数理解析研究所講究録
912巻 1995年 43-46

数学基礎論入門－紹介シリーズ刊行計画について

河合文教研　倉田令二朗　(Reijiro Kurata)

① 発端「1995.11月に行なわれる現代数学史研究集会(於津田塾大)において『数学基礎論における20世紀の総括と21世紀への展望』を報告せよ」との要請が杉浦光夫先生からあった(94,8月)。

② 共同 名大－豊田－東北大その他のグループで上記テーマについて共同討議を深めつつ、数学基礎論全般に関する入門、先端紹介シリーズを共同製作しようとの合意が次第に形成された。

そこでまず数人が原稿を作成しはじめることを決意、(後述)その際20世紀の総括なるものを純粋に客観的に画くことは不可能でどうしても執筆者の現代的関心によって偏向を受けることは不可避である以上、むしろ積極的に現代的関心を表に出して自由に書くことを旨とし、用語、記号の統一、重複を避けるための制限は最小限にすることを申し合わせた。

注) 私の属する名大－豊田グループの現代的関心はP=NP問題をはじめとする算術内Separationの問題である。

③ 古典の成立　数学基礎論における古典といわれるべきものはいつごろ誰によって、いかにして形成されたか　倉田個人としては基礎論全般の入門部

分を書く立場上 明確にしておく必要があるが暫定的に次の流れを想定した。Post (1921), Löwenheim (1915), Skolem (1920, 22), Gödel (1930), Herbrand (1930), Gödel (1931) Tarski (1932), Gentzen (1935), Gödel (1938)

注1) Post (1921) とは命題論理計算に関すること

Löwenheim (1915) Skolem (1920) は Löwenheim Skolem の定理

Skolem (1922) とは

$A \equiv \forall x_1 \exists y_1 \forall x_2 \forall x_3 \exists y_2 B(x_1, y_1, x_2, x_3, y_2)$; B は quantifier free に対し

Skolem form を $\tilde{A} = B(a_1, f_1(a_1), a_2, a_3, f_2(a_1, a_2, a_3))$ とする（f_1, f_2 は新関数記号）

Herbrand Universe を $H_0 = \{c\}$（c は定数記号），$H_{p+1} = \{f_1(t_1), f_2(t_1, t_2, t_3) \mid t_1, t_2, t_3 \in H_p\}$

$H = \bigcup_{p=0}^{\infty} H_p$ とおくとき

$\tilde{A}$ が H 上 satisfiable $\Longleftrightarrow \forall p(\tilde{A}$ は H_p 上 satisfiable$)$

であるということ これから完全性定理が出る

Gödel (1930) とは完全性定理のこと

Gödel (1931) とは不完全性定理のこと

Tarski (1932) とは Truth definition のこと

Gentzen (1935) とは Gentzen の基本定理のこと

Gödel (1938) とは V=L AC, GCH の ZF に対する相対無矛盾性のこと

注2) 1936〜43 の Kleene 等による general recursive function theory を古典に加えるのに異議はない。ただ私の書く入門部分においては主として Primitive Recursive function, Predicate とし、詳細は篠田氏にお願いするという趣旨である。

④ その後の発展

Non standard model (60年初) Cohen (1963), Matiyasevič (1970) Cook (1975)

Paris Harington (1977), Buss (1986), Ajtai (1988).

(集合論にくわしい人なら当然 Martin Steel, Woodin 等を加えるだろう)

Cohen の AC, GCH の ZF からの独立性の証明は問題の真偽決定による決着のつけ方以外の(しかも未来に開かれた)決着のつけ方を教え、

また Matiyasevič の結果は(Diophantine equation の整数解の存在を決定するアルゴリズムを求めよとの問いに対する)解答なし(アルゴリズムは存在しない)とする決着のつけ方を教えたがその背景には Church の Thesis が横たわっている。

Non standard method は応用数学をふくむ数学全般に影響を与えた。

Computer Science との関連では元来密接な関係にある recursion theory に大きな変化をもたらしたのみならず Computer Science の基礎論ともいうべき Bounded Arithmetic の形成を通じて証明論的にもモデル論的にも研究されるようになった。

すなわち数学基礎論は他分野との関連を一段と深めると同時にさまざまな問題に対する決着のつけ方の新しい方法を提供することによって数学全体として無視することのできな

い部門へと変ぼうした。

注) Cook(1975)とは L_{sat} が NP-complete であること、すなわち $\forall L \in NP (L \leq^p_m L_{sat})$

i.e. $\exists f \in PTC (x \in L \Longleftrightarrow f(x) \in L_{sat})$ を証明したこと。これから

$P=NP \Longleftrightarrow L_{prov} \in P$, $NP=co\text{-}NP \Longleftrightarrow L_{prov} \in NP$ が出る

現状と予定

⑤ 入門数学基礎論(倉田)

証明論入門, Skolemの定理と完全性定理, 原始帰納関数と述語,

不完全性定理, 公理論的集合論 (3月末現在ほぼ終了)

⑥ $\boxed{\text{予定}}$

倉田「Pigeon Hole Principle をめぐる話題」

田中一之他「不完全性定理と逆数学」

篠田寿一「帰納的関数と述語」

坪井明人「モデルの理論(題未定)」

中村徹 「ファインマン径路積分—ノンスタンダードの応用—」

[後記] こうしたことを研究集会で発表することは異例のことであるが構想と関する御批判、御意見に対する期待と「ここは自分にまかせろ」という御仁の出現への期待もあって発表させていただいた。