数理解析研究所講究録
909 巻 1995 年 78-89

Matrix coefficients of the principal series representations of $Sp(2,\mathbb{R})$ as hypergeometric functions of C_2-type

東京大学 数理科学研究科 飯田 正敏 (Masatoshi IIDA)

§ 0. Introduction.

[MO1] において, $Sp(2,\mathbb{R})$ の主系列表現の Whittaker model が求められた. そこで得られた微分方程式系 (rank 8 の holonomic system) は, Casimir operator (の radial part) と Schmid operator によって定義される shift operators であった.

また, 半単純リー群上の両側 K-不変, あるいは両側から K の 1 次元表現に従う球函数が満たす微分方程式系, およびその一般化についてさまざまな研究がある. ([H1], [HO] ,[OO], [Op1], [Op2], [Os], [OS] とそれらの references 参照)

この講演では [MO1] の手法により $Sp(2,\mathbb{R})$ の主系列表現の matrix coefficients (spherical functions) — K の 1 次元表現だけでなく, 2 次元表現に従うものも — が満たす微分方程式系を求め、さらに一般化された主系列表現の matrix coefficients を 2 変数超幾何函数を用いて具体的に求める.

§ 1. Sp(2,$\mathbb{R}$) の放物型部分群.

$G = Sp(2,\mathbb{R})$ とする. G の maximal compact subgroup を $K \simeq U(2)$, そして minimal parabolic subgroup $P = MAN$ と Jacobi parabolic subgroup $P_J = M_JA_JN_J$ を次で定義する.

まず, $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G), \mathfrak{k} = \mathrm{Lie}(K)$ とし, $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ を Cartan 分解, $\mathfrak{p}$ の maximal abelian subspace として $\mathfrak{a} = \{\mathrm{diag}(x, y, -x, -y) | x, y > 0\}$ をとる. この $\mathfrak{a}$ に対して, $A = \exp\mathfrak{a}$, $M = Z_K(\mathfrak{a}) = \{\pm I_2, \pm\gamma_2\}$ (ただし, $\gamma_2 = \mathrm{diag}(1,-1,1,-1)$) と定める. $\mathfrak{a}$ の base $H_1 = \mathrm{diag}(1,0,-1,0), H_2 = \mathrm{diag}(0,1,0,-1)$ の dual base を $e_1, e_2 \in \mathfrak{a}^*$ とすると, restricted root system は$\Delta = \Delta(\mathfrak{g},\mathfrak{a}) = \{\pm 2e_1, \pm 2e_2, \pm(e_1 \pm e_2)\}$ で, その positive system を $\Delta^+ = \Delta^+(\mathfrak{g},\mathfrak{a}) = \{2e_1, 2e_2, e_1 \pm e_2\}$ とする. Δ^+ に対する root space を $\mathfrak{n} = \sum_{\alpha\in\Delta^+} \mathfrak{g}(\alpha,\mathfrak{a})$, $N = \exp\mathfrak{n}$ と定義する.

また, $\mathfrak{a}_J = \mathbb{R}H_1$ なる $\mathfrak{a}$ の subspase をとり, $A_J = \exp\mathfrak{a}_J$,
$M_J = M \cdot \exp\mathbb{R}H_2 \cdot \exp(\mathfrak{g}(2e_2,\mathfrak{a}) \oplus \mathfrak{g}(-2e_2,\mathfrak{a})) \simeq \{\pm 1\} \times SL(2,\mathbb{R})$,
$\mathfrak{n}_J = \sum_{\alpha\in\Delta^+\setminus\{2e_2\}} \mathfrak{g}(\alpha,\mathfrak{a})$, $N_J = \exp\mathfrak{n}_J$ と定義する.

§ 2. Sp(2,$\mathbb{R}$) の表現.

この section では, 以下で扱う二系列の $Sp(2,\mathbb{R})$ の表現を定義する.

定義 (2.1). σ を M の既約ユニタリ表現, $\mu \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$, $\rho = \frac{1}{2}\sum_{\alpha\in\Delta^+} \alpha = 2e_1 + e_2$ とおく. P の表現 $\sigma \otimes a^{\mu+\rho} \otimes 1_N$ からの誘導表現 (π, H_π) を G の主系列表現と呼

ぶ. すなわち,

$$\begin{aligned} H_\pi &= \mathrm{Ind}_P^G(\sigma \otimes a^{\mu+\rho} \otimes 1_N) \\ &= \{f \in C^\infty(G) \mid f(mang) = \sigma(m)a^{\mu+\rho} f(g), \\ &\qquad\qquad \text{for } {}^\forall g \in G, {}^\forall m \in M, {}^\forall a \in A, {}^\forall n \in N\}. \end{aligned}$$

G の作用は $\pi(g)f(x) = f(xg)$ (${}^\forall f \in H_\pi, {}^\forall g \in G$) である.

定義 (2.2). $\sigma_J = (\varepsilon, \xi)$ を $M_J \simeq \{\pm 1\} \times SL(2,\mathbb{R})$ の離散系列表現, $\nu_1 \in \mathfrak{a}_{J,\mathbb{C}}^*$, $\rho_J = \frac{1}{2}\{(e_1 - e_2) + 2e_1 + (e_1 + e_2)\} = 2e_1$ とする. ここで, $\varepsilon \in \widehat{\{\pm 1\}}$ で ξ は $SL(2,\mathbb{R})$ の離散系列表現. P_J の表現 $\sigma_J \otimes a_J^{\nu_1+\rho_J} \otimes 1_{N_J}$ からの誘導表現 (π_J, H_{π_J}) を G の一般化された主系列表現と呼ぶ. すなわち,

$$\begin{aligned} H_{\pi_J} &= \mathrm{Ind}_{P_J}^G(\sigma_J \otimes a_J^{\nu_1+\rho_J} \otimes 1_{N_J}) \\ &= \{f : G \to V_{\sigma_J} \mid f \text{は} C^\infty\text{-class}, \ \ f(m_J a_J n_J g) = \sigma_J(m_J) a_J^{\nu_1+\rho_J} f(g) \\ &\qquad\qquad \text{for } {}^\forall g \in G, \ {}^\forall m_J \in M_J, \ {}^\forall a_J \in A_J, \ {}^\forall n_J \in N_J\}, \end{aligned}$$

G の作用は $\pi_J(g)f(x) = f(xg)$ (${}^\forall f \in H_{\pi_J}, {}^\forall g \in G$) である.

定義 (2.3). K の有限次元既約表現は次の集合で parametrize される.

$$\{\lambda = (l_1, l_2) \in \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \mid l_1 \geq l_2, \ \textit{i.e.}\ \lambda \text{ は } \textit{dominant integral weight}\}.$$

各 λ に対して $d = l_1 - l_2 \geq 0$ とおくと λ に対応する K の既約表現 $(\tau_{(l_1,l_2)}, V_{(l_1,l_2)})$ は $d+1$ 次元表現で, $V_{(l_1,l_2)}$ の *basis* $\{v_k \mid 0 \leq k \leq d\}$ を, 各 v_k が *weight vector*, v_0 は *the lowest weight vector*, v_d は *the highest weight vector* となるように選んでおく.

H_π, H_{π_J} の K-finite vectors を それぞれ $H_{\pi,K}, H_{\pi_J,K}$ と書き, $H_{\pi,K}, H_{\pi_J,K}$ を K-module と見た時に次の命題が成り立つ ([MO1], [MO2]).

命題 (2.4). $\sigma \in \widehat{M}$ として, $\varepsilon_1 = \sigma(-\gamma_2), \varepsilon_2 = \sigma(\gamma_2)$ と書くと次が成り立つ.

(i) $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ の時 (以下, *even case* と呼ぶ), $\varepsilon_1 = (-1)^l$ なる全ての $l \in \mathbb{Z}$ に対して $\tau_{(l,l)}$ は $H_{\pi,K}$ に *multiplicity 1* で現れ, これ以外の 1 次元表現は現れない.

(ii) $\varepsilon_1 = -\varepsilon_2$ の時 (以下, odd case と呼ぶ), ${}^\forall l \in \mathbb{Z}$ に対して $\tau_{(l+1,l)}$ は $H_{\pi,K}$ に multiplicity 1 で現れ, 1 次元表現は現れない.

命題 (2.5). $\sigma_1 = (\varepsilon, \xi_l) \in \widehat{M_1}$ で, ξ_l を $SL(2,\mathbb{R})$ の *Blattner parameter* l $(l \geq 2)$ の *discrete series* とする. また, $\nu_1 \in \mathfrak{a}^*_{J,\mathbb{C}}$ とすると次が成り立つ.

(i) $\varepsilon(-\gamma_2) = (-1)^l$ の時 (以下 *even case* と呼ぶ), $\tau_{(k,k)}(k \in \mathbb{Z}, k \equiv l \mod 2, k \geq l)$ または$\tau_{(l,k)}(k \in \mathbb{Z}, k \equiv l \mod 2, k \leq l)$ は $H_{\pi_J,K}$ に *multiplicity 1* で現れ, これ以外の 1 次元表現は現れない.

(ii) $\varepsilon(-\gamma_2) = (-1)^{l+1}$ の時 (以下 *odd case* と呼ぶ), $\tau_{(k,k-1)}(k \in \mathbb{Z}, k \geq l)$ または $\tau_{(k,l)}(k \in \mathbb{Z}, k \equiv l \mod 2), k \leq l)$ は $H_{\pi_J,K}$ に *multiplicity 1* で現れ, これ以外の 2 次元表現と 1 次元表現は現れない.

§ 3. Spherical functions.

$(\eta, V_\eta), (\tau, V_\tau) \in \widehat{K}$ に対して, 函数空間

$$\begin{aligned} C^\infty_\eta(K\backslash G) = \{f : G \to V_\eta \mid f は C^\infty\text{-class}, \\ f(kg) = \eta(k)f(g), {}^\forall k \in K, {}^\forall g \in G\}, \\ C^\infty_{\eta,\tau}(K\backslash G/K) = \{f : G \to V_\eta \otimes V_{\tau^*} \mid f は C^\infty\text{-class}, \\ f(k_1 g k_2) = \eta(k_1) \otimes \tau^*(k_2)^{-1} f(g), {}^\forall k_1, k_2 \in K, {}^\forall g \in G\} \end{aligned}$$

を定める (V_{τ^*} は V_τ の contragredient 表現). $C^\infty_\eta(K\backslash G)$ を right regular action により G-module と見なし,

$$\mathrm{Hom}_K(V_\tau, C^\infty_\eta(K\backslash G)) \simeq C^\infty_\eta(K\backslash G) \otimes_K V_{\tau^*} \simeq C^\infty_{\eta,\tau}(K\backslash G/K)$$

の元を type (η, τ) の球函数と呼ぶ.

H を admissible $(\mathfrak{g}, K)$-module, V_τ が H に multiplicity 1 で現れるとし, injective K -map を $i : V_\tau \hookrightarrow H$ とする. $\psi \in \mathrm{Hom}_{(\mathfrak{g},K)}(H, C^\infty_\eta(K\backslash G))$ に対して, $\psi \circ i \in \mathrm{Hom}_K(V_\tau, C^\infty_\eta(K\backslash G))$ は type (η, τ) の球函数であり, 以下では H が $H_{\pi,K}, H_{\pi_J,K}$ の時, この函数 $\psi \circ i$ について考察する.

Cartan 分解 $G = KAK$ により, $\phi \in C^\infty_{\eta,\tau}(K\backslash G/K)$ は A 上の制限で決まり, $A \simeq \mathfrak{a} = \mathbb{R}H_1 + \mathbb{R}H_2$ であるから, 以下$\phi(x,y) = \phi(xH_1 + yH_2)$ により ϕ を $\mathbb{R}^2$ 上の函数と思う。また, D を G 上の微分作用素とした時, ${}^\forall\phi \in C^\infty_{\eta,\tau}(K\backslash G/K)$ に対して $(D\phi)|_A = R(D)(\phi|A)$ を満たす A 上の微分作用素 $R(D)$ を D の *radial part* と呼ぶ.

M と Weyl 群の作用を考えることにより, 容易に次の命題が導かれる.

命題 (3.1)(even case). $\eta = (k,k), \tau = (l,l)$(ただし, $(-1)^k = (-1)^l = \varepsilon_1 = \varepsilon_2$) とすると

(i) $\phi(y,x) = \phi(y,x)$,

(ii) $\phi(x,-y)=\begin{cases}\phi(x,y) & \text{for } k-l\equiv 0 \mod 4,\\ -\phi(x,y) & \text{for } k-l\equiv 2 \mod 4.\end{cases}$

命題 (3.2)(odd case). $\eta=(k,k-1),\tau=(l,l-1)$ とし, $C^\infty_{\eta,\tau}(K\backslash G/K)\ni\phi=\sum_{0\le i,j\le 1}\phi_{ij}v_i^\eta\otimes v_j^{\tau^*}$ と書くと

(i) $\begin{cases}\phi_{00}=\phi_{11}\equiv 0 & \text{for } k-l\equiv 0 \mod 2,\\ \phi_{01}=\phi_{10}\equiv 0 & \text{for } k-l\equiv 1 \mod 2.\end{cases}$

(ii) $\begin{cases}\phi_{10}(x,y)=-\phi_{01}(y,x) & \text{for } k-l\equiv 0 \mod 2,\\ \phi_{11}(x,y)=\phi_{00}(y,x) & \text{for } k-l\equiv 1 \mod 2.\end{cases}$

(iii) $\phi(x,-y)=\begin{cases}\phi(x,y) & \text{for } k-l\equiv 0,3 \mod 4,\\ -\phi(x,y) & \text{for } k-l\equiv 1,2 \mod 4.\end{cases}$

§ 4 Casimir operator.

$H_{2e_i}=H_i\ (i=1,2)$, $H_{e_1\pm e_2}=H_1\pm H_2$ に対して $E_\alpha(\alpha\in\Delta^+)$ を $\mathfrak{g}(\mathfrak{a},\alpha)$ の base で, $[E_\alpha,{}^tE_\alpha]=H_\alpha$ を満たすものとすると $Sp(2,\mathbb{R})$ の Casimir operator L は, $L=H_1^2+H_2^2-4H_1-2H_2+2E_{e_1-e_2}E_{-e_1+e_2}+4E_{2e_1}E_{-2e_1}+2E_{e_1+e_2}E_{-e_1-e_2}+4E_{2e_2}E_{-2e_2}$ で与えられる.

補題 (4.1). $a\in A,\alpha\in\Delta^+$ に対して

$$E_\alpha E_{-\alpha}=\frac{1}{(a^\alpha-a^{-\alpha})^2}(\mathrm{Ad}(a^{-1})X_\alpha)^2-\frac{a^\alpha+a^{-\alpha}}{(a^\alpha-a^{-\alpha})^2}(\mathrm{Ad}(a^{-1})X_\alpha)X_\alpha+\frac{a^\alpha}{a^\alpha-a^{-\alpha}}H_\alpha+\frac{1}{(a^\alpha-a^{-\alpha})^2}X_\alpha^2$$

が成り立つ. ただし, $X_\alpha=E_\alpha-{}^tE_\alpha\in\mathfrak{k}$.

$X,Y\in U(\mathfrak{k}),H\in U(\mathfrak{a}),a\in A$ としたとき, $\phi\in C^\infty_{\eta,\tau}(K\backslash G/K)$ に対して

$$\begin{aligned}&(\mathrm{Ad}(a^{-1})X\cdot H\cdot Y\phi)(a)\\ &=\left.\frac{\partial^3}{\partial s\partial t\partial u}\right|_{s=t=u=0}\phi(a\cdot\exp s\,\mathrm{Ad}(a^{-1})X)\exp tH\exp uY)\\ &=\left.\frac{\partial^3}{\partial s\partial t\partial u}\right|_{s=t=u=0}\phi(\exp sX\cdot a\cdot\exp tH\exp uY)\\ &=\left.\frac{\partial^3}{\partial s\partial t\partial u}\right|_{s=t=u=0}\eta(\exp sX)\otimes\tau^*(\exp uY)^{-1}\phi(a\cdot\exp tH)\\ &=\left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{t=0}\eta(X)\otimes(-\tau^*(Y))\phi(a\cdot\exp tH)\end{aligned}$$

であるので, この補題を用いると, L の radial part が求まり, 次のようになる.

命題 (4.2)(even case). $\eta = (k,k), \tau = (l,l)$ の時, L は $C^{\infty}_{\eta,\tau}(K\backslash G/K)$ 上,

$$L\phi = \{L_0 - (k^2+l^2)(\mathrm{sh}^{-2}2x + \mathrm{sh}^{-2}2y) + 2kl(\mathrm{ch}\,2x \cdot \mathrm{sh}^{-2}2x + \mathrm{ch}\,2y \cdot \mathrm{sh}^{-2}2y)\}\phi$$

となる. ただし,

$$L_0 = \partial_x^2 + \partial_y^2 + \{2\coth 2x + \coth(x+y) + \coth(x-y)\}\partial_x + \{2\coth 2y + \coth(x+y) - \coth(x-y)\}\partial_y$$

とおく ($\partial_x = \frac{\partial}{\partial x}, \partial_y = \frac{\partial}{\partial y}$).

命題 (4.3)(odd case). $\eta = (k,k-1), \tau = (l,l-1)$, $k \equiv l \mod 2$ の時, L は $C^{\infty}_{\eta,\tau}(K\backslash G/K)$ 上, 命題 (4.2) の L_0 を用いて

$$\begin{aligned} L\phi = [\{&L_0 - \mathrm{sh}^{-2}(x+y) - \mathrm{sh}^{-2}(x-y) - ((k-1)^2+(l-1)^2)\,\mathrm{sh}^{-2}2x \\ &-(k^2+l^2)\,\mathrm{sh}^{-2}2y + 2(k-1)(l-1)\,\mathrm{ch}\,2x\cdot\mathrm{sh}^{-2}2x \\ &+ 2kl\,\mathrm{ch}\,2y\cdot\mathrm{sh}^{-2}2y\}\phi_{01}(x,y) \\ &-\{\mathrm{ch}(x+y)\cdot\mathrm{sh}^{-2}(x+y) + \mathrm{ch}(x-y)\cdot\mathrm{sh}^{-2}(x-y)\}\phi_{10}(x,y)]v_0^{\eta}\otimes v_1^{\tau^*} \\ +[\{&L_0 - \mathrm{sh}^{-2}(x+y) - \mathrm{sh}^{-2}(x-y) - (k^2+l^2)\,\mathrm{sh}^{-2}2x \\ &-((k-1)^2+(l-1)^2)\,\mathrm{sh}^{-2}2y + 2kl\,\mathrm{ch}\,2x\cdot\mathrm{sh}^{-2}2x \\ &+ 2(k-1)(l-1)\,\mathrm{ch}\,2y\cdot\mathrm{sh}^{-2}2y\}\phi_{10}(x,y) \\ &-\{\mathrm{ch}(x+y)\cdot\mathrm{sh}^{-2}(x+y) + \mathrm{ch}(x-y)\cdot\mathrm{sh}^{-2}(x-y)\}\phi_{01}(x,y)]v_1^{\eta}\otimes v_0^{\tau^*} \end{aligned}$$

となる.

§ 5 Shift oparators.

$\mathfrak{h} \in \mathfrak{g}$ を $\mathfrak{g}$ の compact Cartan subalgebra, $\Sigma_n^+ \subset \Sigma(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{h}_{\mathbb{C}})^+$ を noncompact positive roots とし,$\mathfrak{p}_{\pm} = \sum_{\beta\in\Sigma_n^+} \mathfrak{g}_{\mathbb{C},\pm\beta}$ と定義する. $\mathfrak{p}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{p}_+ \oplus \mathfrak{p}_-$ は Ad による K-module としての既約分解で, $\mathfrak{p}_+ \simeq V_{(2,0)}, \mathfrak{p}_- \simeq V_{(0,-2)}$ である. これらをそれぞれ, $\mathrm{Ad}_{\mathfrak{p}_{\pm}}$ と書くことにする ($\mathrm{Ad}_{\mathfrak{p}_-} \simeq \mathrm{Ad}^*_{\mathfrak{p}_+}$ に注意).

定義 (5.1)(Schmid operator). $\{X_i\}$ を $\mathfrak{p}_{\mathbb{C}}$ の (*Killing form* による) 正規直交基底とする. *Schmid oparator* ∇_τ を

$$\nabla_\tau : C^{\infty}_{\tau}(G/K) \ni \phi \to \sum_i R_{X_i}\phi \otimes X_i \in C^{\infty}_{\tau\otimes\mathrm{Ad}_{\mathfrak{p}_{\mathbb{C}}}}(G/K)$$

で定義する．ここで，$\phi \in C^\infty_\tau(G/K), \mathfrak{g}_{\mathbb{C},\beta} = \mathbb{C}X_\beta, R_X\phi(x) = \frac{d}{dt}|_{t=0} f(x \exp tX)$ とする．この時 ∇ は $\mathfrak{p}_{\mathbb{C}}$ の正規直交基底の取り方によらない．

$\mathbb{C}X_\beta = \mathfrak{g}_{\beta,\mathbb{C}}$ $(\beta \in \Sigma_n^+)$, $X_{-\beta} = \overline{X}_\beta$ とすると，ある定数 $C > 0$ があって $\mathfrak{p}_{\mathbb{C}}$ の直交基底として

$$\{C|\beta|(X_\beta + X_{-\beta}), \frac{C|\beta|}{\sqrt{-1}}(X_\beta - X_{-\beta}) | \beta \in \Sigma_n^+\}$$

がとれる．この基底に対して $\nabla_\tau = 2C(\nabla_\tau^+ + \nabla_\tau^-)$,

$$\nabla_\tau^\pm : C^\infty_\tau(G/K) \ni \phi \to \frac{1}{4} \sum_{\beta \in \Sigma_n^+} |\beta|^2 R_{X_{\pm\beta}}\phi \otimes X_{\mp\beta} \in C^\infty_{\tau \otimes \mathrm{Ad}_{\mathfrak{p}_\pm}}(G/K)$$

と分解することが分かる．

定義 (5.2)(Shift operators for even case). $\tau = (l, l)$ の時，$\tau \otimes \mathrm{Ad}_{\mathfrak{p}_\pm} \otimes \mathrm{Ad}_{\mathfrak{p}_\pm}$ は$\tau_\pm = (l \pm 2, l \pm 2)$ を重複度 1 で既約成分に持つ．そこで，$\mathrm{pr}_e^\pm$ を

$$\mathrm{pr}_e^\pm : C^\infty_{\tau \otimes \mathrm{Ad}_{\mathfrak{p}_\pm} \otimes \mathrm{Ad}_{\mathfrak{p}_\pm}}(G/K) \to C^\infty_{\tau_\pm}(G/K) \quad : \quad \textit{projection}$$

で定め，

$$\begin{cases} D_l^+ = \mathrm{pr}_e^+ \circ \nabla^+_{\tau \otimes \mathrm{Ad}_{\mathfrak{p}_+}} \circ \nabla_\tau^+ : C^\infty_{(l,l)}(G/K) \to C^\infty_{(l+2,l+2)}(G/K) \\ D_l^- = \mathrm{pr}_e^- \circ \nabla^-_{\tau \otimes \mathrm{Ad}_{\mathfrak{p}_-}} \circ \nabla_\tau^- : C^\infty_{(l,l)}(G/K) \to C^\infty_{(l-2,l-2)}(G/K) \end{cases}$$

なる 2 階の微分作用素を *Shift operator* と呼ぶ．

注意 (5.3). $D_{l-2}^+ \circ D_l^-$ は $C^\infty_{(l,l)}(G/K)$ から $C^\infty_{(l,l)}(G/K)$ への写像，特に，$\tau = (l, l)$ として $C^\infty_{\eta,\tau}(K \backslash G/K)$ から $C^\infty_{\eta,\tau}(K \backslash G/K)$ への写像である．

定義 (5.4)(Shift operators for odd case). $\tau = (l, l-1)$ の時，$\tau \otimes \mathrm{Ad}_{\mathfrak{p}_\pm}$ は $\tau_+ = (l+1, l), \tau_- = (l-1, l-2)$ を重複度 1 で既約成分に持つ．そこで，$\mathrm{pr}_o^\pm$ を

$$\mathrm{pr}_o^\pm : C^\infty_{\tau \otimes \mathrm{Ad}_{\mathfrak{p}_\pm}}(G/K) \to C^\infty_{\tau_\pm}(G/K) \quad : \quad \textit{projection}$$

で定め，

$$\begin{cases} E_l^+ = \mathrm{pr}_o^+ \circ \nabla_\tau^+ : C^\infty_{(l,l-1)}(G/K) \to C^\infty_{(l+1,l)}(G/K) \\ E_l^- = \mathrm{pr}_o^- \circ \nabla_\tau^- : C^\infty_{(l,l-1)}(G/K) \to C^\infty_{(l-1,l-2)}(G/K) \end{cases}$$

なる 1 階の微分作用素（を成分に持つ行列）を *Shift operator* と呼ぶ．

注意 (5.5). $E^+_{l-1}\circ E^-_l$ は $C^\infty_{(l,l-1)}(G/K)$ から $C^\infty_{(l,l-1)}(G/K)$ への写像, 特に, $\tau=(l,l-1)$ として $C^\infty_{\eta,\tau}(K\backslash G/K)$ から $C^\infty_{\eta,\tau}(K\backslash G/K)$ への写像である.

以上で定義した Shift operator の radial part は次のようになる.

命題 (5.6)(even case). $\eta=(k,k),\tau=(l,l),\phi\in C^\infty_{\eta,\tau}(K\backslash G/K)$ とした時, $D^\pm_l$ の radial part は次で与えられる.

(i)

$$\begin{aligned}
D^+_l\phi=[&2\partial_x\partial_y+\{-2l\coth 2y+2k\,\mathrm{sh}^{-1}2y+\coth(x+y)-\coth(x-y)\}\partial_x\\
&+\{-2l\coth 2x+2k\,\mathrm{sh}^{-1}2x+\coth(x+y)+\coth(x-y)\}\partial_y\\
&+2(l\coth 2x-k\,\mathrm{sh}^{-1}2x)(l\coth 2y-k\,\mathrm{sh}^{-1}2y)\\
&-(l\coth 2y-k\,\mathrm{sh}^{-1}2y)(\coth(x+y)+\coth(x-y))\\
&-(l\coth 2x-k\,\mathrm{sh}^{-1}2x)(\coth(x+y)-\coth(x-y))]\phi.
\end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned}
D^-_l\phi=[&2\partial_x\partial_y+\{2l\coth 2y-2k\,\mathrm{sh}^{-1}2y+\coth(x+y)-\coth(x-y)\}\partial_x\\
&+\{2l\coth 2x-2k\,\mathrm{sh}^{-1}2x+\coth(x+y)+\coth(x-y)\}\partial_y\\
&+2(l\coth 2x-k\,\mathrm{sh}^{-1}2x)(l\coth 2y-k\,\mathrm{sh}^{-1}2y)\\
&+(l\coth 2y-k\,\mathrm{sh}^{-1}2y)(\coth(x+y)+\coth(x-y))\\
&+(l\coth 2x-k\,\mathrm{sh}^{-1}2x)(\coth(x+y)-\coth(x-y))]\phi.
\end{aligned}$$

命題 (5.7)(odd case). $\eta=(k,k-1),\tau=(l,l-1),\tau_+=(l-1,l-2)$, $(k\equiv l \mod 2),\phi=\phi_{01}v^\eta_0\otimes v^{\tau^*}_1+\phi_{10}v^\eta_1\otimes v^{\tau^*}_0\in C^\infty_{\eta,\tau}(K\backslash G/K),\phi^+=\phi^+_{00}v^\eta_0\otimes v^{\tau^*_+}_0+\phi^+_{11}v^\eta_1\otimes v^{\tau^*_+}_1\in C^\infty_{\eta,\tau_+}(K\backslash G/K)$ とした時, E^+_{l-1},E^-_l の radial part は次で与えられる.

(i)

$$\begin{aligned}
E^+_{l-1}\phi^+=[&\{\partial_y-(l-2)\coth 2y+k\,\mathrm{sh}^{-1}2y\\
&\quad+\frac{1}{2}(\coth(x+y)-\coth(x-y))\}\phi^+_{00}\\
&\quad+\frac{1}{2}(\mathrm{sh}^{-1}(x+y)+\mathrm{sh}^{-1}(x-y))\phi^+_{11}]v^\eta_0\otimes v^{\tau^*}_1\\
+[&-\{\partial_x-(l-2)\coth 2x+k\,\mathrm{sh}^{-1}2x\\
&\quad+\frac{1}{2}(\coth(x+y)+\coth(x-y))\}\phi^+_{11}\\
&\quad-\frac{1}{2}(\mathrm{sh}^{-1}(x+y)-\mathrm{sh}^{-1}(x-y))\phi^+_{00}]v^\eta_1\otimes v^{\tau^*}_0.
\end{aligned}$$

(ii)

$$E_l^-\phi = [-\{\partial_y + l\coth 2y - k\,\mathrm{sh}^{-1}2y + \frac{1}{2}(\coth(x+y) - \coth(x-y))\}\phi_{01}$$
$$-\frac{1}{2}(\mathrm{sh}^{-1}(x+y) - \mathrm{sh}^{-1}(x-y))\phi_{10}]v_0^\eta \otimes v_0^{\tau_+^*}$$
$$+[\{\partial_x + l\coth 2x - k\,\mathrm{sh}^{-1}2x + \frac{1}{2}(\coth(x+y) + \coth(x-y))\}\phi_{10}$$
$$+\frac{1}{2}(\mathrm{sh}^{-1}(x+y) + \mathrm{sh}^{-1}(x-y))\phi_{01}]v_1^\eta \otimes v_1^{\tau_+^*}.$$

§ 6 球函数の満たす微分方程式.

以上の準備のもとで, この section では球函数が満たす微分方程式を求める.

H_π の球函数については, Casimir operator L は $H_\pi = \mathrm{Ind}_P^G(\sigma \otimes a^{(\mu+\rho)} \otimes 1_N)$ $(\mu = (\mu_1, \mu_2))$ 上 infinitesimal character $\mu_1^2 + \mu_2^2 - 5$ で作用するので, $\phi \in C_{\eta,\tau}^\infty(K\backslash G/K)$ に対しても$\mu_1^2 + \mu_2^2 - 5$ 倍で作用する.

一方, $C_{\eta,\tau}^\infty(K\backslash G/K) \simeq \mathrm{Hom}_K(V_\tau, C_\eta^\infty(K\backslash G))$ と H_π において τ は multiplicity 1(命題 (2.4)) であることから, $D_{l-2}^+ \circ D_l^-, E_{l-1}^+ \circ E_l^-$ も$\phi \in C_{\eta,\tau}^\infty(K\backslash G/K)$ に対して scalar で作用する. この scalar 値は K-type V_τ を具体的に $C^\infty(K)$ に実現して shift operator を実際に作用させることで得られる.

従って次の定理が得られた.

定理 (6.1)(even case). $\eta = (k,k), \tau = (l,l)\,(k \equiv l \mod 2)$ の時, H_π の球函数 $\phi \in C_{\eta,\tau}^\infty(K\backslash G/K)$ が満たす微分方程式は

(i) $L\phi = (\mu_1^2 + \mu_2^2 - 5)\phi$,

(ii) $D_{l-2}^+ \circ D_l^-\phi = 4\{\mu_1^2 - (l-1)^2\}\{\mu_2^2 - (l-1)^2\}\phi$.

定理 (6.2)(odd case). $\eta = (k,k-1), \tau = (l,l-1)\,(k \equiv l \mod 2)$ の時, H_π の球函数 $\phi \in C_{\eta,\tau}^\infty(K\backslash G/K)$ が満たす微分方程式は

(i) $L\phi = (\mu_1^2 + \mu_2^2 - 5)\phi$,

(ii) $E_{l-1}^+ \circ E_l^-\phi = \begin{cases} -\{\mu_1^2 - (l-1)^2\}\phi & \textit{if} \quad l : \textit{odd} \\ -\{\mu_2^2 - (l-1)^2\}\phi & \textit{if} \quad l : \textit{even} \end{cases}$

H_{π_J} 表現の球函数については, Casimir operator L は $H_{\pi_J} = \mathrm{Ind}_{P_J}^G(\sigma_J \otimes a_J^{\nu_1+\rho_J} \otimes 1_{N_J})$ 上, infinitesimal character $\nu_1^2 + (l-1)^2 - 5$ で作用するので, $\phi \in C_{\eta,\tau}^\infty(K\backslash G/K)$ に対しても $\nu_1^2 + (l-1)^2 - 5$ 倍で作用する.

一方, even case では, D_l^- は $C_{(l,l)}^\infty(G/K)$ から $C_{(l-2,l-2)}^\infty(G/K)$ への map であったが, 命題 2.5 より K-type $V_{(l-2,l-2)}$ は H_{π_J} に現れないので, H_{π_J} の球函

数は D_l^- の kernel に属する．また，odd case では，E_l^- は $C^\infty_{(l,l-1)}(G/K)$ から $C^\infty_{(l-1,l-2)}(G/K)$ への map であったが，命題 2.5 より K-type $V_{(l-1,l-2)}$ は H_{π_J} に現れないので，H_{π_J} の球函数は E_l^- の kernel に属する．

従って次の定理が得られた．

定理 (6.3)(even case). $\eta=(k,k), \tau=(l,l)\,(k\equiv l \mod 2)$ の時，H_{π_J} の球函数$\phi\in C^\infty_{\eta,\tau}(K\backslash G/K)$ が満たす微分方程式は

(i) $L\phi=\{\nu_1^2+(l-1)^2-5\}\phi$,

(ii) $D_l^-\phi=0$.

定理 (6.4)(odd case). $\eta=(k,k-1), \tau=(l,l-1)\,(k\equiv l \mod 2)$ の時，H_{π_J} の球函数 $\phi\in C^\infty_{\eta,\tau}(K\backslash G/K)$ が満たす微分方程式は

(i) $L\phi=\{\nu_1^2+(l-1)^2-5\}\phi$,

(ii) $E_l^-=0$.

注意 (6.5).

(i) $k=l=0$ の時，定理 (6.1) と 定理 (6.3) の微分方程式系は [*DG*1], [*DG*2] において *root multiplicity* を一般の *parameter* にして抽象的に（リーマン対称空間 G/K を持ち出さず）定義され，定理 (6.1) についてはその多項式解が [*DG*2] で，定理 (6.3) については一般の *analytic* 解が [*DG*1] で得られている．

(ii) $k=l=0$ の時，定理 (6.1) の微分方程式系は B_2 型 *Weyl* 群不変な微分作用素系の一系列として，また 定理 (6.3) の微分方程式系がその可約系（ *parameter* が [*DG*1], [*DG*2] よりも，もっと多い形で）として [*OO*] で定義された．

§ 7 H_{π_J} の球函数.

この section では，定理 (6.3), (6.4) で得られた微分方程式の解を求める．まず，$\delta(x,y;k,l)=(\operatorname{ch}x\cdot\operatorname{ch}y)^{\frac{k+l}{2}}(\operatorname{sh}x\cdot\operatorname{sh}y)^{-\frac{k-l}{2}}$ なる函数で微分方程式をねじった（ $k=l=0$ の場合に帰着することになる）後，変数変換して見やすい形にする．even case の Casimir operator の $k=l=0$ の場合へ帰着については [H2], [Sh] で示されている．

命題 (7.1)(even case). $\phi\in C^\infty_{\eta,\tau}(K\backslash G/K)$ が 定理 (6.3) (i),(ii) を満たすとき，$\psi(x,y)=\delta(x,y;k,l)\phi(x,y)$ が満たす微分方程式を $x_1=-\operatorname{sh}^2x, x_2=-\operatorname{sh}^2y$ と変数変換すると ($\partial_{x_i}=\frac{\partial}{\partial x_i}$ として)

(i)
$$\Big[\sum_{i=1}^{2}x_i(x_i-1)\partial_{x_i}^2+\{(2-l)x_1-1-\frac{k-l}{2}+\frac{x_1(x_1-1)}{x_1-x_2}\}\partial_{x_1}$$
$$+\{(2-l)x_2-1-\frac{k-l}{2}-\frac{x_2(x_2-1)}{x_1-x_2}\}\partial_{x_2}-\frac{1}{4}(\nu_1^2-(l-2)^2)\Big]\psi=0,$$

(ii) $[\partial_{x_1}\partial_{x_2} - \frac{1}{2}\frac{1}{x_1-x_2}\partial_{x_1} + \frac{1}{2}\frac{1}{x_1-x_2}\partial_{x_2}]\psi = 0.$

命題 (7.2)(odd case). $\phi = \phi_{01}v_0^{\eta}\otimes v_1^{\tau^*} + \phi_{10}v_1^{\eta}\otimes v_0^{\tau^*} \in C^{\infty}_{\eta,\tau}(K\backslash G/K)$ が 定理 (6.4) (i),(ii) を満たすとき, $\psi_{01}(x,y) = \delta(x,y;k,l)\cdot(\operatorname{ch} x)^{-1}\psi_{01}(x,y), \psi_{10}(x,y) = \delta(x,y;k,l)\cdot(\operatorname{ch} y)^{-1}\psi_{10}(x,y)$ が満たす微分方程式を $x_1 = -\operatorname{sh}^2 x, x_2 = -\operatorname{sh}^2 y$ と変数変換し, $\psi_{10}(y,x) = -\psi_{01}(x,y)$ を用いると

(i)
$$[\sum_{i=1}^{2} x_i(x_i-1)\partial_{x_i}^2 + \{(2-l)x_1 - 1 - \frac{k-l}{2} + \frac{x_1(x_1-1)}{x_1-x_2}\}\partial_{x_1}$$
$$+\{-lx_2 - \frac{k-l}{2} - 3\frac{x_2(x_2-1)}{x_1-x_2}\}\partial_{x_2} - \frac{1}{4}\{\nu_1^2 - (l-1)^2 - 2\}]\psi_{01} = 0,$$

(ii) $[\partial_{x_1}\partial_{x_2} - \frac{1}{2}\frac{1}{x_1-x_2}\partial_{x_1} + \frac{3}{2}\frac{1}{x_1-x_2}\partial_{x_2}]\psi_{01} = 0.$

[DG1] で用いられたのと同様の方法で 定理 (7.2)(i),(ii) の解も調べることができる. 鍵となるのは次の補題である ($B_1 = B_2$ の時, [DG1]).

補題 (7.3). $B_1, B_2 > 0$ の時, (x_1, x_2) の近傍で *analytic* 函数 f で

$$[\partial_{x_1}\partial_{x_2} - B_2\frac{1}{x_1-x_2}\partial_{x_1} + B_1\frac{1}{x_1-x_2}\partial_{x_2}]f = 0$$

を満たすものは次の形の級数展開と積分表示を持つ.

(i) $f(x_1,x_2) = \sum_{m_i\geq 0}\frac{(B_1)_{m_1}(B_2)_{m_2}\xi(m_1+m_2)}{m_1!m_2!}x_1^{m_1}x_2^{m_2}$

ただし, $(\lambda)_k = \frac{\Gamma(\lambda+k)}{\Gamma(\lambda)}$, ξ は任意函数.

(ii) $f(x_1,x_2) = \int_0^1 F(tx_1+(1-t)x_2)t^{B_1-1}(1-t)^{B_2-1}dt$

ただし, F は原点の近傍で *analytic* な任意函数.

(iii) (i) と (ii) の 2 式が一致するとき,

$$F(s) = \frac{\Gamma(B_1+B_2)}{\Gamma(B_1)\Gamma(B_2)}\sum_{n\geq 0}\frac{(B_1+B_2)_k\xi(k)}{k!}s^k$$

が成立.

この補題を用いて以下の定理が証明できる.

定理 (7.4)(even case).

(i) 定理 (7.1) (i),(ii) の $(x_1, x_2) = (0,0)$ の近傍で *analytic* な解の級数展開は次で与えられる.

$$\psi(x_1,x_2) = \sum_{m_i \geq 0} \frac{(\frac{1}{2})_{m_1}(\frac{1}{2})_{m_2}(-\mu_+)_{m_1+m_2}(-\mu_-)_{m_1+m_2}}{m_1!m_2!(1)_{m_1+m_2}(\frac{3+k-l}{2})_{m_1+m_2}} x_1^{m_1} x_2^{m_2}$$

ただし, $\mu_\pm = \frac{1}{2}(l - 2 \pm \nu_1)$.

(ii) 定理 (7.1) (i),(ii) の $(x_1, x_2) = (0,0)$ の近傍で analytic な解の積分表示は次で与えられる.

$$\psi(x_1,x_2) = \int_0^1 {}_2F_1(a, b; \frac{3+k-l}{2}; tx_1 + (1-t)x_2) t^{-\frac{1}{2}}(1-t)^{-\frac{1}{2}} dt$$

ただし, $a+b = 2-l, ab = \frac{1}{4}(\nu_1^2 - (l-2)^2), {}_2F_1$ は原点の近傍で analytic な Gauss の超幾何函数.

注意 (7.5). 上で与えた解は, $\nu_1 = \pm l$ のとき $-\mu_\mp = 1$ となって, Lauricella の超幾何函数 $F_D(-l, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3+k-l}{2}; x_1, x_2)$ となる.

定理 (7.6)(odd case).

(i) 定理 (7.2) (i),(ii) の $(x_1, x_2) = (0,0)$ の近傍で *analytic* な解の級数展開は次で与えられる

$$\psi_{01}(x_1,x_2) = \sum_{m_i \geq 0} \frac{(\frac{3}{2})_{m_1}(\frac{1}{2})_{m_2}(-\mu_+)_{m_1+m_2}(-\mu_-)_{m_1+m_2}}{m_1!m_2!(2)_{m_1+m_2}(\frac{3+k-l}{2})_{m_1+m_2}} x_1^{m_1} x_2^{m_2}.$$

ただし, $\mu_\pm = \frac{1}{2}(l - 2 \pm \sqrt{\nu_1^2 - 2l + 1})$.

(ii) 定理 (7.2) (i),(ii) の $(x_1, x_2) = (0,0)$ の近傍で analytic な解の積分表示は次で与えられる.

$$\psi_{01}(x_1,x_2) = \int_0^1 {}_2F_1(a, b; \frac{3+k-l}{2}; tx_1 + (1-t)x_2) t^{\frac{1}{2}}(1-t)^{-\frac{1}{2}} dt$$

ただし, $a+b = 2-l, ab = \frac{1}{4}(\nu_1^2 - (l+1)^2 - 2), {}_2F_1$ は原点の近傍で analytic な Gauss の超幾何函数.

注意 (7.7). 上で与えた解は, $\nu_1 = \pm\sqrt{l^2 + 6l + 3}$ のとき $-\mu_+$ または$-\mu_- = 2$ となって, Lauricella の超幾何函数 $F_D(-l, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3+k-l}{2}; x_1, x_2)$ となる.

References

[DG1] A. Debiard and B. Gaveau, *Représentation intégrale de certaines séries de fonctions sphériques d'un système de racines BC*, J. Funct. Anal. **96** (1991), 256–296.

[DG2] ———, *Integral Formulas for the Spherical Polynomials of a Root System of Type* BC_2, J. Funct. Anal. **119** (1994), 401–454.

[H1] G. J. Heckman, *Root system and hypergeometric functions II*, Comp. Math. **64** (1987), 353–373.

[H2] ———, *Lectures on hypergeometric and spherical functions*, preprint (1992).

[HO] G. J. Heckman and E. M. Opdam, *Root system and hypergeometric functions I*, Comp. Math. **64** (1987), 329–352.

[Kn] A. W. Knapp, *Representation Theory of Semisimple Groups An Overview Based on Examples*, Princeton Mathematical Series (1986), Princeton Univ. Press.

[Ko] T. H. Koornwinder, *Orthogonal polynominals in two variables which are eigenfunctions of two algebraically independent partial differential operators. I,II,III,IV*, Indagationes Mathematicae **36** (1974), 48–58, 59–66, 357–369, 370–381.

[MO1] T. Miyazaki and T. Oda, *Principal series Whittaker functions on* $Sp(2,\mathbb{R})$ *–Explicit formulae of differential equations–*, Proceedings of the 1993 Workshop, Automorphic Forms and Related Topics, The Pyungsan Institute for mathematical sciences.

[MO2] ———, *Principal series Whittaker functions on* $Sp(2,\mathbb{R})$ *II*, Preprint (1994).

[OO] H. Ochiai and T. Oshima, *Commuting differential operators of type* B_2, preprint (1994).

[Op1] E. M. Opdam, *Root system and hypergeometric functions III*, Comp. Math. **67** (1988), 21–49.

[Op2] ———, *Root system and hypergeometric functions IV*, Comp. Math. **67** (1988), 191–209.

[Os] T. Oshima, *Completely integrable systems with a symmetry in coordinates*, preprint (1994).

[OS] T. Oshima and H. Sekiguchi, *Commuting families of differential operators invariant under the action of a Weyl group*, preprint (1993).

[Sc] W. Schmid, *On the realization of the discrete series of a semisimple Lie group*, Rice Univ. Studies **56** (1970), 99–108.

[Sh] N. Shimeno, *The Plancherel formula for spherical functions with a one-dimensional* K*-type on a simply connected simple Lie group of Hermitian type*, J. Funct. Anal. **121** (1994), 330–388.