数理解析研究所講究録
913巻 1995年 108-127

On the differentiability of non-linear semigroups. the semi-linear case

松江工業高専　中村 元 (Gen Nakamura)

Banach 空間 $(X, \|\cdot\|)$ に於ける半線形発展方程式

(DE) $\qquad u'(t) = (A+B)u(t), \quad t>0; \quad u(0)=x$

の弱解を与える非線形作用素の半群を $\{S(t) : t \geq 0\}$ とする。ここで A は X 上の C_0-半群 $\{T(t) : t \geq 0\}$ の生成作用素、B は X の凸部分集合 C で定義された非線形作用素であるとする。作用素 B が微分可能である場合に半群 $\{S(t) : t \geq 0\}$ が持つ性質について論じる。以下 $\{S(t) : t \geq 0\}$ は C 上の非線形半群であるとし、これに対して次の条件を仮定する。以下6つの仮定を[0]と呼ぶことにする。

[0]

- C は Banach 空間 X の凸集合
- $\{S(t) : t \geq 0\}$ は C を定義域とし C の値をとる写像のクラスで

(S.1) $S(0)z = z \quad S(t+s) = S(t)S(s)z$ (for $s, t \geq 0$, $z \in C$)。

(S.2) 任意の $x \in C$ に対し $S(t)x$ は $t \in [0, \infty)$ に関し連続。

- $\{T(t): t \geq 0\}$ はX上のC_0－半群．その生成作用素はA．
- μ はCを定義域とし$[0,\infty)$ に値をとる下半連続関数。
  $\alpha \geq 0$に対し$C_\alpha = \{z \in C : \mu(z) \leq \alpha\}$とおく．各$C_\alpha$は凸閉集合。
- g は$[0,\infty)$から$[0,\infty)$への連続関数で、任意の$\alpha \geq 0$ に対し
  初期値問題 $w'(t) = g(w(t))$, $t>0$; $w(0)=\alpha$ は$[0,\infty)$ で
  最大解$m(t;\alpha)$を持つ。
- 任意の$t \geq 0$, $\alpha \geq 0$, $z \in C_\alpha$ に対し $\mu(S(t)z) \leq m(t;\alpha)$

以上は文献[3]に記載されている仮定。更に以下の仮定[I][II]，[III]を置く．定義域をCとし、Xに値をとる写像Bが存在し、

[I] 任意の$\alpha \geq 0$に対し B はC_α上連続．

[II] 任意の $z \in C$, $t \geq 0$に対し

$$S(t)z = T(t)z + \int_0^t T(t-s)B\{S(s)z\}ds.$$

[III] 任意の$\alpha \geq 0$ $z \in C_\alpha$ に対し、$\widetilde{C_\alpha}$からXへの有界線形作用素 $B'_\alpha(z)$ が存在し、任意の $z+\Delta z \in C_\alpha$ に対し

① $\lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h}\{B(z+h\Delta z) - Bz\} = \{B'_\alpha(z)\}\Delta z$.

② 任意の$\alpha \geq 0$, $w \in \widetilde{C_\alpha}$に対し$B'_\alpha(z)w$は$z(\in C_\alpha)$ に関し連続

- ここに集合$\{x-y : x, y \in C_\alpha\}$を含む最小の閉部分空間を$\widetilde{C_\alpha}$とする。

<u>命題1</u>　[0] ～[III]を仮定すると、次の[A]、[B]、[C]、[D] が成立。

[A] 各$\alpha \geq 0$に対し、$(t, z) \longmapsto S(t)z$ は$[0, \infty) \times C_\alpha$で連続。

[B] 各$\alpha \geq 0$, $z \in C_\alpha$, $t \geq 0$ に対し、$\widetilde{C_\alpha}$からXへの有界線形作用素$S'_\alpha(t, z)$が存在し、

① $\displaystyle\lim_{h \downarrow 0} \frac{S(t)(z + h\Delta z) - S(t)z}{h} = S'_\alpha(t, z)\Delta z$ for all. $z + \Delta z \in C_\alpha$

② 各$\alpha \geq 0$, $w \in \widetilde{C_\alpha}$ に対し $z \longmapsto B'_\alpha(z)w$ はC_αで連続。

[C] ① 各$\alpha \geq 0$, $z \in C_\alpha$ $w \in \widetilde{C_\alpha}$ に対し

$$\lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{t}\{S'_\alpha(t, z) - T(t)\}w = B'_\alpha(z)w$$

② 各$\alpha \geq 0$, $w \in \widetilde{C_\alpha}$に対し　$z \longmapsto B'_\alpha(z)w$ はC_αで連続。

[D] 各$z \in C$ に対し

$$\lim_{t \downarrow 0} \frac{S(t)z - T(t)z}{t} = Bz$$

命題の証明の前にいくつかのレンマを置く。

<u>レンマ1</u>　各$\beta \geq 0$, $z_0 \in C_\beta$に対しある$\varepsilon (>0)$が存在して、

$$\sup\{\|B'_\beta(x)\| : \|z - z_0\| < \varepsilon, z \in C_\beta\} < \infty$$

∵ z_0に収束する任意の点列$\{z_n\}_{n \in N} (\subset C_\beta)$ に対し、仮定[III]の②から

$$\lim_{n \to \infty} B'_\beta(z_n)w = B'_\beta(z_0)w \quad \text{for all } w \in \widetilde{C_\beta}$$

一様有界性定理から　$\sup_n \|B'_\beta(z_n)\| < \infty$. $\{z_n\}_{n \in N}$の任意性から レンマは成り立つ。 ∎

レンマ２　任意の$\alpha \geq 0$と任意の$t_0(>0)$と$z \in C_\alpha$に対し、ある$\varepsilon(>0)$と$M(>0)$が存在して

$$\|S(t)(z+\Delta z)-S(t)z\| \leq M \cdot \|\Delta z\|$$
$$\text{if}\left(\begin{array}{c} z+\Delta z \in C_\alpha,\ \|\Delta z\| < \varepsilon \\ 0 \leq t \leq t_0 \end{array}\right)$$

∵　$\beta = m(t_0;\alpha)$とする。$0 \leq t \leq t_0$、　$z, z+\Delta z \in C_\alpha$のとき

$$S(t)z,\ S(t)(z+\Delta z) \in C_\beta$$

$W = \{S(t)z : 0 \leq t \leq t_0\}$とすると$W$は$C_\beta$に含まれるコンパクト集合。レンマ１より、ある$\varepsilon_1(>0)$について

$$\sup\{\|B'_\beta(x)\| : x \in C_\beta,\ \mathrm{dist}(x, W) \leq \varepsilon_1\} < \infty$$

以下この上限をM_1と書く。次に$0 \leq t \leq t_0$に対し、

$$h_1(t) = \|S(t)(z+\Delta z) - S(t)z\|$$

$$h_2(t) = \begin{cases} h_1(t) \text{ ---- if } \sup\{h_1(s) : 0 \leq s \leq t\} \leq \varepsilon_1 \\ \varepsilon_1 \text{ ---- if } \sup\{h_1(s) : 0 \leq s \leq t\} > \varepsilon_1 \end{cases}$$

と定める。h_1, h_2は連続関数。$M_2 = \sup\{\|T(t)\| : 0 \leq t \leq t_0\}$とすると、仮定[II]より次の不等式が成立。

$$h_1(t) \leq M_2\|\Delta z\| + \int_0^t M_1 M_2 h_1(s)\,ds \quad \text{if } \sup\{h_1(s) : 0 \leq s \leq t\} \leq \varepsilon_1$$

故にh_2についても次の式が成立。

$$h_2(t) \leq M_2\|\Delta z\| + \int_0^t M_1 M_2 h_2(s)\,ds.$$

グロンウォールの不等式を用いるとある$M(>0)$が存在して

$$h_2(t) \leq M\|\Delta z\|$$

特に$\|\Delta z\|<\varepsilon_1/M$ の場合、 $h_2(t)<\varepsilon_1\ (0\leq t\leq t_0)$ $h_2(t)=h_1(t)$
ゆえに$\varepsilon=\varepsilon_1/M$ とするとレンマは成立。■

<u>レンマ3</u> $\alpha\geq 0$, $z, z+\Delta z\in C_\alpha$, $t_0>0$を任意にとると

$$\lim_{h\downarrow 0} 1/h\{S(t)(z+h\Delta z)-S(t)z\}$$

は $0\leq t\leq t_0$ において一様収束する。

∵ $1>h_1>h_2>\cdots$; $\lim_{i\to\infty}h_i=0$ となる任意の数列に対し

$$P_i(t)=\frac{1}{h_i}[S(t)(z+h_i\Delta z)-S(t)z]$$
$$(0\leq t\leq t_0,\ i=1,2,\cdots)$$

と定める。この関数列が$[0, t_0]$で一様収束する事を示せばよい。レンマ2の証明中のε_1に対しレンマ2を使うと、十分大きいiについて次の不等式が成立。

$$\|S(t)(z+h_i\Delta z)-S(t)z\|\leq\varepsilon_1 \qquad (0\leq t\leq t_0)$$

故にすべてのiについてこの不等式が成り立つと仮定してよい。関数列$\{P_i\}_i$は一様有界。$0\leq t\leq t_0$, $n=1,2,3\cdots$に対し

$$g_n(t)=\sup\{\|P_i(s)-P_j(s)\|: 0\leq s\leq t,\ i,j\geq n\}$$

と定めると$\{g_n\}_n$は一様有界な可測関数列。$0\leq t\leq t_0$に対し

$$g(t)=\inf_n g_n(t)=\lim_{n\to\infty}g_n(t)$$

と定めるとgは有界な可測関数 $\lim_{i\to\infty}P_i(t)$が一様収束する事を示すには次の事を示せばよい。

(※) $g(t_0)=0$

βはレンマ2と同じく$m(t_0;\alpha)$を表すとして、

$$S(s)z\in C_\beta,\ S(s)z+h_nP_n(s)\in C_\beta \quad (\text{for } n=1,2,3,\cdots,\ 0\leq s\leq t_0)$$

更に$i\geq n$に対し

$$S(s)z+h_iP_n(s)\in C_\beta$$

$$\|h_iP_n(s)\|\leq\|h_nP_n(s)\|\leq\varepsilon_1,\quad \|h_iP_i(s)\|\leq\varepsilon_1 \qquad (\text{for } 0\leq s\leq t_0)$$

仮定[II]とP_iの定義から　$0\leq t\leq t_0$に対し

$$P_i(t)=T(t)\Delta z+\frac{1}{h_i}\int_0^t T(t-s)\left[B\{S(s)z+h_iP_i(s)\}-BS(s)z\right]ds$$

$j\geq n$に対しても同様の事が成立。故に

$$\begin{aligned}P_i(t)-P_j(t)=&\int_0^t T(t-s)\left[\frac{B\{S(s)z+h_iP_n(s)\}-BS(s)z}{h_i}-\{B'_\beta S(s)z\}P_n(s)\right]ds\\&-\int_0^t T(t-s)\left[\frac{B\{S(s)z+h_jP_n(s)\}-BS(s)z}{h_j}-\{B'_\beta S(s)z\}P_n(s)\right]ds\\&+\frac{1}{h_i}\int_0^t T(t-s)\left[B\{S(s)z+h_iP_i(s)\}-B\{S(s)z+h_iP_n(s)\}\right]ds\\&-\frac{1}{h_j}\int_0^t T(t-s)\left[B\{S(s)z+h_jP_j(s)\}-B\{S(s)z+h_jP_n(s)\}\right]ds\end{aligned}$$

今nを固定。[III]②から任意の$\varepsilon(>0)$に対しある$m(>n)$が存在し

$$\int_0^{t_0}\left\|\frac{B\{S(s)z+h_iP_n(s)\}-BS(s)z}{h_i}-\{B'_\beta S(s)z\}P_n(s)\right\|ds<\varepsilon.$$

$$(\text{for } i\geq m)$$

$j\geq m$に対しても同様の不等式が成り立つ。

レンマ2の証明中のM_1, M_2を用いて

$$\begin{aligned}\|P_i(t)-P_j(t)\|\leq\ &\varepsilon M_2+\varepsilon M_2+M_1M_2\int_0^t\|P_i(s)-P_n(s)\|ds\\&+M_1M_2\int_0^t\|P_j(s)-P_n(s)\|ds\end{aligned}$$

$$(\text{for } i,j\geq m,\ 0\leq t\leq t_0)$$

従って　　$q(t) \le q_m(t) \le 2\varepsilon M_2 + 2M_1M_2 \int_0^t q_n(s)\, ds.$

εの任意性から　　$q(t) \le 2M_1M_2 \int_0^t q_n(s)\, ds$

次に$n \to \infty$として　$q(t) \le 2M_1M_2 \int_0^t q(s)\, ds$

グロンウォールの不等式から

$q(t) = 0$　特に$q(t_0) = 0$

すなわち(※)が成立。故にレンマ3は成立。∎

<u>命題1の[A]</u>について----- レンマ2より成り立つ。

<u>[B]①の証明</u>　$\alpha \ge 0$, $z \in C_\alpha$, $t_0 > 0$ を任意にとり固定する。

レンマ3に注目して次の様に関数Pを定める。

$$P(t, \Delta z) = \lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h}\{S(t)(z + h\Delta z) - S(t)z\}$$

$$(\text{for } 0 \le t \le t_0,\ z + \Delta z \in C_\alpha)$$

仮定[II]を用いて、

- $P(t, \Delta z) = T(t)\Delta z + \int_0^t T(t-s)[\{B_\beta' S(s)z\} P(s, \Delta z)]\, ds$

故に任意の$w \in \{x - y : x, y \in C_\alpha\}$に対し$[0, t_0]$から$\widetilde{C_\beta}$への連続関数$P(\cdot, w)$が唯一存在して次の条件を満たす。

- $P(t, w) = T(t)w + \int_0^t T(t-s)[\{B_\beta' S(s)z\} P(s, w)]\, ds$

実際$P(t, w) = P(t, x-z) - P(t, y-z)$とすればよい。

故に任意の$w \in \widetilde{C_\alpha}$に対し$[0, t_0]$から$\widetilde{C_\beta}$への連続関数$P(\cdot, w)$が存在して上記と同じ方程式をみたす。すなわち

$$(**)\ P(t,w)=T(t)w+\int_0^t T(t-s)[\{B'_\beta S(s)z\}P(s,w)]\,ds$$

$$(\text{for } w\in\widetilde{C_\alpha},\ 0\le t\le t_0)$$

そこで

$$S'_\alpha(t,z)w=P(t,w)\quad(\text{for } w\in\widetilde{C_\alpha},\ 0\le t\le t_0)$$

と定めると、$S'_\alpha(t,z)$は、$\widetilde{C_\alpha}$からXへの有界線形作用素で[B]①を満足する。又$t_0(\ge t)$の値には依存しない. ∎

[B]の②の証明　[B]①の証明で述べた事から，$\alpha\ge0$, $z\in C_\alpha$, $t_0>0$, $w\in\widetilde{C_\alpha}$ を固定すると $S'_\alpha(t,z)w$ は $0\le t\le t_0$ で連続。故に次の事が示されればよい。

“任意の$\alpha\ge0$, $t_0>0$, $\{z_n\}_{n\ge0}\subset C_\alpha$, $w\in\widetilde{C_\alpha}$に対し、$\lim_{n\to\infty}z_n=z_0$ ならば、

$$\lim_{n\to\infty}\Big[\sup_{0\le t\le t_0}\|(S'_\alpha(t,z_n)w-S'_\alpha(t,z_0)w\|\Big]=0$$ ”

☺ $u_n(t)=S'_\alpha(t,z_n)w\quad(\text{for } n=0,1,2,\cdots.\ 0\le t\le t_0)$

とおく。更にレンマ2と同じく $\beta=m(t_0;\alpha)$ として

$$d'=\sup\{\|B'_\beta(S(t)z_n)\|:n=0,1,2,\cdots.\ 0\le t\le t_0\}$$

とおくとレンマ1とレンマ2を用いて $d'<\infty$ となる. 又

$$r_n=\int_0^{t_0}\|\{B'_\beta(S(t)z_n)\}u_0(t)-\{B'_\beta(S(t)z_0)\}u_0(t)\|\,dt$$

とおくと仮定[Ⅲ]②より $\lim_{n\to\infty}r_n=0$. 更に$P(t,w)=S'_\alpha(t,z)w$が[B]①の証明中の(**)を満足する事から、

$$\|u_n(t)-u_0(t)\|=\Big\|\int_0^t T(t-s)[\{B'_\beta S(s)z_n\}u_n(s)-\{B'_\beta S(s)z_0\}u_0(s)]ds\Big\|$$

レンマ２の証明と同じく $M_2=\sup_{0\le t\le t_0}\|T(t)\|$ とおくと、

$$\left\|\int_0^t T(t-s)\left[\{B'_\beta(S(s)z_n)\}u_n(s)-\{B'_\beta(S(s)z_0)\}u_0(s)\right]ds\right\|$$

$$\le M_2\left[d'\int_0^t\|u_n(s)-u_0(s)\|ds+\gamma_n\right]$$

グロンウォールの不等式から、

$$\lim_{n\to\infty}\left[\sup_{0\le t\le t_0}\|u_n(t)-u_0(t)\|\right]=0. \blacksquare$$

[C]の①の証明　$P(t;w)=S'_\alpha(t;z)w$ とおくと[B]①の証明中の(※※)が成立する事より成り立つ。

[C]の②について　仮定[Ⅲ]②そのものである。

[D]の証明　仮定[Ⅱ]より示される。

次に命題１の逆に当る命題を述べる。

命題２　[0], [A], [B]が成り立ち、更に任意の $\alpha\ge0$, $z\in C_\alpha$ に対し $\tilde{C}_\alpha$ から X への有界線形作用素 $B'_\alpha(z)$ が存在して[C]の②が成り立ち、更に次の[D']が成り立つとする。

[D']　ある $z_0\in C$ について、$\displaystyle\lim_{t\downarrow0}\frac{S(t)z_0-T(t)z_0}{t}$ が存在する。

このとき　定義域を C とし、X に値をとる写像 B が存在して[Ⅰ], [Ⅱ], [Ⅲ]が成立する。

命題２の証明の前にいくつかのレンマを置く。

<u>レンマ4</u>　任意の$\alpha \geq 0$, $z_0 \in C_\alpha$, $t_0 \geq 0$ に対しある$\varepsilon > 0$が存在し

$$\sup\{\|S'_\alpha(t,z)\| : z \in C_\alpha,\ \|z - z_0\| \leq \varepsilon,\ 0 \leq t \leq t_0\} < \infty$$

$$\sup\{\|B'_\alpha(z)\| : z \in C_\alpha,\ \|z - z_0\| \leq \varepsilon\} < \infty$$

∵ レンマ1の証明と同様である。■

<u>レンマ5</u>　$\alpha \geq 0$と$z \in C_\alpha$を固定。任意の$0 \leq s \leq t$に対し$\tilde{C}_{m(s;\alpha)}$から$\tilde{C}_{m(t;\alpha)}$への有界線形作用素$U_\alpha(t,s)$を$U_\alpha(t,s) = S'_{m(s;\alpha)}(t-s, S(s)z)$で定めると次の事が成り立つ。

$$U_\alpha(t_3,t_2) \circ U_\alpha(t_2,t_1) = U_\alpha(t_3,t_1) \quad (\text{for } 0 \leq t_1 \leq t_2 \leq t_3)$$

∵ 証明にはレンマ4の第1式を使う。■

<u>レンマ6</u>　上で述べた$U_\alpha(\cdot,\cdot)$に対し$U_\alpha(t) = U_\alpha(t,0)$

$V_\alpha(t) = B'_{m(t;\alpha)}(S(t)z)$　(for $t \geq 0$)と定めると以下が成立。

$$U_\alpha(t)w = T(t)w + \int_0^t T(t-s)[V_\alpha(s)\{U_\alpha(s)w\}]ds \quad (\text{for } w \in \tilde{C}_\alpha)$$

∵ [C]①とレンマ5に注目する。任意の$s \in [0,t)$に対し

$$\lim_{\Delta s \downarrow 0} \frac{T(t-s-\Delta s)U_\alpha(s+\Delta s)w - T(t-s)U_\alpha(s)w}{\Delta s} = T(t-s)[V_\alpha(s)\{U_\alpha(s)\}]$$

これはsを変数とみて連続。故にこの左辺は$\frac{d}{ds}\{T(t-s)U_\alpha(s)w\}$と書ける。両辺を0からt迄積分すればレンマは示される。■

次のレンマでは$\alpha \geq 0$と$z, z+\Delta z \in C_\alpha$を固定。$0 \leq \theta \leq 1$, $0 \leq t$に対し

$$U_\alpha(t,\theta) = S'_\alpha(t, z+\theta\Delta z) \qquad V_\alpha(t,\theta) = B'_{m(t;\alpha)}\{S(t)(z+\theta\Delta z)\}$$

レンマ7 $S(t)(z+\Delta z) - T(t)(z+\Delta z)$

$$= S(t)z - T(t)z + \int_0^1\int_0^t T(t-s)\left[V_\alpha(s,\theta)\{U_\alpha(s,\theta)\Delta z\}\right]ds\,d\theta$$

∵ レンマ6のzに$z+\theta\Delta z$を wにΔzを代入

$$S'_\alpha(t, z+\theta z)\,\Delta z = T(t)\Delta z + \int_0^t T(t-s)\left[V_\alpha(s,\theta)\{U_\alpha(s,\theta)\Delta z\}\right]ds$$

両辺をθについて0から1迄積分、

$$S(t)(z+\Delta z) - S(t)z = T(t)\Delta z + \int_0^1\int_0^t T(t-s)\left[V_\alpha(s,\theta)\{U_\alpha(s,\theta)\Delta z\}\right]ds\,d\theta$$

又$T(t)\Delta z = T(t)(z+\Delta z) - T(t)z$よりレンマは成立. ∎

レンマ8 任意の$z\in C$に対し $\lim_{t\downarrow 0}\frac{S(t)z - T(t)z}{t}$ は存在。

更に任意の$\alpha \geq 0$, $z_1, z_2 \in C_\alpha$に対し

$$\lim_{t\downarrow 0}\frac{S(t)z_2 - T(t)z_2}{t} = \lim_{t\downarrow 0}\frac{S(t)z_1 - T(t)z_1}{t} + \int_0^1 \left[B'_\alpha(z_1+\theta(z_2-z_1))\right](z_2-z_1)\,ds$$

∵レンマの前半について。仮定[D]'のz_0と任意の$z\in C$に対し、$\alpha\geq 0$を$z_0, z\in C_\alpha$となる様にとる。更に$z=z_0+\Delta z_0$とおく

レンマ7より

$$\lim_{t\downarrow 0}\frac{S(t)z - T(t)z}{t} = \lim_{t\downarrow 0}\frac{S(t)z_0 - T(t)z_0}{t} + \int_0^1 B'_\alpha(z_0+\theta\Delta z_0)\Delta z_0\,d\theta$$

つまり左辺の極限値は存在し、故にレンマの前半は成立。

同様にレンマの後半も成立. ∎

命題2の証明 レンマ8に注目. $Bz = \lim_{t\downarrow 0}\frac{S(t)z - T(t)z}{t}$ (for $z\in C$) と定める。レンマの等式より[III]は成立. [III]とレンマ4を用いて[I]が成立。Bの定め方から[II]が成立. ∎

<u>Remark</u> 仮定[0][I][II]が満たされているとき、$D(A)\cap C$ は C で稠密である。詳しい性質は文献[ ]の定理3.1に記載されている。更に[III]が満たされているとき、従って[A]~[D]も成立するとき次の事が成り立つ。"任意の $x\in D(A)\cap C$ に対して $u(t)\equiv S(t)x$ は(DE)に対する C^1 級の一意な解を与える。"

例

次に命題1の仮定(従って結論も)を満たす例を挙げる。

$$
\text{方程式}\begin{cases} u_t(x,t) = -a(x)\,u_x(x,t) + f(x,u(x,t)) \\ u(x,0) = u_0(x) \qquad\qquad (\text{for } 0\le x<\infty,\ 0\le t<\infty) \end{cases}
$$

の弱解を与える様な半群を構成し、特にその半群の微分可能性(命題1の[B]) を述べたい。ここに $f(\cdot,\cdot)$, $u_0(\cdot)$, $a(\cdot)$ は与えられた汎関数で次の性質を持つとする。

$f(x,y)$. $(0\le x<\infty,\ 0\le t<\infty)$ は C^1 級の関数で

① $f(x,0)=0$ $(\text{for } 0\le x<\infty)$

② $[0,\infty)$ で正値連続な単調増加関数 $b(\cdot)$ が存在し、任意の $x\ge 0$ に対し $y\longmapsto f(x,y)-b(x)\cdot y$ は $(-\infty,\infty)$ で単調減少

③ $u_0(\cdot)$ は $L^1[0,\infty)$ に属し、ある $x_0>0$, $y_0>0$ について

・$|u_0(x)|\le y_0$ a.e. $x\in[0,x_0]$ ・$u_0(x)=0$ a.e. $x\in(x_0,\infty)$

④ $a(x)$ $\left(\substack{>0\\<\infty}\right)$ は $[0,\infty)$ で定義された可測関数で

関数 $1/a(x)$ は $L^1_{loc}[0,\infty)$ に属し、$\int_0^\infty 1/a(x)\,dx=\infty$

Banach空間Xを定義　$[0,\infty)$で定義された関数vで
$\int_0^\infty |v(x)|/a(x)\,dx<\infty$　を満たすものの全体をXで表す。
更にvのノルムを　$\|v\|=\int_0^\infty v(x)/a(x)\,dx$　で定めると
$(X,\|\cdot\|)$はBanach空間になる。

C_0－半群$\{T(t):t\geq 0\}$を定義　任意の$0\leq t,x<\infty$に対し　ある
$\rho\in[x,\infty)$が唯一存在して次の式を満足。以後$\rho=\rho(t;x)$と書く

$$\int_x^\rho \frac{d\tau}{a(\tau)}=t$$

次に関数$v(\in X)$に対し関数Φvを次の式で定める。

$$(\Phi v)(t)=v(\rho(t;0))\qquad(\text{for } 0\leq t<\infty,\ v\in X)$$

これによりΦはXから$L^1[0,\infty)$への等距離同型写像になる。
更に$L^1[0,\infty)$上のC_0－半群$\{W(t),t\geq 0\}$を次の式で定める。

$$(W(t)w)(x)=\begin{cases}0 & \cdots\ 0\leq x<t\\ w(x-t) & \cdots\ t\leq x\end{cases}\qquad\left(\begin{array}{l}\text{for } w\in L^1[0,\infty)\\ 0\leq t,\ 0\leq x\end{array}\right)$$

これを用いてX上のC_0－半群$\{T(t):t\geq 0\}$を以下の様に定める。

$$T(t)=\Phi^{-1}\circ W(t)\circ\Phi\qquad(\text{for } t\geq 0)$$

集合Cの定義　Xの要素vで次の性質を持つものの全体をCで表す。“零集合上の値を修正すれば、vはコンパクトな台を持つ有界な関数である”　これによりCはXおよび$L^1[0,\infty)$の凸部分集合になる。

$\{W(t): t \geq 0\}$の生成作用素の性質　$w \in C$ に対し以下が成立。

・$\lim_{t \downarrow 0} \frac{W(t)w - w}{t}$ in $L^1[0,\infty)$ が存在する $\Longleftrightarrow$ (＊＊＊)

ここに　(＊＊＊) $\left\{\right.$ 零集合上の値を修正すれば関数 w は
・絶対連続　　・$w(0) = 0$

このとき $\lim_{t \downarrow 0} \frac{W(t)w - w}{t} = -w'$ in $L^1[0,\infty)$ となる。

∵ ($\Longleftarrow$) について、先づ $w \in C$ が

(＊＊＊＊) $\left\{\right.$ ・リップシッツ連続関数
・$w(0)=0$　　ならば

$$\lim_{t \downarrow 0} \frac{W(t)w - w}{t} = -w' \quad \text{in } L^1[0,\infty)$$ が成立。

次に(＊＊＊)を仮定すると、関数列 $\{w_n\}_n \subset C$ が存在して、

$\left\{\right.$ ・各 w_n は条件(＊＊＊＊)を満足。
・$\lim_{n\to\infty} w_n = w$, $\lim_{n\to\infty} w_n' = w'$ in $L^1[0,\infty)$

を満たす。前述より $\frac{d}{dt}(W(t)w_n) = -W(t)w_n'$ in $L^1[0,\infty)$

$W(t)w_n = w_n + \int_0^t -W(s)w_n'\,ds$　　$n\to\infty$ として

$W(t)w = w + \int_0^t -W(s)w'\,ds$

故に $\lim_{n\to\infty} \frac{W(t)w - w}{t} = -w'$ in $L^1[0,\infty)$

($\Longrightarrow$) について。$w \in C$, $\lim_{t \downarrow 0} \frac{W(t)w - w}{t} = -g$ in $L^1[0,\infty)$

と仮定する。各 $t \geq 0$ に対し $\int_0^\infty (W(t)w)(x)\,dx = \int_0^\infty w(x)\,dx$

だから、$\int_0^\infty g(x)\,dx = 0$

そこで　$h(x)=\int_0^x g(\tau)d\tau$　と定める。hはCに属し、更に絶対連続関数で　$h(0)=0$ をみたす. 前述の事を用いて

$$\lim_{t\downarrow 0}\frac{W(t)h-h}{t}=-h'=-g \quad \text{in } L^1[0,\infty)$$

$$\lim_{t\downarrow 0}\frac{W(t)(w-h)-(w-h)}{t}=0 \quad \text{in } L^1[0,\infty)$$

故に　$W(t)(w-h)=w-h$　　$(\text{for } t\geq 0)$

特に$W(1)(w-h)=w-h$

$$\int_0^1|w(x)-h(x)|dx=\int_1^2|w(x)-h(x)|dx=\int_2^3|w(x)-h(x)|dx=\cdots$$

一方$w, h\in C$　だからこれらの値は0.

故に　$w(x)=h(x)$ a.e.　従ってwは(＊＊＊)を満たす。■

$\{T(t):t\geq 0\}$の生成作用素の性質　$\{T(t)\}$の生成作用素をAとする。$v\in C$とする。$\phi v\in C$であり更に次の事が成り立つ。

$$v\in D(A) \iff \lim_{t\downarrow 0}\frac{(\phi^{-1}\circ W(t)\circ\phi)v-v}{t} \quad \text{in } X \text{ が存在.}$$

$$\iff \lim_{t\downarrow 0}\frac{W(t)(\phi v)-\phi v}{t} \quad \text{in } L^1[0,\infty) \text{ が存在}$$

$\iff$ 零集合上の値を修正すれば関数ϕvは,
- 絶対連続　・$(\phi v)(0)=0$

$\iff$ 零集合上の値を修正すれば関数vは,
- 絶対連続　・$v(0)=0$

そこで $v \in D(A) \cap C$ とすると、

$$\lim_{t \downarrow 0} \frac{W(t)(\phi v) - (\phi v)}{t} = -(\phi v)' = -\phi(a \times v') \quad (\text{in } Z)$$

$$Av = \lim_{t \downarrow 0} \frac{\phi^{-1} W(t)(\phi v) - \phi^{-1}(\phi v)}{t} \qquad (\text{in } X)$$

$$= \phi^{-1}(-\phi(a \times v')) = -a \times v'$$

<u>汎関数μと等位集合C_αを定義</u>　先ずY(・)を次の様に定める。

$$Y(\alpha) = y_0 \exp\left(\int_0^\alpha h(\rho(\tau ; x_0))\, d\tau\right) \qquad (\text{for } \alpha \geq 0)$$

次に各$\alpha \geq 0$に対し次の条件を満たす$v (\in C)$の全体をC_αで表す。

$$\begin{cases} \circ\ |v(x)| \leq Y(\alpha) & \text{a.e. } x \in [0, \rho(\alpha : x_0)] \\ \circ\ v(x) = 0 & \text{a.e. } x \in (\rho(\alpha : x_0), \infty) \end{cases}$$

すると次の事が成り立つ、

$\circ \bigcup_{\alpha \geq 0} C_\alpha = C$　　　　$\circ\ C_\alpha \subset C_\beta \quad (\text{for } 0 \leq \alpha \leq \beta)$

次に汎関数μを定義する。

$$\mu(v) = \inf\{\alpha \geq 0 : v \in C_\alpha\} \qquad (\text{for } v \in C)$$

μはCを定義域とし$[0, \infty)$に値をもつ下半連続汎関数.

更に次の事が成り立つ。

$$\{v \in C : \mu(v) \leq \alpha\} = C_\alpha \qquad (\text{for } \alpha \geq 0)$$

作用素Bの定義と性質　任意の関数$v \in C$に対し関数Bvを
$(Bv)(x) = f(x, v(x))$ (for $x \geq 0$) で定める。BはCを定義域としCに値をとる作用素となり、更に文献[3]のP604の条件(H1)〜(H3)が成り立つ。

(H1) ある$\omega (\in \mathbf{R})$が存在して

$$\|T(t)x\| \leq e^{\omega t}\|x\| \qquad (\text{for } x \in X,\ 0 \leq t)$$

(H2) 各$\alpha \geq 0$に対し，C_αは閉集合で作用素BはC_α上連続。

Xのduality mappingをFで表し、$\langle , \rangle_i$を次の意味で用いる。

$$\langle x, y \rangle_i = \inf\{f(x) : f \in F(y)\} \qquad (\text{for } x, y \in X)$$

(H3) 各$\alpha \geq 0$に対し，ある$\omega_\alpha (\in \mathbf{R})$が存在して

$$\langle Bx - By, x - y \rangle_i \leq \omega_\alpha \|x - y\|^2 \quad (\text{for } x, y \in C_\alpha)$$

実際　任意の$t \geq 0$に対し作用素$W(t)$，ϕは共に等距離線形写像。故に$T(t)$も等距離線形写像で，(H1)は成り立つ。又fはC^1級関数だから各$\alpha \geq 0$に対し作用素BはC_α上リップシッツ連続。故に(H2)と(H3)は成り立つ。

非線形半群$\{S(t) : t \geq 0\}$の定義とその微分可能性

仮定[II]等を満たす$\{S(t) : t \geq 0\}$を定義したい。その為に文献[3]のP607の条件(R,1)が成り立っている事を確める。(R,1)とは

" 任意の$v(\in C)$に対し、正の値をとりながら0に収束する数列$\{h_n\}_n$と点列$\{v_n\}_n \subset C$が存在して次の2条件を満たす。

(I, a) $\lim_{n\to\infty} h_n^{-1} \| T(h_n) v + h_n B v - v_n \| = 0$。

(I, b) $\limsup_{n\to\infty} h_n^{-1}[\mu(v_n) - \mu(v)] \leq g(\mu(v))$。"

ここにgは最初の仮定[C]で述べたものである。今$g(u) \equiv 1$と定める。従って$m(t;\alpha) = t+\alpha$ (for $t \geq 0, \alpha \geq 0$) となる。

又(I, a)は次の(I, a')と同値になる。

(I, a') $\lim_{n\to\infty} h_n^{-1} \| T(h_n)(v + h_n B v) - v_n \| = 0$.

正の値をとりながら0に収束する任意の数列$\{h_n\}_n$と任意の$v(\in C)$をとり$\mu(v) = \alpha$とする。そして関数列$\{g_n\}_n$を次の式で定める。

$$g_n(x) = \begin{cases} v(x) + h_n (Bv)(x) & \cdots \text{ if } |v(x) + h_n (Bv)(x)| \leq Y(\alpha + h_n) \\ v(x) & \cdots \text{ if } |v(x) + h_n (Bv)(x)| > Y(\alpha + h_n) \end{cases}$$

(for $0 \leq x < \infty$; $n = 1, 2, 3, \cdots$)

明らかに $1/h_n \{v(x) + h_n (Bv)(x) - g_n(x)\} = (Bv)(x)$ 又は0 (a.e. x)

又a.e. x に対し十分大きいnをとると、

$$|v(x) + h_n (Bv)(x)| \leq Y(\alpha + h_n)$$

実際 $|v(x)| \leq Y(\alpha)$ (a.e. x) に注目して場合分けする。

- $0 \leq x \leq \rho(\alpha; x_0)$, $-Y(\alpha) < v(x) < Y(\alpha)$ の場合,
十分大きいnをとると, $|v(x) + h_n (Bv)(x)| < Y(\alpha) < Y(\alpha + h_n)$.

- $0 \le x \le \rho(\alpha; x_0)$, $v(x) = Y(\alpha)$ の場合, すべての n に対し

$$
\begin{aligned}
v(x) + h_n (Bv)(x) &= Y(\alpha) + h_n f(x, v(x)) \\
&\le Y(\alpha) + h_n b(x) \cdot Y(\alpha) \\
&\le Y(\alpha)\left\{1 + \int_{\alpha}^{\alpha+h_n} b(\rho(\tau; x_0))\, d\tau\right\} \le Y(\alpha + h_n)
\end{aligned}
$$

(①②より)

($b(\cdot)$, $\rho(\cdot; x_0)$ の単調性より)

一方, 十分大きい n に対し $0 \le v(x) + h_n (Bv)(x)$

- $0 \le x \le \rho(\alpha; x_0)$, $v(x) = Y(\alpha)$ の場合も同様の計算で

$$-Y(\alpha + h_n) \le v(x) + h_n (Bv)(x) \le 0 \qquad (n : 十分大)$$

- すべての n に対し $v(x) + h_n (Bv)(x) = 0$ a.e. $x \in [\rho(\alpha; x_0), \infty)$

従って a.e. x に対し, 十分大きい n をとると

$$g_n(x) = v(x) + h_n (Bv)(x)$$

ルベーグの収束定理より

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{h_n} \| v + h_n (Bv) - g_n \| = 0$$

各 n に対し g_n の定め方から

$$
\begin{cases}
|g_n(x)| \le Y(\alpha + h_n) & \text{a.e. } x \in [0, \rho(\alpha; x_0)] \\
g_n(x) = 0 & \text{a.e. } x \in (\rho(\alpha; x_0), \infty)
\end{cases}
$$

故に
$$
\begin{cases}
|(T(h_n) g_n)(x)| \le Y(\alpha + h_n) & \text{a.e. } x \in [0, \rho(\alpha + h_n; x_0)] \\
(T(h_n) g_n)(x) = 0 & \text{a.e. } x \in (\rho(\alpha + h_n; x_0), \infty)
\end{cases}
$$

すなわち $T(h_n) g_n \in C_{\alpha + h_n}$. そこで $n = 1, 2, 3, \cdots$ に対し $v_n = T(h_n) g_n$ と定めると (1, a), (1, b) は成立する. 以上より (R.1) は成立する.

以上の様に(H1)〜(H5), (R.1)が成り立つ事から文献[3]の定理5.2を用いる. C上の非線形半群$\{S(t); t\geq 0\}$が存在して仮定[0],[I],[II]を満足. 更にfがC^1級関数だから[III]を満足. そこで命題1より[A][B][C][D]が成立する.

・特に$v\in D(A)\cap C$なら Remark で述べた事から

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(S(t)v) = (A+B)(S(t)v) & (\text{for } t\geq 0) \\ t \longrightarrow \frac{d}{dt}(S(t)v) \text{ は } [0,\infty) \text{ で連続.} \end{cases}$$

$(S(t)v)(x) = u(x,t)$ $(\text{for } 0\leq t\leq\infty,\ 0\leq x<\infty)$ と書くと

前述より各$t\geq 0$に対し関数$u(\cdot,t)$は零集合上の値を修正すればコンパクトな台を持つ絶対連続関数になり、更に

$$(AS(t)v)(x) = -a(x)u_x(x,t) \quad (a.e.\ x\in[0,\infty))$$

$$(BS(t)v)(x) = f(x, u(x,t)) \quad (a.e.\ x\in[0,\infty))$$

References

[1] J.R.Dorroh,Local groups of differentiable transformations,Math.Ann. 192(1971),243-249

[2] J.R.Dorroh and S.Oharu,Semigroups of differentiable transformations, the semi-linear case,Working Notes.

[3] S.Oharu and T.Takahashi,Characterization of nonlinear semigroups associated with semilinear evolution equations,Trans.Amer.Math.Soc., 311(1989),593-619.