数理解析研究所講究録
914巻 1995年 119-122



# 2成分層流の時間的大域解について

YASUSHI HATAYA 京大・理 幡谷 泰史
YOSHIAKI TERAMOTO 京大・理 寺本 恵昭

ABSTRACT. 2成分流体の平面 Couette 流について考察する。粘性が異なる場合について、適当な仮定の下で大域解が存在し、指数的に減衰することを示す。

## 1. INTRODUCTION

上壁は水平方向に一定速度で動き、下壁は固定されている2枚の平行平板間の2成分流体を考える。2流体は粘性のみ異なるものとし、それ自身未知関数である自由界面で分けられているものとする。それぞれの流体の運動は Navier-Stokes 方程式、界面では 流速の連続性・応力と表面張力のつりあい・運動力学的境界条件、壁では粘着境界条件によって記述されているものとする。[1] における無次元化を採用すれば方程式、境界条件は次のようになる。

<u>方程式</u>

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{u}^I_t + (\mathbf{u}^I\cdot\nabla)\mathbf{u}^I + \nabla p^I = \mu_1 \Delta \mathbf{u}^I, \\ \nabla\cdot\mathbf{u}^I = 0, \end{aligned}\right. \qquad t>0,\ 0<x_2<l+h(t,x_1)$$

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{u}^{II}_t + (\mathbf{u}^{II}\cdot\nabla)\mathbf{u}^{II} + \nabla p^{II} = \mu_2 \Delta \mathbf{u}^{II}, \\ \nabla\cdot\mathbf{u}^{II} = 0, \end{aligned}\right. \qquad t>0,\ l+h(t,x_1)<x_2<1.$$

<u>初期・境界条件</u>

$$\mathbf{u}^j|_{t=0} = \mathbf{u}^j_0, \qquad h|_{t=0} = h_0$$
$$\mathbf{u}^I\Big|_{x_2=0} = (0,0), \qquad \mathbf{u}^{II}\Big|_{x_2=1} = (1,0)$$
$$h_t + u^I_1 h_{x_1} = u^I_2$$
$$u^I_1 = u^{II}_1, \qquad u^I_2 = u^{II}_2$$
$$\vec{\tau}\cdot T^I\vec{n} = \vec{\tau}\cdot T^{II}\vec{n}$$
$$\vec{n}\cdot T^I\vec{n} - \vec{n}\cdot T^{II}\vec{n} = \frac{S h_{x_1x_1}}{(1+(h_{x_1})^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

ここで、水平方向に $L-$ 周期的 、$\int_\Gamma hd\,\Gamma = 0$ 、正数 $S$ は表面張力係数、$\vec{n},\vec{\tau}$ はそれぞれ界面における法ベクトル、接ベクトルとする。

以下では次のような定常解（Couette 流）の周りで考える。
定常解

$$u_1(x_1,x_2,t)=U_0(x_2)=\begin{cases}\frac{x_2}{l+m(1-l)}, & \text{in } 0<x_2<l\\ \frac{m(x_2-1)}{l+m(1-l)}+1, & \text{in } l<x_2<1,\end{cases}$$
$$u_2^j\equiv 0,\qquad h\equiv 0,\qquad p^I\equiv p^{II}\equiv p_0\ (\text{const}).$$

ここで、$m=\frac{\mu_1}{\mu_2}$ とした。この2成分流体の線形安定性は、いくつかの特殊な極限について詳しく調べられている（Joseph and Renardy [1]）。また、2成分流体の解の存在を扱った論文として Tanaka [3] などがある。

## 2. Local Solution

自由界面を持つ領域の問題から、定常解が占める固定領域へ問題を書き換える。参照領域への変換写像を 次の $\Theta$ の逆写像として定義する。$\tilde{h}(x_1,x_2,t):=\sum_{\xi\in\mathbb{Z}}\frac{\hat{h}(\xi,x_2,t)e^{ix_1\xi}}{1+\xi^2(x_2-l)^2}$ とおくと $(x_1,x_2,t)\in\Omega(t)\times(0,T)$, $(x_1',x_2',t')\in\Omega_0\times(0,T)$ に対して

$$\Theta:\Omega_i^0\times(0,T)\to\Omega_i(t)\times(0,T),$$
$$x_1=x_1',\qquad x_2=x_2'+\frac{x_2'(x_2'-1)}{l(l-1)}\tilde{h}(x_1',x_2',t'),\qquad t=t'.$$

この変換は $h(x_1,t)$ が十分小さければ微分同相写像を定めるので、以下では固定領域で解を構成しよう。方程式・境界条件は次のように書き換わる。

$$\begin{array}{ll}\mathbf{u}_t^I-\mu_1\Delta\mathbf{u}^I+\nabla p^I=f(\mathbf{u}^I,h)+b(h)\nabla p^I, & \\ \nabla\cdot\mathbf{u}^I=0, & t>0,\ 0<x_2<l\\ \mathbf{u}_t^{II}-\mu_2\Delta\mathbf{u}^{II}+\nabla p^{II}=f(\mathbf{u}^{II},h)+b(h)\nabla p^{II}, & \\ \nabla\cdot\mathbf{u}^{II}=0, & t>0,\ l<x_2<1\end{array}\tag{2.1}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{u}^I\big|_{x_2=0}=(0,0),\qquad \mathbf{u}^{II}\big|_{x_2=1}&=(0,0)\\ h_t-u_2^I&=\partial_{x_1}a_0(h)\\ (u_1^I-u_1^{II})+\frac{1-m}{l+m(1-l)}h&=a_1(h)\\ (u_2^I-u_2^{II})&=\partial_{x_1}a_2(h)\\ \mu_1(u_{2,x_1}^I+u_{1,x_2}^I)-\mu_2(u_{2,x_1}^{II}+u_{1,x_2}^{II})&=a_3(\mathbf{u},h)\\ (2\mu_1u_{2,x_2}^I-p^I)-(2\mu_2u_{2,x_2}^{II}-p^{II})-Sh_{x_1x_1}&=a_4(\mathbf{u},h).\end{aligned}\tag{2.2}$$

V.A.Solonnikov [6] の手法を用いて、次の局所解を得ることができる。

**Proposition 2.1.** $\frac{3}{2} < r < 2$ とする。$\epsilon > 0$ が存在して $|m-1| < \epsilon$ ならば 、ある適合条件 を満たす初期条件 $(u_0, h_0)$ と任意に与えられた時間 $T > 0$ に対して、 正数 $\delta$ が存在して、

$$|h_0|_{H^{r-1/2}(\Omega^0)} + |u_0|_{H^{r-1}(\mathbb{R})} \leq \delta$$

ならば、初期値境界値問題 (2.1),(2.2) はつぎのような解 $(h, u, p)$ を持つ。

$$u \in H^{r,\frac{r}{2}}\left(\Omega_0 \times (0,T)\right), \quad h \in H^{r+\frac{1}{2},\frac{r+1/2}{2}}\left(\Gamma_0 \times (0,T)\right),$$
$$\nabla p \in H^{r-2,\frac{r-2}{2}}\left(\Omega_0 \times (0,T)\right), \quad p|_\Gamma \in H^{r-\frac{3}{2},\frac{r-3/2}{2}}\left(\Gamma_0 \times (0,T)\right).$$

## 3. Global Solution

**Theorem 3.1.** 正数 $\epsilon_1$ に対して、$|m-1| < \epsilon_1$ であるとする。ある正数 $\gamma$ が存在して、任意の $t_0 > 0$ に対して正数 $M$ が存在して、任意の $T > 0$ に対して局所解 $(u, h, p)$ が

$$\sup_{t_0 \leq t \leq t_0+T} \left\{ \|\boldsymbol{u}(t)\|_{H^2(\Omega_0^j)} + |h(t)|_{H^{5/2}(\Gamma_0)} + |p(t)|_{H^{1/2}(\Gamma_0)} \right\} \leq \epsilon_1 \tag{3.1}$$

を満たすのならば、

$$\|\boldsymbol{u}(t)\|_2 + |h(t)|_3 \leq Me^{-\gamma t}\left\{\|\boldsymbol{u}(t_0)\|_2 + |h(t_0)|_3\right\}, \quad 1 \leq t \leq T, \tag{3.2}$$

が成り立つ。

<u>証明の方針</u>

$$E = \sum_{j=0,1,2} \left\|\partial_x^j \mathbf{u}(t)\right\|^2 + \|\mathbf{u}_t(t)\|^2 + \frac{S}{2}\left(\sum_{j=0,1,2} |h_x(t)|^2 + |h_{xt}(t)|^2\right),$$

$$F = \sum_{j=0,1,2} \left\|\nabla \partial_x^j \mathbf{u}(t)\right\|^2 + \|\nabla \mathbf{u}_t(t)\|^2,$$

$$G = \int_\Gamma h_x u_x u_{1,z} + \int_\Gamma (hh_x)_t p + \frac{m-1}{\mathcal{R}_2(l+m(1-l))}\int_\Gamma h u_{1,z} + \cdots.$$

とおく。$G$ について、(3.1) と $|m-1| < \epsilon_1$ を用いて

$$|G(t)| \leq c\epsilon_1 E(t), \tag{3.3}$$

を満たすように $\epsilon_1$ を十分小さくとれる。また、ある $\gamma' > 0$ がとれて、$\frac{d}{dt}(E+G)+\gamma' F \leq 0$, を導くことができる。 Poincaré の不等式を用いれば $E + G \leq cF$ であるので、

$$\frac{d}{dt}(E+G) + \gamma(E+G) \leq 0, \qquad \text{for } \gamma > 0. \tag{3.4}$$

また、垂直方向の微分についての評価は、

**Proposition 3.2.** 定常 *Stokes* 方程式

$$\begin{gathered}-\mu_j \Delta \boldsymbol{u} + \nabla p = \boldsymbol{f} \\ \nabla \boldsymbol{u} = 0\end{gathered} \quad \text{in } \Omega_j$$

$$\boldsymbol{u} = 0 \quad \text{on } S_B \tag{3.5}$$

$$u_2 = u_2 \qquad u_{1,x_2} + u_{2,x_1} = u_{1,x_2} + u_{2,x_1} \qquad \text{on } x_2 = l,$$

の解 $(\boldsymbol{u}, p)$ について、次の評価が成り立つ。

$$\|\boldsymbol{u}\|_{s+2} + \|\nabla p\|_s \le C \|\boldsymbol{f}\|_s \qquad s = 0, 1.$$

この Proposition と (2.1), (2.2) を用いれば、次の評価をうる。

$$\sum_{s=0,1} \left( \left\| \partial_{x_2}^s \mathbf{u} \right\|_2 + \|\nabla p\|_s \right) \le cF. \tag{3.6}$$

(3.3), (3.4), (3.6) をあわせれば、(3.1) を得る。

## References


1. D. D.Joseph and Y.Renardy, *Fundamentals of two-fluid dynamics :Mathematical theory and its applications*, Springer, New York, IAM series 3, 1992
2. C. S.Yih, *Instability due to viscosity strtification*, J.Fluid Mech.**26**, 337 (1967).
3. N.Tanaka ,*Global existence of two phase homogeneous viscous incompressible fluid flow*,Comm.P.D.E.,vol **18** , (1 & 2), pp.41-81, (1993)
4. T.Nishida and Y.Teramoto and Htay Aung Win, *Navier-Stokes flow down an inclined plane: Downward periodic motion*, J.Math.Kyoto.Vniv. vol.**33**, No.3,(1993).
5. J. T.Beale, *Large time behavior of viscous surface waves*, Arch.Rat.Mech.Anal. **84**, pp.304-352 (1984).
6. V. A.Solonnikov, *On an initial-boundary value problem for the Stoke systems arising in the study of problem with a free boundary*, Proc.Steklov.Inst.Math. **3**, pp.191-239 (1991).
7. J. L.Lions and E.Magenes, *Nonhomogeneous boundary value problem and its applications*, Springer, New York, 1969
8. O. A.Ladyženskaja , V. A.Solonnikov and N. N.Uralcéva, *Linear and quasilinear equations of parabolic type*, Translations of Mathematical Monographs vol 23 ,AMS (1968).
9. S. Ukai, *A Solution Formula for the Stokes Equation in $R^n_+$* , Comm.Pure.Apll.Math.**XL**, pp.611-621 (1987)
10. R. S. Adams, *Sobolev Spaces*, Academic Press, New York, 1975
11. M. S. Agranovich and M. S. Vishik, *Elliptic problems with a parameter and parabolec problems of general type*,Russian Math. Surveys, 19, pp.53-161 (1964)


Department of Mathematics, Kyoto University, Kyoto