(f_s)(h) = \int_{(N_H)_w^-(\mathbf{A})} f_s(wnh)dn$$

で定義されるものである。

以下特に、$f_s = \rho(h)\phi_s; h \in H(\mathbb{A}_f)$ [resp. $f_s = \rho(X)\phi_s; X \in \mathfrak{h}_\infty$] の場合を考えればよく、このときは各 $w \in \Omega_H$ に対応する $I_w(f_s)(h)$ の極は Gindikin-karperevich の product formula によって調べられる。

Proposition 2 $Ind_{B_H(\mathbf{A})}^{H(\mathbf{A})}(w^{-1} \cdot \chi_s)$ の、K_H 上で恒等的に *1* になっている元を $\phi_{w^{-1}\cdot s}$ と書くことにすると、

$$I_w(\rho(h)f_s) = c_w(s)\rho(h)f_s$$

但しここで、$c_w(s)$ は s についての有理型関数で、$w \in \Omega_H$ が *(*)* の条件のように特徴づけられているときには、

$$\begin{aligned} c_w(s) &= \prod_{l=k+1}^{2n} \frac{\zeta_F(2s-4n+2l-1)}{\zeta_F(2s-4n+2l)} \prod_{l=k+1}^{2n-1} \frac{\zeta_E(2s-4n+2)}{\zeta_E(2s-2n+l)} \\ &\times \prod_{1 \leq l \leq k < m \leq 2n, i_m > i_l} \frac{\zeta_E(2s-4n+l+m-1)}{\zeta_E(2s-4n+l+m)} \end{aligned}$$

ここで ζ_F, ζ_E は体 F, Eの Dedekind ゼータを表わしている。対応する local version の $c_w^{(v)}(s)$ を与える公式については、(一般的な形で)[3],[6] を参照。

分母、分子の cancelling で実際はもうすこし簡単な形に書ける。

Ω_H の longest element w_0 は、$(*)$ の特徴づけでいうと、$k=0, i_l = 2n-l+1$ の場合にあたる。

Lemma 3

$$c_{w_0}(s) = \prod_{l=1}^{2n} \frac{\zeta_F(2s-2l+1)}{\zeta_F(2s-2l+2)} \prod_{l=1}^{n} \frac{\zeta_E(2s-4n+2l)}{\zeta_E(2s-2l+1)}$$

この $c_{w_0}(s)$ の分母にあるゼータすべての積を $d_H(s)$ と書く：

$$d_H(s) := \prod_{l=1}^{2n} \zeta_F(2s-2l+2) \prod_{l=1}^{n} \zeta_E(2s-2l+1)$$

$r \in \{1, \ldots, 2n\}$ に対し、

$$M(r) := \{m \in \mathbb{Z}; k < m \leq 2n, i_m < i_r\}$$

とし、 $\mu(r) = \min(M(r))$ とおく。(ここで、$r \geq i_{2n}$ であれば $M(r) \neq \phi$ であることに注意。)

$d_H(s)$ は、すべての $w \in \Omega_H$ に対する $c_w(s)$ の分母のゼータをすべて払ってくれる ;

Proposition 4 $k \leq n$ ならば、

$$\begin{aligned} d_H(s)c_w(s) &= \prod_{l=1}^{2n-k} \zeta_F(2s-2l+1) \prod_{l=1}^{k} \zeta_E(2s-4n+2k) \prod_{l=k+1}^{n+\left[\frac{i_{2n}+1}{2}\right]-1} \zeta_E(2s-4n+2k) \\ &\quad \times \prod_{l=1}^{n-\left[\frac{i_{2n}}{2}\right]} \zeta_E(2s-2l+1) \prod_{l=i_{2n}}^{k} \zeta_E(2s-4n+l+\mu_l-1) \end{aligned}$$

また $k > n$ ならば、

$$\begin{aligned} d_H(s)c_w(s) &= \prod_{l=1}^{2n-k} \zeta_F(2s-2l+1) \prod_{l=1}^{k} \zeta_E(2s-4n+2k) \\ &\quad \times \prod_{l=2n-k+1}^{n} \zeta_E(2s-2l+1) \prod_{l=1}^{2n-k} \zeta_E(2s-2n-2l+l-i_{2n-l+1}) \end{aligned}$$

ここで,$[\cdot]$ は *Gauss* 記号を表わす。

結局これらにより、

Theorem 5 $f_s \in \mathcal{I}(s)$ ならば、

$$d_H(s) \times E(f_s; h)$$

の極は有限個。もっというと、その極は

$$s = \frac{m}{2} : m = 0, 1, \ldots, 4n$$

のなかにしかなく、関数等式

$$d_H(s)E(f_s; h) = d_H(2n-s)E(f_{2n-s}; h)$$

が成り立つ。

4 局所ゼータ積分の解析接続.

以下、各局所積分の解析接続について考える。次を証明することが目標である。

Theorem 6 各素点 v で、$G(F_v)$ の既約許容表現 π_v を取り、ω_v をその *matrix element* とする。また $f_s^{(v)} \in \mathcal{I}_v(s)$ とする。このとき、

$$\mathcal{Z}_v(f_s^{(v)};\omega_v) := \int_{G(F_v)} f_s^{(v)}\Big(i(g_v,1)\Big)\omega_v(g_v)dg_v$$

は $Re(s) \gg 0$ で絶対収束し、全平面の有理型関数に解析接続される。

特に、v が *non-arch.* のときは、$\mathcal{Z}_v(f_s^{(v)};\omega_v)$ は q_v^{-s} の有理関数になり、v が *arch.* のときは、*((polynomial of s))* $\times$ *((gamma functions))* の形となる。

証明のアウトラインを以下に記す。ごく大雑把にいうと、(v の arch./non-arch. , split / non-split にかかわらず) $\mathcal{Z}_v(f_s^{(v)};\omega_v)$ は最終的に次の形の二重積分に帰着される：ω' は GL_m の matrix element, $\Phi^{(1)},\Phi^{(2)} \in \mathcal{S}(Mat_m)$ として (但し arch.place では polynomial type ([7] or [4]) として)、

$$\int_{GL_m}\int_{GL_m} \Phi^{(1)}(z_1)\Phi^{(2)}(z_2)|det(z_1)|^s|det(z_2)|^s\omega_v(z_1^{-1}z_2)dz_1dz_2$$

この二重積分が、Godement-Jacquet のゼータ積分の積の線型和に書かれることがすぐにわかる。実際、次の補題を用いればよい；

Lemma 7 K_v の *elementary idempotent* β_v をとり、$V_{\pi_v}(\beta_v) := \{\int_K \beta_v(k)\pi_v(k)\varphi_v dk; \varphi_v \in \pi_v\}$ とする。*(これは有限次元。)* $V_{\pi_v}(\beta)$ の *basis* $\{\varphi_{\beta_v}^{(1)},\dots,\varphi_{\beta_v}^{(N)}\}$ をとり、その *dual basis* を $\{\varphi_{\beta_v}^{(1)*},\dots,\varphi_{\beta_v}^{(N)*}$ とする。このとき、任意の $\varphi_v \in \pi_v, \tilde{\varphi}_v \in \tilde{\pi}_v$ に対し、

$$\int_{K_v} \beta_v(k) < \pi_v(g_1kg_2)\varphi_v, \tilde{\varphi}_v > dk = \sum_l < \pi_v(g_2)\varphi_v, \varphi_{\beta_v}^{(l)*} >< \pi_v(g_1)\varphi_{\beta_v}^{(l)}, \tilde{\varphi}_v >$$

例えば

$$\int_{K_v} \beta_v(k)\Phi^{(1)}(kz_1)dk = \Phi^{(1)}(z_1)$$

となるように elementary idempotent β_v を取ってやって、これを代入すればよい。

split case では、直接に上の二重積分に帰着できる。まず $Re(s) >> 0$ において、$\mathcal{S} := \mathcal{S}(Mat_{2n\times 4n})(F_v)$ から $ind_{(P_H)_v}^{H_v}(\delta_s^{(v)})$ への H_v -intertwining map $\Phi_v \mapsto F_{\Phi_v}(\cdot,s)$ を

$$F_{\Phi_v}(h,s) = |det(h)|_v^s \int_{GL_{2n}(F_v)} \Phi_v((0,z)h)|det(z)|_v^{2s}d^\times z$$

で定める。Φ_v として non-arch. では $Mat_{2n\times 4n}(\mathcal{O}_v)$ の特性関数を、arch. では

$$\Phi_v(z) = \begin{cases} \exp\Big(-\pi tr(z\cdot {}^t z)\Big) & (if\ v\ real) \\ \exp\Big(-2\pi tr(z\cdot {}^t \bar{z})\Big) & (if\ v\ complex) \end{cases}$$

をとることにより、$\mathcal{I}_v(s)$ が S の image にはいっていることがわかる。あとは、$f_s^{(v)}\Big(i(g,1)\Big) = F_{\Phi_v}\Big(i(g,1),s\Big)$ を $\mathcal{Z}_v(f_s^{(v)};\omega_v)$ に代入すればよい。

non-split case では、状況は複雑になる。non-arch. のときは、部分表現定理を用いて、適当な r ($1\leq r\leq n$) と、$GL_r(E_v)$ の許容表現τ_v, さらに $U_{n-r,n-r}(E_v/F_v)$ の supercuspidal 表現 τ_v' を取って、$\pi_v \hookrightarrow Ind_{P_v^{(r)}}^{H_v}(\tau_v\otimes\tau_v')$ とできることがわかる。これによって matrix element のところを書き換えて、岩澤分解 $G_v = P_v^{(r)}K_v$ を用いて $\mathcal{Z}_v(f_s^{(v)};\omega_v)$ は次の形になる；

$$\int_{K_v}\int_{K_v}\left\{\int_{U_v^{(r)}}\int_{M_v^{(r)}} f_s^{(v)}\Big(i(um,1)i(k_1,k_2)\Big) \quad <\Big(\tau_v\otimes\tau_v'\Big)(m)\varphi_v(k_1),\varphi_v(k_2)> \times\delta_{P_v^{(r)}}(m)^{-1/2}dudm\right\}dk_1dk_2$$

K_v上での積分は有限和を作るだけであり、問題は結局、

$$\int_{U_v^{(r)}}\int_{GL_r(E_v)}\int_{U_{n-r,n-r}(E_v/F_v)} f_s^{(v)}\Big(i(um_1m_2,1)\Big) \times\omega_1(m_1)\omega_2(m_2)\delta_{P_v^{(r)}}(m_1m_2)^{-1/2}dudm_1dm_2$$

に帰着される。(ω_1,ω_2 はそれぞれτ_v,τ_v' の matrix element.)

Lemma 8 $w_r\in W_H$ を、$X^*(S_H)$ への作用が

$$w_r^{-1} : \begin{cases} \chi_1 \mapsto \chi_1 & \chi_{n+1} \mapsto -\chi_{2r} \\ \quad\vdots & \vdots \\ \chi_r \mapsto \chi_r & \chi_{n+r} \mapsto -\chi_{r+1} \\ \chi_{r+1} \mapsto \chi_{2r+1} & \chi_{n+r+1} \mapsto \chi_{n+r+1} \\ \quad\vdots & \vdots \\ \chi_n \mapsto \chi_{n+r} & \chi_{2n} \mapsto \chi_{2n} \end{cases}$$

できまっているものとすると、

$$i(U^{(r)}\times 1) = \prod_{\alpha<0\&w_r^{-1}\cdot\alpha>0}(N_H)_\alpha$$

これと§.3 の intertwining operator の議論を使って、以下 $f_s^{(v)}\in\mathcal{I}_v(s)$ が $f_s^{(v)} = \rho_v(h_0)\phi_s^{(v)}$ の形であると仮定すれば、

$$\int_{U_v^{(r)}} f_s^{(v)}\Big(i(u,1)h\Big)du = c_{w_r}^{(v)}(s)\times\phi_{w_r^{-1}\cdot s}(w_r^{-1}hh_0)$$

さらにこの$\phi_{w_r^{-1}\cdot s}$が、次のように積分表示できる；

Lemma 9 $1 \leq k \leq 2n$ で、$\Phi_v^{(k)}$を $Mat_{k\times 4n}(\mathcal{O}_{E_v})$ の特性関数とし、

$$F_v^{(k)}(h;s) := \int_{GL_k(E_v)} \Phi_v^{(k)}\Big((\overbrace{0,\ldots,0}^{2n}|z,\underbrace{0,\cdot\cdot,0}_{2n-k})\cdot h\Big)|det(z)|_{E_v}^s d^\times z$$

とする。すると

$$\phi_{w_r^{-1}\cdot s}(h) = \xi_v(s) \times F_v^{(r)}(h;s_1)F_v^{(2r)}(h;s_2)F_v^{(n+r)}(h;s_3)F_v^{(2n)}(h;s_4)$$

$$(s_1 = 2s - 3n + 2r, s_2 = -s + 3n - r, s_3 = -r, s_4 = s)$$

ここで $\xi_v(s)$ は E_v の *local zeta* の積で書かれる s についてのある関数。

$h = w_r^{-1} \cdot i(m_1m_2, 1)$ を代入して変数変換などを繰り返せば、本節のはじめに考えた二重積分と、ω_2 に関する積分とに分解できる。τ_v' の supercuspidality から後者の絶対収束は明らか。(local unitary group の center は anisotropic. したがってω_2 の台はコンパクト.) よって non-split case でも定理は証明できる。

arch.non-split では π_v を主系列表現として実現できるので、次節で述べる不分岐の計算とほぼ同様に扱うことができる。

5 Explicit computations at unramified places.

不分岐素点 vで、$\omega_v^{(0)}$ を π_v に対応する zonal spherical function として、また $d_H^{(v)}(s)$ を §.3 で定義した normalizing factor $d_H(s)$ の v-th factor とするときに、

$$d_H^{(v)}(s) \times \mathcal{Z}_v(\phi_s^{(v)};\omega_v^0)$$

がだいたい $L(s,\pi_v)$ に一致することを示す。(だいたい、というのは Dedekind zeta の local factor ぶんのずれがでてくるので。) split place では容易なので、以下 non-split の場合だけ計算を述べる。

$\pi_v \hookrightarrow Ind_{B_v}^{G_v}(\mu_1,\ldots,\mu_n)$ と仮定。$0 \neq \varphi_v^0 \in \pi_v$ を spherical vector (i.e.,K_v-fixed.), $\tilde{\varphi}_v^0 \in \tilde{\pi}_v$ をやはり spherical vector で、

$$< \varphi_v^0, \tilde{\varphi}_v^0 >= 1$$

となるように取る。

$$\tau_v := Ind_{B_v\cap M_v}^{M_v}(\mu_1,\ldots,\mu_n)$$

とすると、$\pi_v \hookrightarrow Ind_{P_v}^{G_v}(\tau_v)$ と考えることができ、$\varphi_v^0, \tilde{\varphi}_v^0$ をそれぞれ $Ind_{P_v}^{G_v}(\tau_v), Ind_{P_v}^{G_v}(\tilde{\tau}_v)$ の元とみて、

$$\omega_v^0(g) = \int_{K_v} < \varphi_v^0(kg), \tilde{\varphi}_v^0(k) >_{\tau_v} dk$$

と書き直すことができる。ここから、

$$\mathcal{Z}_v(\phi_s^{(v)};\omega_v^0)=\int_{G_v}\int_{K_v}\phi_s^{(v)}\Big(i(g,1)\Big)<\varphi_v^0(kg),\tilde{\varphi}_v^0(k)>_{\tau_v}dkdg$$

変数変換などによって、

$$=\int_{G_v}\phi_s^{(v)}\Big(i(g,1)\Big)<\varphi_v^0(g),\tilde{\varphi}_v^0(1)>_{\tau_v}dkdg$$

つぎに岩澤分解 $G_v=U_vM_vK_v, dg=\delta_{P_v}(m)^{-1}dudmdk$ により、

$$=\int_{U_v}\int_{M_v}\phi_s^{(v)}\Big(i(um,1)\Big)<\tau_v(m)\varphi_v^0(1),\tilde{\varphi}_v^0(1)>_{\tau_v}\delta_{P_v}(m)^{-1/2}dudm$$

Lemma 8 を用いて、($r=n$ の場合にあたる。)

$$c_{w_n}^{(v)}(s)\times\int_{M_v}\phi_{w_n^{-1}\cdot s}^{(v)}\Big(w_n^{-1}i(m,1)\Big)<\tau_v(m)\varphi_v^0(1),\tilde{\varphi}_v^0(1)>_{\tau_v}\delta_{P_v}(m)dm$$

$\phi_{w_n^{-1}\cdot s}^{(v)}(h)$ の積分表示が、次式で与えられる；

$$\phi_{w_n^{-1}\cdot s}^{(v)}(h)=\xi_1(s_1)\xi_2(s_2)F_1(h;s_1)F_2(h;s_2)$$

但し、$s_1=2s-n, s_2=-s+n$ で、また

$$F_1(h;s_1)=\int_{GL_n(E_v)}\Phi_0^{(1)}\Big((0,0|z_1,0)h\Big)|det(z_1)|_{E_v}^{s_1}d^\times z_1$$

$$F_2(h;s_2)=\int_{GL_{2n}(E_v)}\Phi_0^{(2)}\Big((0|z_2)h\Big)|det(Z_2)|_{E_v}^{s_2}d^\times z_2$$

($\Phi_0^{(1)},\Phi_0^{(2)}$ はそれぞれ $Mat_{n\times 4n}(\mathcal{O}_{E_v}),Mat_{2n\times 4n}(\mathcal{O}_{E_v})$ の特性関数.) さらに、

$$\xi_1(s_1)=\prod_{k=1}^{n}\zeta_{E_v}(s_1-k+1),\ \xi_2(s_2)=\prod_{k=1}^{2n}\zeta_{E_v}(s_2-k+1)$$

$w_n\in(K_H)_v$ にも注意して、

$$\phi_{w_n^{-1}\cdot s}^{(v)}\Big(w_n^{-1}i(m,1)\Big)=\phi_{w_n^{-1}\cdot s}^{(v)}\Big(w_n^{-1}i(m,1)w_n\Big)$$

$m=\begin{pmatrix} g & 0\\ 0 & {}^t\bar{g}^{-1}\end{pmatrix}$: $g\in GL_n(E_v)$ と書けば、これは

$$=\xi_1(s_1)\xi_2(s_2)\int_{GL_n(E_v)}\Phi_0^{(1)}\left((z_1,0)\cdot\begin{pmatrix}1_n & {}^t\bar{g}^{-1}\cdot j_n-j_n\\ 0 & j_n{}^t\bar{g}^{-1}\cdot j_n\end{pmatrix}\right)|det(z_1)|_{E_v}^{s_1}d^\times z_1$$

$$\times\int_{GL_{2n}(E_v)}\left(0,z_2\cdot\begin{pmatrix}1_n & {}^t\bar{g}^{-1}\cdot j_n-j_n\\ 0 & j_n{}^t\bar{g}^{-1}\cdot j_n\end{pmatrix}\right)|det(z_2)|_{E_v}^{s_2}d^\times z_2$$

($\Phi_0^{(1)}$ は (2n+1)-列から 4n-列までの、(n×2n)-行列に制限している) と計算され、さらに変数変換などによって、

$$= \xi_1(s_1)\cdot|det(g)|_{E_v}^{s_2}\int_{GL_n(E_v)}\Phi_0(z|z\cdot{}^t\bar{g}^{-1})|det(z)|_{E_v}^{s_1}d^\times z$$

となる。(Φ_0は $Mat_{n\times 2n}(\mathcal{O}_{E_v})$ の特性関数。)

以上により、$\delta_{P_v}(m)=|det(g)|_{E_v}^n$ と合わせて、

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}_v(\phi_s^{(0)};\omega_v^0) &= c_{w_n}^{(v)}(s)\xi_1(s_1)^{-1}\\ &\times\int_{GL_n(E_v)}\int_{GL_n(E_v)}\Phi_0'(z)\Phi_0'(z\cdot{}^t\bar{g}^{-1})|det(z)|_{E_v}^{2s-n}|det(g)|_{E_v}^{-s+n/2}\omega_{\tau_v}^0(g)d^\times z dg\\ &= c_{w_n}^{(v)}(s)\xi_1(2s-n)^{-1}\cdot Z(\Phi_0';s-n/2,\omega_{\tau_v}')Z(\Phi_0';s-n/2,\tilde{\omega}_{\tau_v}')\end{aligned}$$

ここでのΦ_0'は $Mat_n(\mathcal{O}_{E_v})$ の特性関数、$Z(\ )$ は Godement-Jacquet のゼータ積分、ω_{τ_v}は不分岐表現$\tau_v(=Ind_{B_v\cap M_v}^{M_v}(\mu_1, ldots,\mu_n))$ からきまる zonal spherical function on $M_v(=GL_n(E_v))$, ω_{τ_v}'は $g\mapsto\tau(t\bar{g}^{-1})$(やはり不分岐表現になる) からきまる zonal spherical function を表わしている。

[4] での具体的計算から結局、$\pi_v\hookrightarrow Ind_{B_v}^{G_v}(\mu_1,\ldots,\mu_n)$ と仮定すると、

$$\begin{aligned}&d_H^{(v)}(s)\mathcal{Z}_v(\phi_s^{(v)};\omega_v^0)\\ &= d_H^{(v)}(s)c_{w_n}^{(v)}(s)\xi_1(s_1)^{-1}\prod_{k=1}^n L(s-n+\frac{1}{2},\mu_k)L(s-n+\frac{1}{2},\mu_k^{-1})\\ &= d_H^{(v)}(s)c_{w_n}^{(v)}(s)\xi_1(s_1)^{-1}L(s-n+\frac{1}{2},\pi_v)\end{aligned}$$

split unramified place ではより容易な計算から、$\pi_v\hookrightarrow Ind_{B_v}^{G_v}(\mu_1,\ldots,\mu_{2n})$ と仮定すると、

$$d_H^{(v)}(s)\mathcal{Z}_v(\phi_s^{(v)};\omega_v^0)=d_H^{(v)}(s)\xi(s)^{-1}L(s-n+\frac{1}{2})$$

$$(\ \xi(s)=\prod_{k=1}^{2n}\zeta_{F_v}(2s-k+1)\ )$$

となることがわかる。ところで split/non-split ともに出てくる"おつり"の部分を $b_v(s)$ と書くことにする。これを計算すると、

split case

$$d_H^{(v)}(s)=\prod_{k=1}^{2n}\zeta_{F_v}(2s-2k+2)\prod_{k=1}^n\zeta_{F_v}(2s-2k+1)^2$$

なので、

$$\begin{aligned}b_v(s) &= d_H^{(v)}\xi(s)^{-1}\\ &= \ \ldots = \prod_{k=1}^n\zeta_{F_v}(2s-2k+1)\zeta_{F_v}(2s-2n-2k+2)\end{aligned}$$

non-split case

$$c_{w_n}^{(v)}(s) = \prod_{k=1}^{n} \frac{\zeta_{F_v}(2s-2k+1)}{\zeta_{F_v}(2s-2k+2)} \prod_{k=1}^{n-1} \frac{\zeta_{E_v}(2s-2k)}{\zeta_{E_v}(2s-k)}$$

となり、よって、

$$\begin{aligned} b_v(s) &= d_H^{(v)}(s) c_{w_n}^{(v)}(s) \xi_1(s_1)^{-1} \\ &= \ldots = \prod_{k=1}^{n} \zeta_{F_v}(2s-2k+1)\zeta_{F_v}(2s-2n-2k+2) \end{aligned}$$

つまりどちらの場合でも、“おつり”$b_v(s)$ は global zeta の積

$$b(s) = \prod_{k=1}^{n} \zeta_F(2s-2k+1)\zeta_F(2s-2n-2k+2)$$

の v-th factor として揃った形になる。まとめると、

Theorem 10

$$d_H^{(v)}(s)\mathcal{Z}_v(\phi_s^{(v)};\omega_v^0) = b_v(s)L(s-n+\frac{1}{2},\pi_v)$$

但しここで、$b(s) = \prod_{k=1}^{n} \zeta_F(2s-2k+1)\zeta_F(2s-2n-2k+2)$、$b_v(s)$ はその *v-th local factor* としている。

最後に、§.3 の **Prop.4** と較べて、$b(s)$ の各因子は、normalized Eisenstein series $d_H(s)E(f_s;h)$ の constant term に必ず現われることがわかり、(各 $c_w(s)$;$w \in W_H$ を $b(s)$ が割り切る) したがって $L(s,\pi)$ の possible poles をみるときにこのおつりは邪魔にはならないことに注意しておく。

参考文献

[1] A.Borel, Automorphic L-functions, Proc.Symp.Pure Math.vol.33(2) pp.27-61. Amer.Math.Soc.1979.

[2] P.Cartier, Representations of p-adic groups:A survey, Proc.Symp.Pure Math.vol.33(1) Amer.Math.Soc.1979.

[3] W.Casselman, The unramified principal series of p-adic groups.1, Comp.Math. vol.40. 1980. pp.387-406.

[4] R.Godement and H.Jacquet, Zeta functions of simple algebras, Lect.Notes in Math.vol.260 Springer-Verlag. New-York.1972.

[5] S.Gelbart and F.Shahidi, Analytic Properties of Automorphic L-functions, Academic Press. 1988.

[6] S.Helgason, Groups and Geometric Analysis, Academic Press.1985.

[7] H.Jacquet, Principal L-functions of linear groups, Proc.Symp.Pure Math.Vol.33(2) pp.63-86. Amer.Math.Soc.1979.

[8] R.P.Langlands, Euler Products Yale Univ., 1967.

[9] I.Piatetskii-Shapiro and S.Rallis, ε-factors of representations of classical groups, Proc.Nat.Acad.Sci.USA.,vol.83, 1986. pp.4589-4593.

[10] I.Piatetskii-Shapiro and S.Rallis, L-functions for Classical Groups, Lect.Notes in Maht.vol.1254 Springer-Verlag.New-York.1987.