数理解析研究所講究録
913巻 1995年 68-81

Ginzburg-Landau equation and stable solutions in a nontrivial domain

神保 秀一 (北大理学部)
Jian Zhai (北大理学部)
森田 善久 (龍大理工学部)

本稿では次の形の Ginzburg-Landau (GL) 方程式を考える.

$$
\text{(1.1)} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \Phi}{\partial t} = \Delta\Phi + \lambda(1-|\Phi|^2)\Phi \quad \text{in} \quad (0,\infty)\times\Omega, \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial \nu} = 0 \quad \text{on} \quad (0,\infty)\times\partial\Omega \quad (\Phi : \mathbb{C}-\text{valued}), \end{cases}
$$

但し, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ は C^3 境界をもつ有界領域, $\lambda > 0$ はパラメータである. 低温超伝導現象のモデルとして導入されたGL方程式は外場がないときは電子の状態 Φ と磁場のベクトルポテンシャル A を未知関数とする方程式であるが, 電流が作る磁場が自身に与える効果を無視したモデルの1つである (1.1) の形も同様に重要である. 解 Φ が複素数値関数であることが肝要で, その Phase によって現象の波動性を取り込んでいる. (1.1) を実数値関数で考えた場合の研究は多くあり, 様々な重要な結果が得られているが, ここでの場合は複素数値であることにより, 定常解の構造が実数値の場合と比べて本質的に異なる. ここで考えたい問題は方程式 (1.1) の定常解の領域依存性である. とくに, 安定な非自明定常解が存在するかを考えたい. これは物理的には超伝導体の位相的あるいは幾何的な形状によって現象的な差が現れるか?といったことに対応している. Jimbo and Morita [15] において Ω が凸領域ならば非自明な安定解は存在しないことが示されている. これにより求める定常解をえるには多少なりとも複雑な領域を考えねばならないことがわかる. ここでは, ある意味で位相的に non-trivial ならば (1.1) が non-constant な安定定常解をもつことを示したいと思う.

§2. 主要結果

[16] において Ω がドーナツ型領域の場合, 大きい $\lambda > 0$ に対し non-constant な安定解が存在することを示したのであるが, ここでは, もっと一般の次の領域を扱うことにする. 領域 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ に対し次の条件を考える.

(A) 連続写像 $\theta_0 : \overline{\Omega} \longrightarrow S^1$ で定値写像にホモトープでないものが存在する.

以下主要結果を述べる.

定理 1. Ω に条件 (A) を仮定する. このとき, 十分大きな $\lambda > 0$ にたいし (1.1) の安定定常解 Φ_λ が存在する. さらに $\Phi_\lambda(x) \neq 0$ $(\forall x \in \Omega)$ であり, 写像

$$
\overline{\Omega} \ni x \longrightarrow \Phi_\lambda(x)/|\Phi_\lambda(x)| \in S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid \ |z| = 1\}
$$

は θ_0 にホモトピー同値である.

空間次元 $n=2$ または $n=3$ の時は，条件 (A) は，より理解しやすい条件（単連結でない）と同値となり ([21])，定理より次の系が得られる．

系 2. $n=2$ あるいは $n=3$ で $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ が単連結でないならば，定理と同じ結論が得られる．

§3. 証明の準備と S^1 値調和関数

この節では以下定理の証明のなかで議論する枠組みなどを準備する．$\widehat{\Omega}$ を Ω の普遍被覆空間とする．これには被覆写像 $\iota_1 : \widehat{\Omega} \longrightarrow \Omega$ 局所等長となるような距離を入れて考える．また，よく知られているように $\mathbb{R}$ は S^1 の普遍被覆である．また，基本群 $\pi_1(\Omega)$ は $\widehat{\Omega}$ に等長同型変換群として作用している．以下その作用は

$$\widehat{\Omega} \times \pi_1(\Omega) : (z, \gamma) \longmapsto z \cdot \gamma \in \widehat{\Omega},$$

のように表す．基本群 $\pi_1(\Omega)$ の生成元を $\beta_1, ..., \beta_m$ としその関係を

$$\beta_{m(1,i)}{}^{p(1,i)} \cdot \beta_{m(2,i)}{}^{p(2,i)} \cdots \beta_{m(n(i),i)}{}^{p(n(i),i)} = e$$
$$(1 \leqq m(j,i) \leqq m,\ p(j,i) = 1 \,\mathrm{or}\, -1\ , 1 \leqq j \leqq n(i),\, n(i) \in \mathbb{N},\, 1 \leqq i \leqq k)$$

とおく．但し，$e \in \pi_1(\Omega)$ は単位元．任意の連続写像 $\theta : \Omega \to S^1$ に対し，連続写像 $F : \widehat{\Omega} \to \widehat{S^1} = \mathbb{R}$ で可換図式を満たすものがある．

$$\begin{array}{ccc} \widehat{\Omega} & \xrightarrow{F} & \widehat{S^1} = \mathbb{R} \\ {\scriptstyle \iota_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \iota_2} \\ \Omega & \xrightarrow{\theta} & S^1 \end{array}$$

(3.1) $$\theta(\iota_1(z)) = \iota_2(F(z)) \quad \text{for} \quad \forall z \in \widehat{\Omega}.$$

(cf. 命題 5.3 in [13])．F は 整数 $\times 2\pi$ なる定数をのぞいて一意に決まる．このような F を θ のリフトと呼ばれる．一方，このようにリフトして得られる F 全体はどう特徴付けられるだろうか．

補題 3.1. $\widehat{\Omega}$ 上の $\mathbb{R}$−値連続関数 F がある Ω 上のある S^1 値連続関数 θ のリフトであるための必要十分条件は，ある整数の組 $(\ell_1, ..., \ell_m) \in \mathbb{Z}^m$ が存在して

$$p(1,i)\ell_{m(1,i)} + p(2,i)\ell_{m(2,i)} \cdots + p(n(i),i)\ell_{m(n(i),i)} = 0 \qquad (1 \leqq i \leqq k)$$

(3.2) $$F(z \cdot \beta_i) = F(z) + 2\pi \ell_i \quad (\forall z \in \widehat{\Omega}, \quad 1 \leqq i \leqq m).$$

が成立することである．また，この $(\ell_1, ..., \ell_m) \in \mathbb{Z}^m$ はθ のホモトピークラスのみで決まる．

注意 3.2. ここでもし $F(z\cdot\beta_i)=F(z)$ $(z\in\widehat{\Omega})$ ならば F は自然に Ω 上の関数とみなすことができる．すなわち，連続関数 $\rho:\Omega\longrightarrow\mathbb{R}$ が，ただ一つあって $\rho(\iota_1(z))=F(z)$ $(z\in\widehat{\Omega})$ が成立する．同様に (3.2) をみたす $\widehat{\Omega}$ 上の C^1級の $\mathbb{R}$−値関数にたいし，$\nabla_z F$ は Ω 上の $\mathbb{R}^n$−値連続関数とみなされる．

$$
\begin{tikzcd}
\widehat{\Omega} \arrow[r, "F"] \arrow[d, "\iota_1"'] & \mathbb{R} \\
\Omega \arrow[ur] &
\end{tikzcd}
$$

上のような枠組みで $\overline{\Omega}$ から S^1 への連続写像の各ホモトピー類に S^1−値調和関数 (Neumann B. C.) が存在することを示す．この事実はより一般的な枠組みの理論 (cf. [12]) の中で知られているがこの場合だけなら簡単なのでここで示すことにする．方程式は次の様に書ける．

$$
\text{(3.3)} \qquad \operatorname{div}(\nabla\theta)=0 \quad \text{in} \quad \Omega, \qquad \frac{\partial\theta}{\partial\nu}\equiv\langle\nabla\theta\cdot\nu\rangle=0 \quad \text{on} \quad \partial\Omega.
$$

ここで θ 自身は S^1 への写像であるが $\nabla\theta$ は $\mathbb{R}^n$−値の関数として well-defined である．次が成立する．

補題 3.3. $\overline{\Omega}$ から S^1への連続写像の各ホモトピー類のなかに (3.3) の解が存在する．また，この解は回転を除いて一意である．

(補題 3.3 の証明) 任意に与えられた連続写像 $\theta_0\ \overline{\Omega}\longrightarrow S^1$ にたいしホモトピー同値な (3.3) の解をつくる．一般性を失うことなく θ_0 は C^3 であることを仮定できる．方程式を $\widehat{\Omega}$ 上のものに移して考える．補題 3.1 によって解 θ,θ_0 に対応する $\widehat{\theta},\widehat{\theta}_0$ は $\widehat{\Omega}$ 上の $\mathbb{R}$ 値関数であるが (3.2) を共通の $(\ell_1,\ldots,\ell_m)\in\mathbb{Z}^m$ にたいしてみたすようにすればよい．方程式は

$$
\text{(3.4)} \qquad \begin{cases} \operatorname{div}_z(\nabla_z\widehat{\theta})=0 \quad \text{in} \quad \widehat{\Omega}, \quad \dfrac{\partial\widehat{\theta}}{\partial\nu_z}=0 \quad \text{on} \quad \partial\widehat{\Omega}, \\ \text{with} \quad \xi(z\cdot\beta_i)=\xi(z)+2\pi\ell_i \quad \text{for} \quad \forall z\in\widehat{\Omega} \quad \text{and} \quad 1\leqq i\leqq m. \end{cases}
$$

となる．ここで，$\xi=\widehat{\theta}-\widehat{\theta}_0$ として変換すると方程式は

$$
\text{(3.5)} \qquad \begin{cases} \operatorname{div}_z(\nabla_z\xi)=-\operatorname{div}(\nabla\widehat{\theta}_0) \quad \text{in} \quad \widehat{\Omega}, \quad \dfrac{\partial\xi}{\partial\nu_z}=-\dfrac{\partial\widehat{\theta}_0}{\partial\nu_z} \quad \text{on} \quad \partial\widehat{\Omega}, \\ \text{with} \quad \xi(z\cdot\beta_i)=\xi(z) \quad \text{for} \quad \forall z\in\widehat{\Omega} \quad \text{and} \quad 1\leqq i\leqq m. \end{cases}
$$

となるが，注意 3.2 にもある通り ξ は Ω 上の関数とみなせる．また，方程式も Ω 上におろすことができて，通常のユークリッド空間の有界領域の実数値関数の議論ができる．すなわち，

$$
\text{(3.6)} \qquad \operatorname{div}(\nabla\xi)=-\operatorname{div}(\nabla\theta_0) \quad \text{in} \quad \Omega, \qquad \frac{\partial\xi}{\partial\nu}=-\frac{\partial\theta_0}{\partial\nu} \quad \text{on} \quad \partial\Omega.
$$

ここで (3.6) は定数差を除いて一意に解が存在することが知られているから，それをもとに上の議論をさかのぼって，ほしいもの θ が得られる． □

§4. 非定数定常解の構成

解の構成の前にあとで使う不等式を準備する（S. Campanato [6]）．

$$-\Delta U + \lambda U = f \quad \text{in} \quad \Omega, \quad \frac{\partial U}{\partial \nu} = 0 \quad \text{on} \quad \partial\Omega, \tag{4.1}$$

但し，$\lambda > 0$ はパラメータ．$\alpha \in (0,1)$ は定数とする．各 $f \in C^{\alpha}(\overline{\Omega})$，$\lambda > 0$ にたいし，(4.1) の解 $U_\lambda \in C^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$ が一意に存在するが，それにたいしてつぎの不等式が成立する．

命題 4.1 (Campanato [6]). ある定数 $K > 0$ (independent of $\lambda > 0$) があって

$$\|U_\lambda\|_{C^\alpha(\overline{\Omega})} \leqq \frac{K}{\lambda}\|f\|_{C^\alpha(\overline{\Omega})} \quad (\lambda > 0). \tag{4.2}$$

さて解の構成に移る．次の形で考える．

$$\Phi(x) = w(x)e^{i\theta(x)} \tag{4.3}$$

但し，

$$w : \Omega \longrightarrow (0,\infty), \quad \theta : \Omega \longrightarrow S^1 = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}.$$

(2.1) からつぎのように w, θ に関する方程式を得る．

$$\begin{cases} \Delta w + \left(\lambda(1-w^2) - |\nabla\theta|^2\right) w = 0 \quad \text{in} \quad \Omega, \\ \dfrac{\partial w}{\partial \nu} = 0 \quad \text{on} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{4.4}$$

$$\operatorname{div}(w^2\nabla\theta) = 0 \quad \text{in} \quad \Omega, \quad \frac{\partial\theta}{\partial\nu} \equiv \langle\nabla\theta\cdot\nu\rangle = 0 \quad \text{on} \quad \partial\Omega. \tag{4.5}$$

ここで $\nabla\theta$ は Ω 上の $\mathbb{R}^n$−値関数として well-defined であることに注意．以下 (4.4)-(4.5) の解を構成したい．

命題 4.2. ある $\lambda_* > 0$ があって (4.4)-(4.5) は $\lambda > \lambda_*$ にたいして解 $(w_\lambda, \theta_\lambda)$ をもつ．さらに θ_λ は θ_0 にホモトープである．また，次の性質をもつ

$$1 - \frac{c}{\lambda} \leqq w_\lambda \leqq 1 \qquad \text{in} \quad \Omega, \tag{4.6}$$

$$\limsup_{\lambda\to\infty} \|\nabla\theta_\lambda\|_{L^\infty(\Omega)} < \infty, \ \lim_{\lambda\to\infty} \|\Delta\theta_\lambda\|_{L^\infty(\Omega)} = 0, \tag{4.7}$$

$$\lim_{\lambda\to\infty} \|\lambda(1-w_\lambda^2) - |\nabla\theta_\lambda|^2\|_{L^\infty(\Omega)} = 0. \tag{4.8}$$

方針は，最初に θ を与え (4.4) をとき w を求める．その w にたいし θ_0 にホモトープであるよう (4.5) をといて $\widetilde{\theta}$ を求める．このような写像の合成を考え，その不動点を考える．

(命題 4.2 の証明)

(Step 1:) 一般性を失うことなく $\theta_0 : \overline{\Omega} \longrightarrow S^1$ は C^3 であるとできることに注意する．$p \in \Omega$ および $q \in S^1$ を固定する． 命題 3.1 より調和関数 $\theta_* : \Omega \longrightarrow S^1$ (Neumann B.C.) で $\theta_*(p) = q$ となるものが一意に存在する． また，$\widehat{p} \in \widehat{\Omega}$, $\widehat{q} \in \widehat{S^1} = \mathbb{R}$ を $\iota_1(\widehat{p}) = p$, $\iota_2(\widehat{q}) = q$ となるように固定する．また，$\theta : \Omega \longrightarrow S^1$ かつ $\theta(p) = q$ は一意に $\widehat{\theta} : \widehat{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}$ で $\widehat{\theta}(\widehat{p}) = \widehat{q}$ となるようにリフトできることに注意する．ここで，不動点定理を行う集合を定義する．

$$E = \{\theta \in C^{1+\alpha}(\overline{\Omega}; S^1) \mid \theta(p) = q,\ \theta \,\text{is homotopic to}\ \theta_*,\ d(\theta, \theta_*) \leqq 1\},$$

但し，この上で次の距離が用いられている

$$d(\theta_1, \theta_2) = \|\widehat{\theta}_1 - \widehat{\theta}_2\|_{C^{1+\alpha}(\overline{\Omega})},$$

ただし $\theta_1, \theta_2 \in C^{1+\alpha}(\overline{\Omega}; S^1)$, θ_i は θ_* にホモトープで $\theta_i(p) = q$ $(i = 1, 2)$ である． ここで $\widehat{\theta}_1 - \widehat{\theta}_2$ は Ω 上の通常の実数値関数とみなせることに注意する (cf. 注意 3.2). E は完備距離空間となり，また，つぎの集合と同型となる．すなわち，あるバナッハ空間の閉単位球に等距離同型である．

$$\{\rho \in C^{1+\alpha}(\overline{\Omega}) \mid \rho(p) = 0,\ \|\rho\|_{C^{1+\alpha}(\overline{\Omega})} \leqq 1\}.$$

(Step 2:) Upper-lower solutions の方法で $\theta \in E$ に対し (4.4) の正の解が一意に存在することは知られてよく知られていることといってよい．ある $\lambda_0 > 0$ があって (4.4) は $w = w(\lambda, \theta)$ $(\lambda \geqq \lambda_0)$ 解をもつ．比較関数の作り方から評価式が得られる．

$$1 - c/\lambda \leqq w(\lambda, \theta; x) \leqq 1 \quad (x \in \Omega), \tag{4.9}$$

ここで c は λ や $\theta \in E$ に依存しない．また，次も得られる．

$$\sup_{\lambda \geqq \lambda_0} \sup_{\theta \in E} \sup_{x \in \Omega} |\lambda(1 - w(\lambda, \theta; x)^2) w(\lambda, \theta; x) - |\nabla\theta|^2 w(\lambda, \theta; x)| < +\infty.$$

Schauder 評価によって $\{w(\lambda, \theta)\}_{\lambda \geqq \lambda_0, \theta \in E}$ は $C^{1+\alpha}(\overline{\Omega})$ で有界である．もう少し精密な評価を考える． g を $w(\lambda, \theta; x) = 1 - g(\lambda, \theta; x)/\lambda$ と定義する．これが満たす方程式は

$$\begin{cases} (2 - \dfrac{1}{\lambda}\Delta) g + (w + 2)(w - 1) g - |\nabla\theta|^2 w = 0 & \text{in} \quad \Omega, \\ \partial g / \partial \nu = 0 & \text{on} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{4.10}$$

である．命題 3.1 を適用して

$$\begin{aligned} \|g\|_{C^\alpha(\overline{\Omega})} &\leqq c_1 \|(w + 2)(w - 1) g - |\nabla\theta|^2 w\|_{C^\alpha(\overline{\Omega})} \\ &\leqq c_1 (\epsilon \|g\|_{C^\alpha(\overline{\Omega})} + c_2 \|g\|_{C^0(\overline{\Omega})}) + c_3, \end{aligned}$$

を得る．$\lambda \geqq \lambda_1(\epsilon)$ で $\epsilon > 0$ は任意である．$\epsilon > 0$ を $0 < c_1\epsilon \leqq 1/2$ となるようにとれば，次の評価をえる．すなわち，ある $c_4 > 0$ があって

$$\|g(\lambda,\theta)\|_{C^\alpha(\overline{\Omega})} = \lambda\|w(\lambda,\theta)-1\|_{C^\alpha(\overline{\Omega})} \leqq c_4 \tag{4.11}$$

$(\lambda \geqq \lambda_1,\ \theta \in E)$．また，すぐに $c_5 > 0$ があって

$$\|\lambda w(\lambda,\theta)(1-w(\lambda,\theta)^2) - |\nabla\theta|^2 w(\lambda,\theta)\|_{C^\alpha(\overline{\Omega})} \leqq c_5 \quad (\lambda \geqq \lambda_1,\ \theta \in E),$$

が成り立つことが従う．再び Schauder 評価 によって $\|w(\lambda,\theta)\|_{C^{2+\alpha}(\overline{\Omega})}$ が $\theta \in E$, $\lambda \geqq \lambda_1$ によらず一様に有界となる． 埋め込み $C^{2+\alpha}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow C^2(\overline{\Omega})$ がコンパクトであることから，結局次が成立する．

$$\lim_{\lambda\to\infty}\sup_{\theta\in E}\|w(\lambda,\theta)-1\|_{C^2(\overline{\Omega})} = 0. \tag{4.12}$$

(Step 3:) つぎに前段で得られた $w = w(\lambda,\theta)$ にたいして (4.5) を考える．$\theta \sim \theta_0$（ホモトープ） かつ $\theta(p) = q$ となるような θ を求めるために §3 で行った方法をとる．(4.5) をリフトして $\mathbb{R}$ 値にした方程式（ $\widehat{\Omega}$ 上の）は

$$\mathrm{div}_z(w(\iota_1(z))^2\nabla_z\widehat{\theta}) = 0 \quad \text{in} \quad \widehat{\Omega}, \quad \frac{\partial\widehat{\theta}}{\partial\nu_z} = 0. \quad \text{on} \quad \partial\widehat{\Omega}. \tag{4.13}$$

前と同様に $\eta' = \widehat{\theta} - \widehat{\theta}_0$ として未知関数を η' にすると

$$\mathrm{div}_z(w(\iota_1(z))^2\nabla_z\widehat{\eta}) = -\mathrm{div}_z(w(\iota_1(z))^2\nabla_z\widehat{\theta}_0) \quad \text{in} \quad \widehat{\Omega}, \quad \frac{\partial\widehat{\eta}}{\partial\nu_z} = -\frac{\partial\widehat{\theta}_0}{\partial\nu_z} \quad \text{on} \quad \partial\widehat{\Omega},$$

が得られる．ここで $\theta \sim \theta_0$ をめざしているわけであるから 補題 3.1, 注意 3.2 によって $\eta' = \widehat{\theta} - \widehat{\theta}_0$ は Ω 上の $\mathbb{R}$−値関数となるから方程式は $\eta'(z) = \eta(\iota_1(z))$ が解となるものに書き換えられる． それは

$$\mathrm{div}(w^2\nabla\eta) = -\mathrm{div}(w^2\nabla\theta_0) \quad \text{in} \quad \Omega, \quad \frac{\partial\eta}{\partial\nu} = -\frac{\partial\theta_0}{\partial\nu} \quad \text{on} \quad \partial\Omega, \tag{4.14}$$

である．(4.14) は $\eta(p) = \widehat{q} - \widehat{\theta}_0(\widehat{p})$ となるような一意解をもつ． このようにして $\widehat{\theta}(z) = \widehat{\theta}_0 + \eta(\iota_1(z))$ をえる． 議論をさかのぼって解 $\widetilde{\theta}$ を得る．これを $\Psi_\lambda(\theta)$ とかく．

(Step 4:) さて写像 $\Psi_\lambda : E \longrightarrow E$ の連続性コンパクト性を示す必要があるが構成の手順を丁寧に見てやることによって，これは確かめられる．Schauder 不動点定理を適用して不動点 θ_λ が E からみつかりさらに (4.4)-(4.5) の解 $(w_\lambda, \theta_\lambda)$ が得られる．評価 (4.6), (4.7), (4.8) は (4.9), (4.12), (4.5) などから成り立つ． □

§5. $\Phi_\lambda = w_\lambda e^{i\theta_\lambda}$ の安定性

この節ではすでに構成した解の安定性を論じる．Φ_λ を実部，虚部に分けて方程式を実数化したものを考える．すなわち $\Phi_\lambda(x) = u_\lambda(x) + v_\lambda(x)i$ から定まる (u_λ, v_λ) は，つぎの方程式を満たす．

$$
(5.1) \qquad \begin{cases} \Delta \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \lambda(1 - u^2 - v^2) \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \text{in} \quad \Omega, \\ \dfrac{\partial}{\partial \nu} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \text{on} \quad \partial\Omega. \end{cases}
$$

これの $\Phi_\lambda = (u_\lambda, v_\lambda)$ における線型化固有値問題は，

$$
(5.2) \qquad \begin{cases} \Delta \begin{pmatrix} \phi \\ \psi \end{pmatrix} + \lambda M(u_\lambda, v_\lambda) \begin{pmatrix} \phi \\ \psi \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} \phi \\ \psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \text{in} \quad \Omega, \\ \dfrac{\partial}{\partial \nu} \begin{pmatrix} \phi \\ \psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \text{on} \quad \partial\Omega, \end{cases}
$$

$$
(5.3) \qquad M(u, v) = \begin{pmatrix} 1 - 3u^2 - v^2 & -2uv \\ -2uv & 1 - u^2 - 3v^2 \end{pmatrix},
$$

である．(5.2) は自己共役な固有値問題で有限多重度で集積しない実固有値が存在する．

定義 5.1. $\{\mu_k(\lambda)\}_{k=1}^{\infty}$ を (5.2) の固有値とする．ただし，多重度にしたがって番号を数えまた小さい順に並んでいる．対応する固有関数は実数値のものでとれる．

解 (u_λ, v_λ), に対し ${}^t(-v_\lambda, u_\lambda)$ は (5.2) の 0 固有値にたいする固有関数であることがすぐわかる．よって，$\{\mu_k(\lambda)\}_{k=1}^{\infty} \ni 0$ である． また，$\{e^{ic}\Phi_\lambda \mid c \in \mathbb{R}\}$ は (2.1) の解の 1 次元の族になっている． よって，安定性を示すためには 0 が単純固有値でその他の固有値が正であることを示してやればよいことになる．

命題 5.2.

$$
(5.4) \qquad \lim_{\lambda \to \infty} \mu_k(\lambda) = \mu_k \quad (k \geqq 1),
$$

但し，$\{\mu_k\}_{k=1}^{\infty}$ は通常の $-\Delta$ (Neumann B.C.) の固有値である．

$$
(5.5) \qquad \begin{cases} \Delta\psi + \mu\psi = 0 & \text{in} \quad \Omega, \\ \dfrac{\partial \psi}{\partial \nu} = 0 & \text{on} \quad \partial\Omega. \end{cases}
$$

さらに $\{(\phi_{k,\lambda}, \psi_{k,\lambda})\}_{k=1}^{\infty}$ を (5.2) の規格化された完全直交固有関数系とすると，つぎが成立する．

$$
(5.6) \qquad \lim_{\lambda \to \infty} \big(\|\nabla(\phi_{k,\lambda} \cos\theta_\lambda + \psi_{k,\lambda} \sin\theta_\lambda)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \lambda \|\phi_{k,\lambda} \cos\theta_\lambda + \psi_{k,\lambda} \sin\theta_\lambda)\|_{L^2(\Omega)}^2 \big) = 0 \quad (k \geqq 1).
$$

この命題から次の系が従い，それが Φ_λ の安定性を主張している．

系 5.3. ある $\lambda_* > 0$ と $d > 0$ があって

$$\mu_1(\lambda) \equiv 0, \quad \mu_2(\lambda) \geqq d \quad \text{for} \quad \lambda \geqq \lambda_*, \tag{5.7}$$

が成立．

(系 5.3 の証明) $\{\mu_k(\lambda)\}_{k=1}^{\infty} \ni 0$, $\forall\lambda > 0$ と $\mu_1 = 0$ と $\mu_2 > 0$ から，命題 5.2 より $\mu_1(\lambda) \equiv 0$ が従い，そして，その他の固有値は正となる． □

（命題 **5.2** の証明）
詳しい固有値の解析のため関数のほうを (ϕ, ψ) から $(\widehat{\phi}, \widehat{\psi})$ へ変換する．

$$\begin{pmatrix} \phi(x) \\ \psi(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta_\lambda(x) & -\sin\theta_\lambda(x) \\ \sin\theta_\lambda(x) & \cos\theta_\lambda(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widehat{\phi}(x) \\ \widehat{\psi}(x) \end{pmatrix} \tag{5.8}$$

固有値問題は次のようになり，もちろん，もとのものとユニタリ同値である．

$$\begin{cases} \Delta \begin{pmatrix} \widehat{\phi} \\ \widehat{\psi} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\nabla\theta_\lambda \nabla\widehat{\psi} \\ \nabla\theta_\lambda \nabla\widehat{\phi} \end{pmatrix} + (\lambda(1 - w_\lambda^2) - |\nabla\theta_\lambda|^2) \begin{pmatrix} \widehat{\phi} \\ \widehat{\psi} \end{pmatrix} \\ \quad + \Delta\theta_\lambda \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widehat{\phi} \\ \widehat{\psi} \end{pmatrix} - 2\lambda w_\lambda^2 \begin{pmatrix} \widehat{\phi} \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} \widehat{\phi} \\ \widehat{\psi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{in} \quad \Omega, \\ \begin{pmatrix} \partial\widehat{\phi}/\partial\nu \\ \partial\widehat{\psi}/\partial\nu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{on} \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{5.9}$$

記号の簡便のため $(\widehat{\phi}, \widehat{\psi})$ のかわり (ϕ, ψ) を再び使用する．変分法による固有値の特徴付けを用いる．$\mathcal{E}_\lambda(\phi, \psi)$ と $\mathcal{E}_\infty(\psi)$ を定義する．

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_\lambda(\phi, \psi) = \int_\Omega \{ & |\nabla\phi|^2 + |\nabla\psi|^2 + (\nabla\theta_\lambda \cdot \nabla\psi)\phi - (\nabla\theta_\lambda \cdot \nabla\phi)\psi \\ & - (\lambda(1 - w_\lambda^2) - |\nabla\theta_\lambda|^2)(\phi^2 + \psi^2) + 2\lambda w_\lambda^2 \phi^2 \} dx, \end{aligned} \tag{5.10}$$

$$\mathcal{E}_\infty(\psi) = \int_\Omega |\nabla\psi|^2 dx. \tag{5.11}$$

(5.9) の固有値 $\{\mu_k(\lambda)\}_{k=1}^{\infty}$ および (5.5) の固有値 $\{\mu_k\}_{k=1}^{\infty}$ と対応する固有関数は以下のように帰納的に特徴付けられる．便宜的に $(\phi_{0,\lambda}, \psi_{0,\lambda}) = (0, 0)$, $\psi_0 = 0$ とおく．

$$\mu_k(\lambda) = \min\{\mathcal{E}_\lambda(\phi, \psi); (\phi, \psi) \in E_k(\lambda), \|\phi\|_{L^2}^2 + \|\psi\|_{L^2}^2 = 1\} \tag{5.12}$$

但し,

$$E_k(\lambda) = \{(\phi, \psi) \in H^1(\Omega) \times H^1(\Omega); \int_\Omega (\phi\phi_{\ell,\lambda} + \psi\psi_{\ell,\lambda})dx = 0,\ 0 \leqq \ell \leqq k-1\}.$$

$(\phi_{k,\lambda}, \psi_{k,\lambda})$ は (5.12) の minimizer として定める.

次に

$$\mu_k = \min\{\mathcal{E}_\infty(\psi); \psi \in E_k(\infty),\ \|\psi\|_{L^2} = 1\}, \tag{5.13}$$

ただし,

$$E_k(\infty) = \{\psi \in H^1(\Omega); \int_\Omega \psi\psi_\ell dx = 0,\ 0 \leqq \ell \leqq k-1\}.$$

ψ_k は (5.13) の minimizer として定める.

まず各固有値 $\mu_k(\lambda)$ は $\lambda \to \infty$ のとき下から押さえられることを示す. すなわち

$$\liminf_{\lambda\to\infty} \mu_k(\lambda) > -\infty \quad \text{for} \quad k \geqq 1, \tag{5.14}$$

である. 命題 4.2-(4.7) より $\|\nabla\theta_\lambda\|_{L^\infty(\Omega)}$ は有界であるからシュワルツの不等式を用いることによって, ある $c > 0$ があって

$$\begin{aligned}&|\nabla\theta_\lambda \cdot \nabla\psi_{k,\lambda}\phi_{k,\lambda} - \nabla\theta_\lambda \cdot \nabla\phi_{k,\lambda}\psi_{k,\lambda}| \\ &\qquad \leqq \frac{1}{2}(|\nabla\phi_{k,\lambda}|^2 + |\nabla\psi_{k,\lambda}|^2) + c(\phi_{k,\lambda}^2 + \psi_{k,\lambda}^2),\end{aligned}$$

となり

$$\begin{aligned}\mu_k(\lambda) =& \mathcal{E}_\lambda(\phi_{k,\lambda}, \psi_{k,\lambda}) \geqq \frac{1}{2}\int_\Omega \left(|\nabla\phi_{k,\lambda}|^2 + |\nabla\psi_{k,\lambda}|^2\right) dx \\ &- c'\int_\Omega \left(\phi_{k,\lambda}^2 + \psi_{k,\lambda}^2\right) dx + 2\lambda\int_\Omega \phi_{k,\lambda}^2 dx \quad (k \geqq 1).\end{aligned} \tag{5.15}$$

ここで, $\|\phi_{k,\lambda}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\psi_{k,\lambda}\|_{L^2(\Omega)}^2 = 1$ をもちいた.

さて $\lim_{\lambda\to\infty} \mu_k(\lambda) = \mu_k$ for $k = 1, 2, 3, \ldots$ を帰納的に示す. しかし, 以下では $k = 1, 2$ の場合のみ行う. 系 5.3 を導くにはこれで十分だし $k = 3, 4, \ldots.$ にたいし議論がどのように続くのか $k = 1, 2$ の場合だけから明白であるからである.

CASE : $k = 1$

主張 1.

$$\limsup_{\lambda\to\infty} \mu_1(\lambda) \leqq \mu_1. \tag{5.16}$$

(主張 1 の証明)
(5.12) より

$$\mu_1(\lambda) \leqq \mathcal{E}_\lambda(0,\psi_1) = \int_\Omega \left(|\nabla\psi_1|^2 + (\lambda(1-w_\lambda^2) - |\nabla\theta_\lambda|^2)\psi_1^2\right) dx.$$

命題 4.2-(4.8) より (5.16) を得る.

これより次がすぐ従う.

主張 **2.**

$$\limsup_{\lambda\to\infty} \int_\Omega (|\nabla\phi_{1,\lambda}|^2 + |\nabla\psi_{1,\lambda}|^2)dx < \infty, \quad \limsup_{\lambda\to\infty} \lambda \int_\Omega \phi_{1,\lambda}^2 dx < \infty. \tag{5.17}$$

次の主張により $k=1$ の場合の証明が完成する.

主張 **3.**

$$\lim_{\lambda\to\infty} \mu_1(\lambda) = \mu_1, \quad \lim_{\lambda\to\infty} \int_\Omega (|\nabla\phi_{1,\lambda}|^2 + \lambda\phi_{1,\lambda}^2)dx = 0. \tag{5.18}$$

(主張 3 の証明)
$+\infty$ に発散する任意の数列 $\{\lambda_m\}_{m=1}^\infty$ をとる. (5.14) と主張 1 より $|\mu_1(\lambda)|$ が有界であることに留意すると主張 2 より, 部分列 $\{\eta_m\} \subset \{\lambda_m\}$ および $\psi_1' \in H^1(\Omega)$ があって

$$\begin{cases} \lim_{m\to\infty} \mu_1(\eta_m) \equiv \exists\mu \quad (\leqq \mu_1), \\ \lim_{m\to\infty} \psi_{1,\eta_m} = \psi_1' \quad \text{weakly in} \quad H^1(\Omega) \quad \text{strongly in} \quad L^2(\Omega). \end{cases} \tag{5.19}$$

となる. (5.10) より

$$\begin{aligned} \mu_1(\lambda) &= \mathcal{E}_\lambda(\phi_{1,\lambda},\psi_{1,\lambda}) = \\ &\int_\Omega \{|\nabla\phi_{1,\lambda}|^2 + |\nabla\psi_{1,\lambda}|^2 + (\nabla\theta_\lambda\cdot\nabla\psi_{1,\lambda})\phi_{1,\lambda} - (\nabla\theta_\lambda\cdot\nabla\phi_{1,\lambda})\psi_{1,\lambda} \\ &- (\lambda(1-w_\lambda^2) - |\nabla\theta_\lambda|^2)(\phi_{1,\lambda}^2 + \psi_{1,\lambda}^2) + 2\lambda w_\lambda^2\phi_{1,\lambda}^2\}dx. \end{aligned} \tag{5.20}$$

命題 4.2, (5.19), 弱収束列のノルムの下半連続性より

$$\begin{aligned} (\mu_1 \geqq)\ \ \mu &= \lim_{m\to\infty} \mu_1(\eta_m) = \lim_{m\to\infty} \mathcal{E}_{\eta_m}(\phi_{1,\eta_m},\psi_{1,\eta_m}) \\ &= \limsup_{m\to\infty} \int_\Omega \{|\nabla\phi_{1,\eta_m}|^2 + |\nabla\psi_{1,\eta_m}|^2 + 2\eta_m w_{\eta_m}^2 \phi_{1,\eta_m}^2\}dx \\ &= \liminf_{m\to\infty} \int_\Omega \{|\nabla\phi_{1,\eta_m}|^2 + |\nabla\psi_{1,\eta_m}|^2 + 2\eta_m w_{\eta_m}^2 \phi_{1,\eta_m}^2\}dx \\ &\geqq \limsup_{m\to\infty} \int_\Omega |\nabla\psi_{1,\eta_m}|^2 dx \geqq \liminf_{m\to\infty} \int_\Omega |\nabla\psi_{1,\eta_m}|^2 dx \\ &\geqq \int_\Omega |\nabla\psi_1'|^2 dx = \mathcal{E}_\infty(\psi_1'). \end{aligned} \tag{5.21}$$

$\|\psi_1'\|_{L^2(\Omega)} = 1$, (5.13) より $\mathcal{E}_\infty(\psi) \geqq \mu_1$ を得る．一方 (5.21) より

$$\mathcal{E}_\infty(\psi_1') = \mu = \mu_1 = \lim_{m\to\infty} \mu_1(\eta_m)$$

が成り立ち，さらに ψ_1' は μ_1 にたいする (5.5) の固有関数であることが判明する．(5.21) をもう一度みると

$$\lim_{m\to\infty} \eta_m \int_\Omega \phi_{1,\eta_m}^2 dx = 0, \quad \lim_{m\to\infty} \int_\Omega |\nabla \phi_{1,\eta_m}|^2 dx = 0.$$

が成立していることがわかる．$\{\lambda_m\}$ の取り方の任意性から $k=1$ の場合は証明が終わる．

CASE : $\quad k = 2$

主張 **1.**

$$\limsup_{\lambda\to\infty} \mu_2(\lambda) \leqq \mu_2. \tag{5.22}$$

(主張 1 の証明)
$+\infty$ に発散する数列 $\{\lambda_m\}$ をとる．前段の議論より部分列 $\{\eta_m\}$ および (5.5) の第 1 固有関数 ψ_1' があって

$$\lim_{m\to\infty} \psi_{1,\eta_m} = \psi_1' \quad \text{weakly in} \quad H^1(\Omega) \quad \text{and strongly in} \quad L^2(\Omega), \tag{5.23}$$

が成立する．$\psi \in L.h.[\psi_1, \psi_2] \equiv \{a\psi_1 + b\psi_2 \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ で

$$\|\psi\|_{L^2(\Omega)} = 1, \quad (\psi, \psi_1')_{L^2(\Omega)} = 0, \tag{5.24}$$

をみたすものをとる．

$$\begin{pmatrix} \phi_\lambda' \\ \psi_\lambda' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \psi \end{pmatrix} - (\psi \cdot \psi_{1,\lambda})_{L^2} \begin{pmatrix} \phi_{1,\lambda} \\ \psi_{1,\lambda} \end{pmatrix},$$

とおく．$\lim_{m\to\infty}(\psi, \psi_{1,\eta_m})_{L^2(\Omega)} = 0$ と $\mathcal{E}_\infty(\psi) \leqq \mu_2$, に注意する．(5.12) より，

$$\mu_2(\eta_m) \leqq \mathcal{E}_{\eta_m}(\phi_{\eta_m}', \psi_{\eta_m}')/(\|\phi_{\eta_m}'\|_{L^2}^2 + \|\psi_{\eta_m}'\|_{L^2}^2),$$

が成立する．(5.23),(5.24), (5.18) により，

$$\mathcal{E}_{\eta_m}(\phi_{\eta_m}', \psi_{\eta_m}') \leqq \int_\Omega |\nabla\psi|^2 dx + o(1) \leqq \mu_2 + o(1) \quad \text{as} \quad m \to \infty$$

$$\|\phi_{\eta_m}'\|_{L^2}^2 + \|\psi_{\eta_m}'\|_{L^2}^2 = \|\psi_1'\|_{L^2} = 1 + o(1) \quad \text{as} \quad m \to \infty.$$

よって，$\limsup_{m\to\infty}\mu_2(\eta_m) \leqq \mu_2$. また，$\{\lambda_m\}$ $(\uparrow\infty)$ の任意性より (5.22) が示された.

(5.15)，主張 1 と命題 4.2 よりつぎがいえる.

主張 **2.**

$$\limsup_{\lambda\to\infty}\int_\Omega(|\nabla\phi_{2,\lambda}|^2+|\nabla\psi_{2,\lambda}|^2)dx<\infty,\quad \limsup_{\lambda\to\infty}\lambda\int_\Omega\phi_{2,\lambda}^2dx<\infty. \tag{5.25}$$

次の主張により $k=2$ の場合が終わる.

主張 **3.**

$$\lim_{\lambda\to\infty}\mu_2(\lambda)=\mu_2,\quad \lim_{\lambda\to\infty}\int_\Omega(|\nabla\phi_{2,\lambda}|^2+\lambda\phi_{2,\lambda}^2)dx=0. \tag{5.26}$$

(主張 3 の証明)
$+\infty$ に発散する任意数列 $\{\lambda_m\}$ をとる. 主張 $1,2$ と $k=1$ の場合より，部分列 $\{\eta_m\}\subset\{\lambda_m\}$ および (5.5) の第 1 固有関数 ψ_1' および，ある $\psi_2'\in H^1(\Omega)$ があって

$$\begin{cases}\lim\limits_{m\to\infty}\mu_2(\eta_m)\equiv\exists\mu\quad(\leqq\mu_2),\\ \lim\limits_{m\to\infty}\psi_{1,\eta_m}=\psi_1'\quad\text{weakly in}\quad H^1(\Omega)\quad\text{and strongly in}\quad L^2(\Omega),\\ \lim\limits_{m\to\infty}\phi_{2,\eta_m}=0\quad\text{weakly in}\quad H^1(\Omega)\quad\text{and strongly in}\quad L^2(\Omega),\\ \lim\limits_{m\to\infty}\psi_{2,\eta_m}=\psi_2'\quad\text{weakly in}\quad H^1(\Omega)\quad\text{and strongly in}\quad L^2(\Omega),\end{cases} \tag{5.27}$$

となる. 命題 4.2 と (5.27) より

$$\begin{aligned}(\mu_2\geqq)\quad\mu&=\lim_{m\to\infty}\mu_2(\eta_m)=\lim_{m\to\infty}\mathcal{E}_{\eta_m}(\phi_{2,\eta_m},\psi_{2,\eta_m})\\ &=\limsup_{m\to\infty}\int_\Omega\{|\nabla\phi_{2,\eta_m}|^2+|\nabla\psi_{2,\eta_m}|^2+2\eta_m w_{\eta_m}^2\phi_{1,\eta_m}^2\}dx\\ &=\liminf_{m\to\infty}\int_\Omega\{|\nabla\phi_{2,\eta_m}|^2+|\nabla\psi_{2,\eta_m}|^2+2\eta_m w_{\eta_m}^2\phi_{1,\eta_m}^2\}dx\\ &\geqq\limsup_{m\to\infty}\int_\Omega|\nabla\psi_{2,\eta_m}|^2dxdx\geqq\liminf_{m\to\infty}\int_\Omega|\nabla\psi_{2,\eta_m}|^2dxdx\\ &\geqq\int_\Omega|\nabla\psi_2'|^2dx=\mathcal{E}_\infty(\psi_2').\end{aligned} \tag{5.28}$$

一方

$$(\phi_{2,\eta_m},\phi_{1,\eta_m})_{L^2}+(\psi_{2,\eta_m},\psi_{1,\eta_m})_{L^2}=0,\quad \|\phi_{2,\eta_m}\|_{L^2}+\|\psi_{2,\eta_m}\|_{L^2}=1,$$

であるから $(\psi_2',\psi_1')_{L^2(\Omega)}=0$ と $\|\psi_2'\|_{L^2}=1$ が従う. よって，$\mathcal{E}_\infty(\psi_2')\geqq\mu_2$. (5.28) とあわせて

$$\mathcal{E}_\infty(\psi_2')=\mu=\mu_2=\lim_{m\to\infty}\mu_2(\eta_m)$$

かつ， ψ_2' が (5.5) の第2固有関数であることが成立.

$$\lim_{m\to\infty}\int_\Omega(|\nabla\phi_{2,\eta_m}|^2+\eta_m\phi_{2,\eta_m}^2)dx=0, \tag{5.30}$$

も同時にでる．数列 $\{\lambda_m\}_{m=1}^\infty$ の任意性より (5.26) が示せた． $k=2$ の場合が完成.

$k\geqq 3$ の場合は前に書いたように同様に続く.

References

[1] H. Amann, On the existence of positive solutions of nonlinear elliptic boundary value problems, Indiana Univ. Math. J. **21** (1971), 125-146.

[2] P. Bauman, N. N. Carlson and D. Phillips, On the zeros of solutions to Ginzburg Landau type systems, SIAM J. Math. Anal. **24** (1993), 1283-1293.

[3] P. Bauman, C.N. Chen, D. Phillips and P. Sternberg, Vortex annihilation in nonlinear heat flow for Ginzburg Landau systems, preprint.

[4] F. Bethuel, H. Brezis and F. Helein, Ginzburg Landau Vortices, Birkhäuser (1994).

[5] K.J. Brown, P.C. Dunne and R.A. Gardner, A semilinear parabolic system arising in the theory of superconductivity, J. Diff. Eqs. **40** (1981), 232–252.

[6] S. Campanato, Generation of analytic semigroups, in the Hölder topology, by elliptic operators of second order with Neumann boundary condition, Estratto da Le Matematiche **35** (1980), 61-72.

[7] R.G. Casten and C.J. Holland, Instability results for reaction diffusion equations with Neumann boundary conditions, J. Diff. Eqs. **27** (1978), 266-273.

[8] Q. Du, M. Gunzberger and J. Peterson, Analysis and approximation of the Ginzburg Landau model of superconductivity, SIAM Review **34** (1992), 54-81.

[9] C. Elliot, H. Matano and Q. Tang, Vector Landau Ginzburg equation and superconductivity second order phase transition, to appear in European J. Appl. Math.

[10] D. Gilbarg and N. Trudinger, Elliptic Partial Differential Equations of Second Order, Springer, New York, 1977.

[11] D. Henry, Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations, Springer-Verlag, New York 1981.

[12] R. Hamilton, Harmonic Maps of Manifolds with Boundary, Lecture Notes in Mathematics **471**, Springer.

[13] S.T. Hu, Homotopy Theory, Academic press, London 1959.

[14] A. Jaffe and C. Taubes, Vortices and Monopoles, Birkhauser 1980.

[15] S. Jimbo and Y. Morita, Stability of non-constant steady state solutions to a Ginzburg Landau equation in higher space dimensions, Nonlinear Anal. TMA, **22** (1994), 753-770.

[16] S. Jimbo and Y. Morita, Ginzburg Landau equation and stable solutions in a rotational domain, preprint.

[17] S. Jimbo, A construction of the perturbed solutions of semilinear elliptic equation in the singularly perturbed domain, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo **36** (1989), 163-189.

[18] K. Kishimoto and H.F. Weinberger, The spatial homegeneity of stable equilibria of of some reaction diffusion equations on convex domain, J. Diff. Eqs. **58** (1985), 15-21.

[19] H. Matano, Asymptotic behavior and stability of of solutions semilinear diffusion equations, Publ. RIMS, Kyoto Univ. **15** (1979), 401-455.

[20] H. Matano and M. Mimura, Pattern formation in competition diffusion systems in nonconvex domains, Publ. RIMS, Kyoto Univ. **19** (1983), 1049-1079.

[21] M. Morimoto, personal communication.

[22] M.H. Protter and H.F. Weinberger, Maximum Principle in Differential Equations, Pentice-Hall, Englewood Cliffs, 1967.

[23] M. Reed and B. Simon, Methods of Mathematical Physics, Academic Press, New York. Vol. 4, 1978.

[24] D. Sattinger, Monotone methods in nonlinear elliptic and parabolic boundary value problems, Indiana Univ. Math. J. **21** (1972), 979-1000.

[25] Y. Yang, Existence, regularity and asymptotic behavior of the solution to the Ginzburg Landau equations on $\mathbb{R}^3$, Commun. Math. Phys. **123** (1989), 147-161.