数理解析研究所講究録
909 巻 1995 年 190-200

自明な標準因子をもつ代数曲面のモジュライの超越的な理論の復習

東大数理　織田孝幸　(Takayuki Oda) 述
神戸大自然科学　浜畑芳紀　(Yoshinori Hamahata) 記

§0. はじめに.

以下に続く、吉田正章氏と松本圭司氏の超幾何級数の理論の導入として、K3 曲面の moduli 空間の超越的方法 ($\equiv$ 微分幾何的方法) による構成法を思い出す。

§1. 楕円曲線.

E を $\mathbb{C}$ 上の楕円曲線とする:

$$E : y^2 = x(x-1)(x-\lambda), \qquad \lambda \in \mathbb{C} - \{0,1\}.$$

E は $\infty, 0, 1, \lambda$ で分岐する $\mathbb{P}^1$ の double cover である。E の de Rham cohomology $H^i_{DR}(E/\mathbb{C})$ (定義の仕方は C^∞-, analytic de Rham, algebraic de Rham の 3 通りあり) に対して、次の定理が成立する。

de Rham の定理　$I^i : H^i_{DR}(E/\mathbb{C}) \tilde{\rightarrow} H^i(E,\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$ という同型写像がある。

この定理より、

$$H_1(E,\mathbb{Z}) \times H^1_{DR}(E/\mathbb{C}) \to \mathbb{C},$$
$$([\gamma],[\eta]) \mapsto \int_\gamma \eta$$

は well-defined。α, β を $H_1(E,\mathbb{Z})$ の基底とし、δ, ϵ を $H^1(E,\mathbb{Z})$ の dual な基底とする。$\eta \in H^1_{DR}(E/\mathbb{C})$ に対し、

$$I(\eta) = (\int_\alpha \eta)\delta + (\int_\beta \eta)\epsilon. \tag{1.1}$$

η の共役 $\overline{\eta}$ に対しても

$$I(\overline{\eta}) = (\int_\alpha \overline{\eta})\delta + (\int_\beta \overline{\eta})\epsilon. \tag{1.2}$$

次の図式は可換である (de Rham theorem for intersection):

$$\begin{array}{ccc} H^1(E,\mathbb{C}) \times H^1(E,\mathbb{C}) & \rightarrow & H^2(E,\mathbb{C}) \\ \wr\uparrow I^1 \times I^1 & \circlearrowleft & \wr\uparrow I^2 \\ H^1_{DR}(E/\mathbb{C}) \times H^1_{DR}(E/\mathbb{C}) & \tilde{\rightarrow} & H^2_{DR}(E/\mathbb{C}). \end{array}$$

0でない holomorphic 1-form η に対し、

$$< I^1(\eta), I^1(\overline{\eta}) >= I^2(\eta\wedge\overline{\eta})$$

であり、(1.1), (1.2) により

$$\begin{aligned}< I^1(\eta), I^1(\overline{\eta}) > &= (\int_\alpha \eta\cdot\int_\beta \overline{\eta}) < \delta,\epsilon > -(\int_\beta \eta\cdot\int_\alpha \overline{\eta}) < \delta,\epsilon > \\ &= \eta_1\overline{\eta_2} - \eta_2\overline{\eta_1}\end{aligned}$$

となる。ここに、$\eta_1 = \int_\alpha \eta, \eta_2 = \int_\beta \eta$ とおいた。一方、

$$I^2(\eta\wedge\overline{\eta}) = \int_{E(\mathbb{C})} \eta\wedge\overline{\eta} = -2\pi i\cdot \text{正の数}$$

となるから、

$$\frac{1}{2\pi i}(\eta_1\overline{\eta_2} - \eta_2\overline{\eta_1}) < 0.$$

これを $\eta_1\overline{\eta_1} > 0$ で割って、

$$\frac{1}{2\pi i}\{\overline{(\frac{\eta_2}{\eta_1})} - \frac{\eta_2}{\eta_1}\} < 0.$$

$\tau := \eta_2/\eta_1$ とおけば、$\mathrm{Im}(\tau) > 0$. 今、同型写像

$$\xi : \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z} \tilde{\to} H_1(E,\mathbb{Z}), \quad (1,0)\mapsto\alpha, (0,1)\mapsto\beta$$

を1つ fix する (homology 群の rigidification)。同型写像

$$\Xi : \mathbb{C} \tilde{\to} \Gamma(E,\Omega^1_E), \quad 1\mapsto\omega$$

も1つ fix する。E, $(\alpha,\ \beta), \omega$ を1組として、$(E,(\alpha,\beta),\omega)$ を考える。$(E,(\alpha,\beta),\omega)$ に対して、

$$(\mathbb{C}\times\mathbb{C})_{Riem} := \{(\omega_1,\omega_2)\in\mathbb{C}^2 |\ \frac{1}{2\pi i}(\omega_1\overline{\omega_2} - \overline{\omega_1}\omega_2) < 0\}$$

の元 $(\int_\alpha \omega, \int_\beta \omega)$ が決まった。$\mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\}$ は $(\mathbb{C}\times\mathbb{C})_{Riem}$ へ自然な仕方で作用し、

$$(\mathbb{C}\times\mathbb{C})_{Riem}/\mathbb{C}^* \to \mathfrak{H}, \quad (\omega_1,\omega_2)\mapsto \omega_2/\omega_1$$

という全単射がある。ここに、$\mathfrak{H} = \{\tau\in\mathbb{C} | \mathrm{Im}(\tau) > 0\}$。$H_1(E,\mathbb{Z})$ の基底に関して、

$$\begin{pmatrix}\alpha'\\ \beta'\end{pmatrix} = \gamma\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}, \quad \gamma\in SL_2(\mathbb{Z})$$

であれば、

$$\int_{\beta'}\omega/\int_{\alpha'}\omega = \gamma(\int_\beta\omega/\int_\alpha\omega)$$

となる。したがって、楕円曲線の moduli $SL_2(\mathbb{Z})\backslash\mathfrak{H} = SL_2(\mathbb{Z})\backslash SL_2(\mathbb{R})/SO(2)$ が得られた。

注意. 上の η_1,η_2 は E の period と呼ばれる。η_1,η_2 をそれぞれ $\eta_1(\lambda),\eta_2(\lambda)$ と書けば、$\eta_1(\lambda),\eta_2(\lambda)$ は Gauss の超幾何微分方程式

$$\lambda(1-\lambda)u'' + (1-2\lambda)u' - \frac{1}{4}u = 0 \tag{1.3}$$

の 1 次独立な解である。$\omega = u, \eta = u'$ とおけば、(1.3) は

$$\frac{d}{d\lambda}\begin{pmatrix}\omega\\ \eta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{4\lambda(1-\lambda)} & \frac{2\lambda-1}{\lambda(1-\lambda)}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\omega\\ \eta\end{pmatrix} \tag{1.4}$$

という形に一階化される。これは、Gauss-Manin connection と呼ばれる integrable (または flat) connection を与える方程式を表す。

§2. アーベル曲面.

$\mathbb{C}$ 上の abelian variety A とは、$\mathbb{C}$ 上の連結代数群で完備なものをいう。A の標準因子は自明である。dual complex torus $\hat{A}$ と $\mathrm{Pic}^0(A)$ とを同一視する。A の polarization とは isogeny $A \to \hat{A}$ で、A 上の適当な ample line bundle $\mathcal{L}$ に対して、$a \mapsto t_a^*\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}^{-1}$ と表されるもののことである。ここに、t_a は A 上の a による translation である。$\mathcal{L}$ を A の polarization ともいう。$\mathcal{L}$ の first Chern class $H = c_1(\mathcal{L})$ は positive definite hermitian form である。特に、H が type $(1,\cdots,1)$ のとき、$\mathcal{L}$ は principal と呼ばれる。A と polarization $\mathcal{L}$ との対 $(A,\mathcal{L})$ を polarized abelian variety という。この節では、$\mathbb{C}$ 上の principally polarized abelian surface のみを扱う。

moduli を 2 通りの仕方で構成する。

(1) $H^1(A,\mathbb{C})$ を用いる方法:

$(A,\mathcal{L})$ を principally polarized abelian surface とする。$\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\}$ を $H_1(A,\mathbb{Z})$ の基底、$\{\delta_1,\delta_2,\delta_3,\delta_4\}$ を $H^1(A,\mathbb{Z})$ の dual な基底とする。$\{\alpha_i\},\{\delta_j\}$ を適当にとれば、$c_1(\mathcal{L})$ の代表元 ω を

$$\omega = \delta_1\wedge\delta_3 + \delta_2\wedge\delta_4 \tag{2.1}$$

となるようにとれる。η_1,η_2 を $H^1(A,\mathbb{C})$ の基底とし、

$$\delta_i = \pi_{i1}\eta_1 + \pi_{i2}\eta_2 + \overline{\pi_{i1}\eta_1} + \overline{\pi_{i2}\eta_2} \quad (i=1,2,3,4)$$

と書く。これを (2.1) に代入すると、

$$\begin{aligned}\omega = &\sum_{\alpha,\beta=1,2}(\pi_{1\alpha}\pi_{3\beta} + \pi_{2\alpha}\pi_{4\beta})\eta_\alpha\wedge\eta_\beta \\ &+ \sum_{\alpha,\beta=1,2}(\overline{\pi_{1\alpha}\pi_{3\beta}} + \overline{\pi_{2\alpha}\pi_{4\beta}})\overline{\eta_\alpha}\wedge\overline{\eta_\beta} \\ &+ \sum_{\alpha,\beta=1,2}(\pi_{1\alpha}\overline{\pi_{3\beta}} - \overline{\pi_{1\beta}}\pi_{3\alpha} + \pi_{2\alpha}\overline{\pi_{4\beta}} - \overline{\pi_{2\beta}}\pi_{4\alpha})\eta_\alpha\wedge\overline{\eta_\beta}.\end{aligned}$$

$\omega \in H^{1,1}(A)$ ゆえ、$\Pi = (\pi_{ij}), Q = \begin{pmatrix} 0 & 1_2 \\ -1_2 & 0 \end{pmatrix}$ とおけば、

$$ {}^t\Pi Q \Pi = 0. \tag{2.2} $$

ω は正値だから、

$$ \frac{1}{2i}({}^t\Pi Q\overline{\Pi} - {}^t\Pi^t Q\overline{\Pi}) = \frac{1}{2i}{}^t\Pi Q\overline{\Pi} > 0 \tag{2.3} $$

である。η_i は

$$ \eta_i = \sum_j (\int_{\alpha_j} \eta_i)\delta_j \tag{2.4} $$

と書き表すことができ、$\omega_{ij} = \int_{\alpha_j} \eta_i, \Omega = (\omega_{ij})$ とおくと、

$$ \Omega\Pi = 1_2, \quad \Omega\overline{\Pi} = 0. $$

(2.2), (2.3) より、

$$ \Omega Q^{-1\,t}\Omega = 0, \quad -i\Omega Q^{-1\,t}\overline{\Omega} > 0. $$

A, $\{\alpha_i\}$, $\{\eta_j\}$ を組にして考える。$(A, \{\alpha_i\}, \{\eta_j\})$ に対して、

$$ M(2,4;\mathbb{C})_{Riem} := \{\Omega \in M(2,4;\mathbb{C}) |\ \Omega Q^{-1\,t}\Omega = 0,\ -i\Omega Q^{-1\,t}\overline{\Omega} > 0\} $$

の元 $(\int_{\alpha_j} \eta_i)$ が決まった。$GL_2(\mathbb{C})$ は $M(2,4;\mathbb{C})_{Riem}$ へ $(M, \Omega) \mapsto M\Omega$ によって作用する。$W = \begin{pmatrix} -1_2 & 0 \\ 0 & 1_2 \end{pmatrix}$ とおけば、

$$ M(2,4;\mathbb{C})_{Riem}/GL_2(\mathbb{C}) \to \mathfrak{H}_2, \quad \Omega \mapsto V^{-1}U \qquad (\Omega W^{-1} = (U, V)) $$

という全単射がある (V が正則であることに注意)。ここに、$\mathfrak{H}_2$ は 2 次の Siegel 上半空間である:

$$ \mathfrak{H}_2 = \{Z \in M_2(\mathbb{C}) |\ {}^tZ = Z, \quad \mathrm{Im} Z > 0\}. $$

$H_1(A, \mathbb{Z})$ の自己同型で、Riemann form を fix するもの全体は

$$ Sp_2(\mathbb{Z}) = \{g \in GL_2(\mathbb{Z}) \mid gQ^tg = Q\} $$

である。$H_1(A, \mathbb{Z})$ の基底に関して、

$$ \begin{pmatrix} \alpha_1' \\ \alpha_2' \\ \alpha_3' \\ \alpha_4' \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{pmatrix}, \quad \gamma = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in Sp_2(\mathbb{Z}) $$

とする。$\omega'_{ij} = \int_{\alpha'_j} \eta_i, \Omega' = (\omega'_{ij}) = (U', V')W$ とおけば、${}^t\Omega' = \gamma^t\Omega$ であり、${}^t(U', V') = \gamma^t(U, V)$ となる。よって、

$$\begin{aligned} V'^{-1}U' &= {}^t U'^t V'^{-1} \\ &= (A^tU^tV^{-1} + B)(C^tU^tV^{-1} + D)^{-1} \\ &= (AV^{-1}U + B)(CV^{-1}U + D)^{-1} \\ &= \gamma \cdot V^{-1}U. \end{aligned}$$

以上により、principally polarized abelian surface の moduli

$$Sp_2(\mathbb{Z}) \setminus \mathfrak{H}_2 = Sp_2(\mathbb{Z}) \setminus Sp_2(\mathbb{R})/Sp_2(\mathbb{R}) \cap O_4(\mathbb{R})$$

が得られた。

(2) $H^2(A, \mathbb{C})$ を用いる方法:

(1) の記号を用いる。

$\omega' \in \Gamma(A, \Omega_A^2) - \{0\}$ をとる。$\Gamma(A, \Omega_A^2) \hookrightarrow H^2(A, \mathbb{C})$ と見なして、

$$\omega' = c \cdot \eta_1 \wedge \eta_2, \qquad c \in \mathbb{C}^*$$

と書ける。$\{\delta_i \wedge \delta_j\}_{i<j}$ は $H^2(A, \mathbb{Z})$ の基底である。(2.4) と cohomology の積に関する de Rham の定理 (wedge 積が cup 積にうつる) により、ω' は

$$\begin{aligned} \omega' &= c \cdot \sum_{i,j=1}^{4} (\int_{\alpha_i} \eta_1 \int_{\alpha_j} \eta_2) \delta_i \wedge \delta_j \\ &= c \cdot \sum_{i<j} \Delta_{ij} \delta_i \wedge \delta_j \end{aligned}$$

と表される。ここに、

$$\Delta_{ij} = \begin{vmatrix} \int_{\alpha_i} \eta_1 & \int_{\alpha_j} \eta_1 \\ \int_{\alpha_i} \eta_2 & \int_{\alpha_j} \eta_2 \end{vmatrix}$$

とおいた。つまり、$\Gamma(A, \Omega_A^2)$ は Plücker 座標でパラメトライズされる。ω' は

$$< c_1(\mathcal{L}), \omega' > = < \omega', \omega' > = 0, < \omega', \overline{\omega'} > > 0$$

をみたす。$(A, \{\alpha_i\})$ に対して、

$$\mathcal{D} := \left\{ \omega' = (x_{12} : x_{34} : x_{13} : x_{24} : x_{14} : x_{23}) \in \mathbb{P}^5 \middle| \begin{array}{l} < c_1(\mathcal{L}), \omega' > = < \omega', \omega' > = 0, \\ < \omega', \overline{\omega'} > > 0 \end{array} \right\}$$

の元が決まった。$< c_1(\mathcal{L}), \omega' > = 0$ より、

$$x_{13} + x_{24} = 0. \tag{2.5}$$

$<\omega',\omega'>=0$ より、

$$x_{12}x_{34}-x_{13}x_{24}+x_{14}x_{23}=0. \tag{2.6}$$

(2.5), (2.6) により、

$$\mathcal{D} \quad \subset Q^3 \quad \subset \mathbb{P}^4$$

である。ここに、Q^3 は (2.6) によって定義される $\mathbb{P}^4$ の中の 2 次超曲面であり、$\mathcal{D}$ は Q^3 の開集合である。$H_2(A,\mathbb{Z})$ の自己同型で、$Q, c_1(\mathcal{L})$ を fix するもの全体を $\Gamma_{\mathbb{Q}}$ と書けば、principally polarized abelian surface の moduli $\Gamma_{\mathbb{Q}}\setminus\mathcal{D}$ が得られる。

(1), (2) で構成した moduli に対して

$$\Gamma_{\mathbb{Q}}\setminus\mathcal{D}\simeq Sp_2(\mathbb{Z})\setminus\mathfrak{H}_2$$

であることも知られている。

§3. K3 曲面.

自明な標準因子をもつ複素曲面で first Betti number が 0 なるものを K3 曲面という。X を K3 曲面とする。定義より、

$$H_1(X,\mathbb{Z})=\{0\},\quad H^1_{DR}(X/\mathbb{C})=\{0\}.$$

$H^2(X,\mathbb{Z})$ は rank 22 の自由 $\mathbb{Z}$- 加群であり、同型

$$I^2: H^2_{DR}(X/\mathbb{C})\tilde{\to}H^2(X,\mathbb{Z})\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{C}$$

がある。$H^2(X,\mathbb{C})$ を Hodge 分解すると、$h^{2,0}=h^{0,2}=1, h^{1,1}=20$ となる。X の geometric genus p_g は 1 である。

$H_2(X,\mathbb{Z})$ の基底 $\{\gamma_1,\cdots,\gamma_{22}\}$ をとり、$\{\delta_1,\cdots,\delta_{22}\}$ を $H^2(X,\mathbb{Z})$ の基底で $\{\gamma_1,\cdots,\gamma_{22}\}$ に dual とする。$\omega\in\Gamma(X,\Omega^2_X)-\{0\}$ を $H^2_{DR}(X/\mathbb{C})$ の元とみなすとき、

$$I^2(\omega)=\sum_{i=1}^{22}(\int_{\gamma_i}\omega)\delta_i$$

が成り立つ。$\omega\wedge\omega=0$ である。実際、local に $\omega=f(z_1,z_2)dz_1\wedge dz_2$ と書くと、$\omega\wedge\omega=-f^2dz_1\wedge dz_1\wedge dz_2\wedge dz_2=0$。よって

$$<I^2(\omega),I^2(\omega)>=I^4(\omega\wedge\omega)=0.$$

つまり、$\omega_i=\int_{\gamma_i}\omega$ とおけば、

$$\sum_{i,j=1}^{22}<\delta_i,\delta_j>\omega_i\omega_j=0$$

となる。ここに、<,> は $H^2(X,\mathbb{Z})$ 上の intersection form。$Q = (<\omega_i,\omega_j>)$ とおけば、

$$(\omega_1,\cdots,\omega_{22})Q\begin{pmatrix}\omega_1\\ \vdots\\ \omega_{22}\end{pmatrix}=0.$$

$\overline{\omega}$ を ω の共役とすれば、

$$<I^2(\omega),I^2(\overline{\omega})>=I^4(\omega\wedge\overline{\omega})>0.$$

つまり、

$$(\omega_1,\cdots,\omega_{22})Q\begin{pmatrix}\overline{\omega_1}\\ \vdots\\ \overline{\omega_{22}}\end{pmatrix}>0.$$

この不等式とすぐ上の等式を合わせて、Riemann-Hodge の周期関係と呼ぶ。

X 上の ample line bundle を X の polarization という。$\mathcal{L}$ を X の polarization とする。X と $\mathcal{L}$ との対 $(X,\mathcal{L})$ を polarized K3 surface という。$\mathcal{L}$ は ample だから、$\mathcal{L}$ の first Chern class $c_1(\mathcal{L})$ は $c_1(\mathcal{L})^2>0$ をみたす。$\mathcal{L}=\mathcal{O}(D)$ (D は因子) と表す。$D=\sum_i r_iD_i \quad (r_i\in\mathbb{Q},D_i:$ 正の因子$)$ とすれば、

$$<c_1(\mathcal{L}),I^2(\omega)>=\int_D\omega=\sum_i r_i\int_{D_i}\omega.$$

$\int_{D_i}\omega$ は 0 になる。実際、local に $\omega=f(z_1,z_2)dz_1\wedge dz_2, z_1=h_1(t),z_2=h_2(t)$ と書くと、$\int_{D_i}\omega=\int_t f(z_1(t),z_2(t))h_1'(t)dt\wedge h_2'(t)dt=0$ となる。故に、

$$<c_1(\mathcal{L}),I^2(\omega)>=0.$$

$c_1(\mathcal{L})=(l_1,\cdots,l_{22})=l$ とすると、この式より

$$(l_1,\cdots,l_{22})Q\begin{pmatrix}\omega_1\\ \vdots\\ \omega_{22}\end{pmatrix}=0$$

となる、よって、$\omega\in\Gamma(X,\Omega_X^2)-\{0\}$ に対して、$(\omega_1,\cdots,\omega_{22})$ は、

$$\mathcal{D}_l:=\{\xi=(\xi_1,\cdots,\xi_{22})\in\mathbb{C}^{22}\mid lQ^t\xi=\xi Q^t\xi=0,\xi Q^t\overline{\xi}>0\}$$

の元である。$\mathcal{D}_l$ は、

$$\mathcal{D}_l=SO(2+,19-)/SO(2)\times SO(19)$$

と書き表される。D_l は IV 型対称領域である。$H_2(X,\mathbb{Z})$ の自己同型で、Q,l を fix するもの全体を $\Gamma_{Q,l}$ と書けば、polarized K3 surfaces の moduli

$$\Gamma_{Q,l}\setminus\mathcal{D}_l=\Gamma_{Q,l}\setminus SO(2+,19-)/SO(2)\times SO(19)$$

が得られる。

難しかったのは、polarized K3 surface の同型類の集合から、上の IV 型対称領域の算術的商への周期写像が全射であることを示すことにあった。これは singular K3 surfaces (代数サイクルが最も多くあって、$h^{1,1} = 20$ 次元を尽くしているもの) を詳しく調べる (moduli 空間で dense にある) ことによって Shafarevich と Piatetski- Shapiro によって大部分が証明された。

§4. Kuga-Satake varieties.

polarized K3 surface に対して、Kuga-Satake variety と呼ばれる abelian variety を定義する。そのためにまず、Clifford algebra を定義する。

R は可換環で、2 は R の零因子でないとする。V を階数有限の自由 R- 加群とし、Q を V 上の二次形式とする。$T(V)$ を V 上のテンソル代数とし、$x \otimes x - Q(x) \cdot 1 \quad (x \in V)$ 全体で生成される $T(V)$ の両側イデアルを $I(V)$ とする。$C(V,R) := T(V)/I(V)$ を Clifford algebra という。$C(V,R)$ の自己同型 α で、$\alpha(x) = -x \quad (x \in V)$ となるものが一意的に存在する。

$$C^+(V,R) := \{x \in C(V,R) \mid \alpha(x) = x\}$$

を even Clifford algebra という。

今、$(X, \mathcal{L})$ を polarized K3 surface とする。$c_1(\mathcal{L})$ を $H^2(X,\mathbb{R})$ の元と見なし、$\mathbb{R}c_1(\mathcal{L})$ の $H^2(X,\mathbb{R})$ における直交補空間を M とする。$M_{\mathbb{Z}} = M \cap H^2(X,\mathbb{Z})$ とおく。すると、$C^+(M_{\mathbb{Z}},\mathbb{Z})$ は $C^+(M,\mathbb{R})$ の中の lattice である。$A_X := C^+(M,\mathbb{R})/C^+(M_{\mathbb{Z}},\mathbb{Z})$ とおく。A_X は abelian variety になる。実際、$M \cap (H^{2,0}(X) \oplus H^{0,2}(X))$ の正規直交基底 e_1, e_2 をとり、$e_+ = e_1 \otimes e_2$ とおく。(e_1, e_2) の向き付けを $H^{2,0}(X) = \mathbb{C}(e_1 - ie_2)$ となるようにとる。$x \mapsto e_+ \otimes x$ は $C^+(M,\mathbb{R})$ 上の複素構造を与える。このとき、A_X は complex torus である。$C^+(M,\mathbb{R})$ 上の Riemann form H を

$$H(x,y) = \mathrm{tr}(a \otimes x \otimes \iota(y))$$

と定める。ここに、ι は $C^+(M,\mathbb{R})$ の canonical involution であり、a は $\iota(a) = -a$ なる $C^+(M_{\mathbb{Z}},\mathbb{Z})$ の元である。$H(x, e_+ \otimes y)$ は正値である。

この A_X を Kuga-Satake (abelian) variety という。$C^+(M,\mathbb{R})$ の $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間としての次元は 2^{20} であり、$A_X \cong \mathbb{R}^{2^{20}}/\mathbb{Z}^{2^{20}}$ である。A_X は 2^{19} 次元の非常に大きな variety である。

A_X は principally polarized abelian variety であり、$Sp(2^{19},\mathbb{Z}) \backslash \mathfrak{H}_{2^{19}}$ の点が定まる ($Sp(2^{19},\mathbb{Z}), \mathfrak{H}_{2^{19}}$ は $Sp_2(\mathbb{Z}), \mathfrak{H}_2$ の定義で、2 を 2^{19} に置き換えることによって定義される)。$(X,\mathcal{L})$ に A_X を対応させることで自然な正則写像

$$\Gamma_{Q,l} \backslash \mathcal{D}_l \to Sp(2^{19},\mathbb{Z}) \backslash \mathfrak{H}_{2^{19}}$$

が得られる。$\mathcal{D}_l \hookrightarrow \mathfrak{H}_{2^{19}}$ は、$SO(2+,19-)$ の Spinor 群 $Spin(2,19)$ から $Sp(2^{19},\mathbb{R})$ への even Spinor representation から引き起こされる。

注意. $p_g = 1$ の elliptic surface (homotopy K3 surface) とか abelian surface に対する Kuga-Satake variety も調べられている。homotopy K3 surface については、Morgan and O'Grady [5] を、abelian surface については、Morrison [6] を参照せよ。

§5. ある K3 曲面の **family.**

$l = (l_1, \cdots, l_6)$ を、$\mathbb{P}^2$ の中の一般の位置にある 6 本の直線とする。$S'(l)$ を $\mathbb{P}^2$ の double cover で、l に沿って branch したものとする: $\pi : S'(l) \to \mathbb{P}^2$。$S'(l)$ は 15 個の特異点をもつ:$p_{ij} = l_i \cdot l_j$。$\rho : S(l) \to S'(l)$ を desingularization とする。$S(l)$ は K3 曲面である。

1. H を $\mathbb{P}^2$ の中の直線とし、$\tilde{H} = (\pi \circ \rho)^{-1}(H)$ とする。D_{ij} を p_{ij} から生じる例外曲線とすると、

$$c_1(D_{ij}) \cdot c_1(D_{kl}) = 0 \quad (D_{ij} \neq D_{kl}), c_1(D_{ij})^2 = -1, c_1(\tilde{H})^2 = 2.$$

$L_0 = \mathbb{Z}c_1(\tilde{H}) \oplus_{i<j} \mathbb{Z}c_1(D_{ij})$ とおけば、L_0 は $H^2(S(l), \mathbb{Z})$ の sublattice で signature は $(1+, 15-)$ である (Hodge の index theorem)。L を L_0 の $H^2(S(l), \mathbb{Z})$ の中での直交補空間とすると、L は rank 6 の自由 $\mathbb{Z}$- 加群である。その signature は $(2+, 4-)$ である。L の基底 $\{\gamma'_1, \cdots, \gamma'_6\}$ を適当にとると、intersection form $< \gamma'_i, \gamma'_j >$ の値は行列

$$A = 2\begin{pmatrix} U & 0 & 0 \\ 0 & U & 0 \\ 0 & 0 & -1_2 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

によって与えられる。$\{\gamma_1, \cdots, \gamma_6\} \subset H_2(S(l), \mathbb{Z})$ を $\gamma'_i \cdot \gamma_j = \delta_{ij}$ であるようにとる。$\omega \in \Gamma(S(l), \Omega^2_{S(l)}) - \{0\}$ をとる。$\gamma \in L_0^* = (\oplus_{i=1}^6 \mathbb{Z}\gamma_i)^\perp$ に対して、$\int_\gamma \omega = 0$ となる。よって、ω は

$$\omega = \sum_{i=1}^6 (\int_{\gamma_i} \omega)\gamma'_i$$

と書き表される。$< \omega, \omega >= 0, < \omega, \overline{\omega} >> 0$ より、$S(l)$ に対して、

$$\{z = (z_1, \cdots, z_6) \in \mathbb{C}^6 | \ < z, z >= 0, < z, \bar{z} >> 0\}$$

の元 $(\int_{\gamma_1} \omega, \cdots, \int_{\gamma_6} \omega)$ が決まる。上の集合は 2 つの連結成分からなり、$S(l)$ たちの像はそのうちの 1 つの上にある。これを $\mathcal{D}$ とおけば、$\mathcal{D}$ に $GL_6(\mathbb{Z})$ のある部分群が作用し、$\mathcal{D}$ の自由に作用している部分集合をその部分群で割ったものが、$S(l)$ たちの moduli である。$\mathcal{D}$ を等質空間として書くと、$SO_0(2,4)/K$ である。ここに、$SO_0(2,4)$ は $SO(2,4)$ の単位元の連結成分、K は $SO_0(2,4)$ の maximal compact subgroup である。

2. l がある 1 つの conic F に接しているとして、その接点を $q_j \quad (j = 1, \cdots, 6)$ とする。C を F の double cover で、$q_j \quad (j = 1, \cdots, 6)$ で分岐しているものとする。

C は genus 2 の hyperelliptic curve である。このとき、$S(l)$ は Kummer surface であり、それに対する abelian variety は C の Jacobian $J(C)$ になる。$S(l)$ の Kuga-Satake variety が $J(C)$ のいくつかの積と isogenous であることも知られている。よって、$S(l)$ とその Kuga-Satake variety との間に代数対応があることがわかる。

一般の l については、Paranjape [7] の中で、$S(l)$ とその Kuga-Satake variety との間の代数対応が構成されている。$S(l)$ の Kuga-Satake variety はある 4 次元の abelian variety $A(l)$ のいくつかの積と isogenous である。この abelian variety の family は次の性質をもつ。$A(l)$ は principally polarized abelian variety であり、環準同型

$$\theta : \mathbb{Z}[\sqrt{-1}] \to \mathrm{End}(A(l))$$

があって、$A(l)$ の原点での tangent space を $T(A(l))$ とするとき、θ から induce される環準同型

$$\theta^T : \mathbb{Z}[\sqrt{-1}] \to \mathrm{End}(T(A(l)))$$

が

$$\theta^T(\sqrt{-1}) \sim \begin{pmatrix} \sqrt{-1} & & & \\ & \sqrt{-1} & & \\ & & -\sqrt{-1} & \\ & & & -\sqrt{-1} \end{pmatrix} \qquad (\text{共役})$$

をみたす。$S(l)$ たちの moduli は $\Gamma \setminus SO_0(2,4)/K$ と書ける。ここに、Γ は $SO_0(2,4)$ の arithmetic subgroup である。$A(l)$ たちの moduli も $\Gamma' \setminus SU(2,2)/K'$ という形で書ける。ただし、$K' = S(U(2) \times U(2))$ は $SU(2,2)$ の maximal compact subgroup であり、Γ' は $SU(2,2)$ の arithmetic subgroup である。

$$\Gamma \setminus SO_0(2,4)/K \simeq \Gamma' \setminus SU(2,2)/K'$$

が成立することも知られている。

文献

[1] P.Deligne: La conjecture de Weil pour les surfaces K3, Invent Math.**15**, 206-226, (1972).

[2] P.Griffiths and J.Harris: Principles of Algebraic Geometry, John Wiley & Sons, 1994.

[3] M.Kuga and I.Satake: Abelian varieties attached to polarized K3-surfaces, Math.Ann. **169**, 239-242, (1967).

[4] K.Matsumoto, T.Sasaki and M.Yoshida: The monodromy of the period map of a 4-parameter family of K3 surfaces and the hypergeometric function of type (3,6), Inter.J.Math. **3**, 1-164, (1992).

[5] J.Morgan and K.O'Grady: Differential Topology of Complex Surfaces, Springer Lecture Notes in Math. vol.**1545**, 1993.

[6] D.Morrison: The Kuga-Satake variety of an abelian surface, J.Algebra **92**, 454-476, (1985).

[7] K.Paranjape: Abelian varieties associated to certain K3 surfaces, Compositio Math. **68**, 11-22, (1988).